TRABAJO DE INVESTIGACION PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN ECONOMÍA

CENTRO DE ESTUDIOS ECONOMICOS

EL COLEGIO DE MÉXICO

CÁLCULO DEL PRECIO DE OPCIONES EUROPEAS DE COMPRA CUYO ACTIVO SUBYACENTE NO TIENE DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

COMPARACIÓN CON EL MÉTODO BLACK Y SCHOLES

LUZ ADRIANA ENCARNACIÓN CAUDILLO FUENTES

PROMOCIÓN 1995-1997

SEPTIEMBRE DE 1998

ASESOR: MOGENS BLADT PETERSEN

Con todo cariño para Dios, para mis papás, y para mis amigos que me apoyaron en esta etapa.

Gracias" por otra meta lograda!

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis, así como el trabajo efectuado durante los dos años que duró la maestría, no hubieran sido posibles sin el apoyo de muchas personas, a las cuales les doy mi más profundo agradecimiento. Primeramente, agradezco a mis padres su respaldo incondicional durante todo el desarrollo de mis estudios, hasta la fecha.

No menos importantes son todos los profesores de la maestría, a quienes también agradezco que compartieran con nosotros sus conocimientos. En especial, deseo agradecer al Dr. Mogens Bladt Petersen, quien dirigió el desarrollo de esta tesis, e impartió el curso de Econometría II.

Asimismo, deseo agradecer a los profesores Sergio Hernández Castañeda y Paloma Zapata Lillo, quienes me alentaron a cursar la Maestría en El Colegio de México; y durante el desarrollo de esta tesis me permitieron usar su equipo de cómputo en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Finalmente, agradezco su apoyo a mis compañeros de la maestría; en particular, a José Alberto Cuéllar y a mis amigos con quienes estudié varios temas: Noé Serrano, Antonio Ruiz, Marco Velázquez; y a todos los amigos que aunque no compartieron estos estudios me acompañaron en esta etapa.

Cáculo del precio de opciones europeas de compra cuyo activo subyacente no tiene distribución lognormal.

Comparación con el método de Black y Scholes.

Luz Adriana Caudillo

Presentación

Usualmente, para calcular el precio de opciones financieras, no se hacen pruebas para verificar si se cumplen los supuestos del modelo de Black y Scholes, que es el más utilizado en la actualidad para este fin. Uno de los supuestos más fuertes que tiene este modelo es el de que el activo subyacente tiene distribución lognormal. Sin embargo, en países como México es poco probable que los activos tengan dicha distribución. Como ejemplo de ello, en el apéndice se encontrarán los precios diarios de acciones de Bimbo, Kimberly Clark, y Maizoro para periodos superiores a seis meses. Se encontrarán asimismo pruebas efectuadas con el paquete E-Views para determinar si su logaritmo tiene o no distribución normal. En los tres casos, el resultado es concluyente. La probabilidad de que los precios de las acciones tengan distribución lognormal es menor a .00126. De esta manera, cabe preguntarse si el método sería realmente útil en el cálculo del precio de opciones cuando los activos no tienen distribución lognormal. En el presente trabajo se pretende medir la diferencia del precio obtenido por medio de la fórmula de Black y Scholes y el precio de la opción calculado con un método propuesto por Samuelson (1965) para datos simulados con distribuciones diferentes de la lognormal.

Indice

Opciones financieras

Una opción europea de compra sobre el acervo, con fecha de vencimiento T y precio de ejercicio K, es un documento que da a su poseedor el derecho, mas no la obligación, de comprar una acción de acervo en el tiempo T (y sólo en ese tiempo) por un precio de $\$K$. Así el contrato tiene un pago final de:

$$\max(S_T - K, 0) \equiv (S_T - K)^+$$

y ningún pago inmediato.

De manera análoga, una opción de venta da a su poseedor el derecho, mas no la obligación, de vender el acervo a un cierto precio en una cierta fecha de vencimiento, i.e. la opción de venta da un pago final de $(K - S_t)^+$.

Sean C_t y P_t respectivamente los pagos de una opción europea de compra. Usando un argumento simple de cobertura, se puede mostrar que para prevenir las oportunidades de arbitraje, se debe satisfacer la siguiente relación, conocida como la Paridad Compra-Venta:

$$P_t = C_t + BK_t - S_t$$

Esta relación tiene lugar cuando se supone que no hay costos de transacción, no hay restricciones de ventas en corto y todos los activos son perfectamente divisibles. Además, se permitirá a los inversionistas reajustar continuamente sus portafolios.

Además de las opciones europeas, existen las opciones americanas, las cuales permiten ejercer el derecho de compra o de venta (según sea el caso) en cualquier momento entre la fecha de contratación y la de vencimiento. En este trabajo se considerarán sólo las opciones europeas de compra, aunque es importante comentar que el método expuesto es completamente análogo para las opciones europeas de venta.

Breve revisión de los modelos usualmente empleados en la valoración de opciones financieras

Modelo de Black y Scholes

Considérese un acervo que no paga dividendos, y asúmase que su precio satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$$

donde μ *y* σ son constantes y (W_t) es un Movimiento Browniano Estándar, i.e.

Además considérese un bono cuya dinámica de precios está dada por:

$$\frac{dB_t}{B_t} = r dt\,,\ B_T = 1$$

donde r es la tasa (continuamente compuesta) de interés, que se supone constante.

Supóngase que se desea calcular el precio de una opción europea de compra sobre el acervo, con fecha de vencimiento T y precio de ejercicio K. Como se ha explicado, tal contrato tiene un pago final de:

$$\max(S_t - K,\ 0) \equiv (S_t - K)^+$$

y ningún pago inmediato.

Estrechamente vinculada con la opción de compra, está la opción de venta, cuyo único pago es de $(K - S_t)^+$. Sean C_t y P_t respectivamente los pagos de una opción europea de compra. Usando un argumento simple de cobertura de riesgo (hedge), se puede mostrar que para prevenir las oportunidades de arbitraje, se debe satisfacer la siguiente relación, conocida como la Paridad Compra-Venta:

$$P_t = C_t + BK_t - S_t$$

Esta relación tiene lugar cuando se supone que no hay costos de transacción, no hay restricciones de ventas en corto y todos los activos son perfectamente divisibles. Además, se permitirá a los inversionistas reajustar continuamente sus portafolios.

Es posible representar una estrategia de intercambio (a_t , b_t) mediante un proceso estocástico predecible (de dos dimensiones).[1]

En este caso a_t representa la cantidad de unidades de acervo que se tienen en el tiempo t, mientras que b_t es la cantidad de bonos. $V_t = a_t S_t + b_t B_t$ es el valor del proceso.

Una estrategia de intercambio se llama autofinanciable si:

$$dV_t = a_t\, dS_t + b_t\, dB_t$$

lo que significa que sólo se tiene que invertir hoy. Las ganancias se reinvierten, y no se usan fondos adicionales para cubrir las pérdidas. Una oportunidad de arbitraje es una estrategia autofinanciable tal que ocurre una de ambas cosas:

$$V_0 \leq 0,\ P(V_T \geq 0) = 1,\ P(V_T > 0) > 0$$

o bien:

$$V_0 < 0,\ P(V_T \geq 0) = 1$$

Así, una oportunidad de arbitraje es una "comida gratis". Intuitivamente es claro que no existe este tipo de estrategias en el equilibrio. Habría una demanda infinita de la estrategia de arbitraje, mientras que ningún agente estaría dispuesto a ofrecerla. Por consideraciones de arbitraje estático sólo se pueden deducir las siguientes cotas para el precio de una opción de compra:

$$S_t \geq C_t \geq (S_t - B_t K)^+$$

Black y Scholes hallaron una fórmula que da el precio exacto de la opción utilizando argumentos dinámicos de arbitraje.

Fórmula de Black y Scholes

---

[1] Duffie (1992), Dynamic Asset pricing theory.

Con los supuestos anteriores, para prevenir oportunidades de arbitraje, se debe tener $C(S_t, t)$, donde

$$C(x,t) = x\varphi(z) - e^{-r(T-t)} K \varphi\left(z - \sigma \tfrac{\partial C}{\partial S}(S_t, t)\right)$$

$$z = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y φ denota la función de distribución acumulativa de la distribución normal estándar (N(0,1)). Para replicar el pago de la opción de compra se deben mantener a_t acciones de acervo y b_t bonos.

$$a_t = \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t) = \varphi(z), \; b_t = C(S_t, t) - a_t S_t$$

Una propiedad notable de este método es que el valor esperado instantáneo del acervo, μ, no aparece en la expresión. Esto quiere decir que los inversionistas no tienen que estar de acuerdo sobre el rendimiento esperado del acervo para poder estarlo en el precio de la opción.

Andreasen *et al* (1996) presentan la técnica usada por Black y Scholes para la obtención de la fórmula de la siguiente manera:

Sea Y_t el precio de una opción de compra con precio de ejercicio K y vencimiento en T. Asúmase que Y_t puede escribirse como una función dos veces continuamente diferenciable de S_t (por lo tanto no hay dependencia de las S_u's) y t. Esto es

$$Y_t = C(S_t, t)$$

Antes de proseguir, se enunciará un lema que se utiliza en el análisis:

Lema de Ito

Sea $F(S_t, t)$ una función dos veces diferenciable de t y del proceso estocástico S_t

$$dS = a_t\, dt + \sigma_t dW_t, \quad t \geq 0$$

con los parámetros flujo y de difusión (a_t, σ_t respectivamente) integrables en (S_t, t). Entonces:

$$dF_t = \left(\frac{\partial F}{\partial S_t} a_t + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} \sigma dW_t$$

Aplicando el Lema de Ito a Y_t se obtiene:

$$dY_t = \left(\mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S} \sigma S_t dW_t$$

Supóngase que existe una estrategia autofinanciable (a_t, b_t) tal que

$$Y_t = a_t S_t + b_t B_t \ \forall t \in [0,T]$$

de manera que a_t es el número de acciones de acervo mantenidas y b_t es el número de bonos mantenidos en el tiempo t. Así, se tiene:

$$dY_t = d(a_t S_t + b_t B_t)$$

$$= a_t dS_t + b_t dB_t$$

$$=(a_t \mu S_t + b_t r B_t)dt + a\sigma S_t dW_t^P$$

donde la segunda desigualdad se sigue de la condición de autofinanciamiento. Así se tienen dos expresiones de Ito para dY_t. Esto significa (por el Teorema de Descomposición Única), que los términos flujo y de difusión en ambas deben ser iguales. Igualándolos y utilizando el hecho de que $S_t > 0$ en P casi seguramente, se obtiene que el número de acciones de acervo que se deben mantener es:

$$a_t = \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t)$$

Por otro lado:

$$Y_t = S_t \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t) + b_t B_t \;\; \forall t \in [0,T]$$

De donde se desprende que:

$$b_t = \frac{1}{B_t}\left(C_t(S_t, t) - S_t \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t) \right)$$

De los términos de flujo (drift) se obtiene:

$$rS_t \frac{\partial C}{\partial S}(S_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^{\,2}}(S_t, t) + \frac{\partial C}{\partial t}(S_t, t) = rC(S_t, t)$$

Esto ocurre si la función C satisface la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$rx \frac{\partial C}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial C}{\partial t}(x,t) = rC(x,t)$$

Algo semejante ocurre para todos los activos cuyos precios sólo dependen de S_t y de t. Por lo tanto, esta ecuación recibe el nombre de la Ecuación Diferencial Parcial para el cálculo del precio de no-arbitraje de activos.

Puesto que se está considerando una opción europea de compra, C debe satisfacer la condición de frontera:

$$C(x,T)=(x-K)^+$$

Así para hallar el precio se debe encontrar C que satisfaga las dos ecuaciones anteriores. El precio hallado es único, dado que si existiese otro, entonces existiría una oportunidad de arbitraje al vender la opción y volver a comprarla a otro precio (o viceversa, dependiendo qué alternativa es más barata).

Es posible demostrar mediante un procedimiento algebraico extenso que la fórmula de Black y Scholes satisface tanto la ecuación diferencial parcial fundamental, como la condición de frontera enunciada anteriormente.

Finalmente, falta demostrar que la estrategia propuesta es autofinanciable. Para ello obsérvese que:

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x,t) = \varphi(z(x))$$

Puesto que φ y z son dos veces diferenciables en x y t (para $t < T$), es posible usar el Lema de Ito. Se desea demostrar que:

$$dY_t = a_t dS_t + b_t dB_t$$

De las definiciones de Y_t, a_t, y b_t, aplicando el Lema de Ito se obtiene:

$$\begin{aligned} dY_t &= d(a_t S_t) + d(b_t B_t) \\ &= (a_t dS_t + da_t S_t + da_t dS_t) + d(C - a_t S_t) \\ &= a_t dS_t + (da_t S_t + da_t dS_t + dC - da_t dS_t - da_t S_t - a_t dS_t) \\ &= a_t dS_t + (dC - a_t dS_t) \end{aligned}$$

Se ha hallado previamente una expresión para dC, y como $a_t = \dfrac{\partial C}{\partial S}(S_t, t)$ se tiene:

$$dY_t = a_t dS_t + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) dt$$

Puesto que C resuelve la ecuación diferencial parcial fundamental ocurre que:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC - rS_t \frac{\partial C}{\partial S}$$

Sustituyendo en la expresión recién obtenida para dY_t y dado que $dB_t = rB_t dt$:

$$dY_t = a_t dS_t + \frac{1}{B_t}\left(C - St\frac{\partial C}{\partial S}\right)dB_t$$

$$= a_t\, dS_t + b_t\, dB_t$$

con lo que se ha demostrado que esta estrategia es autofinanciable.

Modelo Binomial

Este modelo fue desarrollado por Cox, Ross y Rubinstein (1979) y tiene un enfoque discreto, en contraste con el enfoque dado por Black y Scholes, que es continuo. Primeramente se verá el modelo binomial de una etapa, y posteriormente su versión generalizada.

Supóngase que existe un acervo cuyo precio actual es S_0 , y que en el siguiente periodo puede subir a uS_0 ó bajar a dS_0 , con probabilidades p y $(1 - p)$ respectivamente. Supóngase que hay un bono con vencimiento en el siguiente periodo, sin cupones, que da una tasa (discreta) de interés r, y que se satisface la siguiente desigualdad: $u > 1 + r > d$. Ahora, supóngase que se desea calcular el precio de una opción de compra sobre el acervo con precio de ejercicio K. De los supuestos mencionados se deduce que la opción da un pago final de $(uS_0 - K)^+$ ó bien de $(dS_0 - K)^+$. Considérese el portafolio de a acciones y b bonos, con:

$$a = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0}$$

$$b = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)S_0}$$

El precio A de este portafolio es:

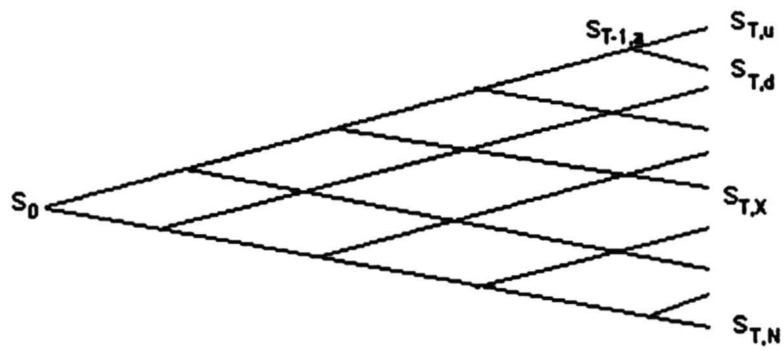
$$A = aS_0 + b/R = \frac{1}{R}\left(C_u\left(\frac{R-d}{u-d}\right) - C_d\left(\frac{R-u}{u-d}\right)\right) = R^{-1}\,(qC_u + (1 - q)C_d)$$

con $q = \dfrac{R-d}{u-d}$

Este portafolio replica a la opción, en el sentido de que en cualquiera de los estados da los mismos pagos que ésta, lo cual se puede demostrar efectuando varias operaciones algebraicas.

Para que no existan oportunidades de arbitraje, se requiere entonces que el precio de la a opción C_0 sea igual al precio de la opción, de manera que la expresión obtenida para A puede utilizarse para conocer el precio buscado. Una propiedad importante de esta expresión, es que no intervienen las probabilidades p de que ocurra uno u otro estado. En otras palabras, el precio de la opción no depende de dichas probabilidades.

De manera análoga, si hay más de un período, el análisis se hace mediante un "árbol binomial", en el cual se señalan todos los posibles estados. Un ejemplo de este tipo de árboles es el siguiente:



$S_{i,k}$ es el valor del acervo en el período i, asociado con el estado k en dicho período; $C_{i,k}$ el valor de la opción en el período i, asociado con el estado k en dicho período; y N es el número de estados que hay en el período T.

Para calcular el valor de la opción en el nodo $(T\text{-}1,a)$ basta aplicar el mismo procedimiento que se aplicó para una sola etapa. Supóngase que:

$$S_{T,1} = uS_{T-1,a}\, , S_{T,1} = dS_{T-1,a}\, ; R = r + 1,$$

con r la tasa de interés (discreta) en el período T - 1.

El costo de la opción en el nodo mencionado es:

$$C_{T-1,a} = R^{-1}\,(qC_u + (1 - q)C_d)$$

con $q = \dfrac{R-d}{u-d}$

De manera semejante, se puede hallar el precio de la opción en todos los demás nodos del período T - 1. Aplicando este procedimiento repetidamente hacia atrás, se puede obtener, el precio inicial de la opción C_0. Es posible demostrar que cuando el número de períodos que se consideran tiende a infinito, el precio obtenido por el método binomial tiende al precio obtenido por el método de Black y Scholes. El hecho de que se considere un mayor número de períodos no implica la extensión del período de vencimiento de la opción, sino una partición más fina del mismo.

Enfoque actuarial para el cálculo del precio de opciones financieras

Este método aparece por primera vez en Samuelson (1965). Fue generalizado por Merton y Samuelson (1969). Bladt y Rydberg (1998) presentan un enfoque actuarial del mismo.

Considérese un mercado financiero en el que se tienen dos activos: un bono (activo 1) con tasa de interés (instantánea) r, la cual se interpreta como la tasa de interés libre de riesgo, y un activo que se describe mediante el proceso estocástico de su pago S_t en el tiempo t (activo 2). Supóngase que dicho proceso da una tasa de retorno esperada (instantánea) de μ en el tiempo T, definida como

$$e^{\mu T} = \frac{ES_T}{S_0}$$

Es importante notar que no se ha hecho ninguna suposición sobre el proceso S_t y por lo tanto μ puede depender de T.

Se considerará un intervalo de tiempo $[0,T]$, donde 0 es el tiempo inicial y T es el tiempo final. Se denotará con S_0 el precio del activo 2 en el tiempo 0. Supóngase que se desea calcular el precio de una opción europea de compra $C(a\ ,\ T)$ sobre el activo 2, con precio de ejercicio a y fecha de vencimiento T. Para calcular el precio de la opción, se utilizará un enfoque de aseguramiento. Supóngase que se tiene un portafolio de opciones que son independientes e idénticamente distribuidas, y que se considera una opción como una pérdida potencial desde el punto de vista del emisor. Si fuera posible asegurarse contra esta pérdida utilizando un premio justo, entonces, éste es igual al precio de la opción.

Este premio justo por asegurar la pérdida potencial causada por el ejercicio de la opción, está dado por la pérdida esperada cuando se ejerce la opción en valores presentes. Bladt y Rydberg aclaran que para calcular el valor presente de S_T se debe usar *su* tasa esperada de retorno ($\exp(\mu T)$). En otras palabras, el valor presente de S_t es $S_t\,(\exp(-\mu T))$. Para calcular el valor presente del precio de ejercicio a se debe usar la tasa de interés libre de riesgo r, dado que a es un precio de ejercicio libre de riesgo en el futuro. Con esta manera de calcular el valor presente se está moviendo la variación aleatoria de S_t alrededor de su valor medio al tiempo 0, y se está haciendo lo análogo para a. La justificación de descontar S_t de esta manera, es que S_t tiene que ser descontada por e^{-rT} por la evolución normal de los precios y *además* por su tasa de retorno neta, que es $\exp(-(\mu-r)\ T)$, de manera que el factor de descuento total es $\exp(-\mu T)$. Este principio de descuento es una generalización del principio determinístico usualmente empleado, lo cual es más claro considerando que a puede verse como una variable aleatoria degenerada, cuyo valor presente es a descontada con su tasa esperada de retorno, la cual es e^{-rT}, dado que a es libre de riesgo. Cabe señalar, que S_0 y el valor presente de S_T son en general diferentes, y que la mejor predicción que se puede hacer sobre el valor que tomará S_T es ES_T, independientemente de como se defina S_T. Así, el método propuesto queda resumido en el siguiente teorema:

Teorema

El precio $C(a,T)$ de una opción europea de compra con vencimiento en T y precio de ejercicio a, está dado por:

$$C(a,T) = \mathrm{E}\left((e^{-\mu T}S_T - e^{-rT}a)\, I(e^{-\mu T}S_T > e^{-rT}a) \right)$$

Demostración:

La opción será ejercida, en valores presentes, si y sólo si

$$e^{-\mu T}S_T > e^{-rT}a$$

y la pérdida que sufriría el emisor es $e^{-\mu T}S_T - e^{-rT}a$. Así, el premio justo que el emisor debe cargar, es simplemente la esperanza de esta pérdida, sujeta al evento de que la opción sea ejercida, de lo cual se desprende inmediatamente la expresión buscada.

Este teorema es equivalente al método de Black y Scholes cuando S_T es lognormal, lo cual se ve en el siguiente corolario, que Bladt y Rydberg demuestran en su artículo

Corolario

Supóngase que el proceso $\{S_T\}$ está dado por:

$$dS_T = \mu S_T\, d_t + \sigma\, S_T\, dW_t$$

con valor inicial S_0 , donde W_t denota el proceso estándar de Wiener. Entonces la expresión propuesta en el teorema para el cálculo del precio de la opción es consistente con la fórmula de Black y Scholes.

Para el caso de las opciones americanas, el método puede resumirse en el siguiente teorema, cuya demostración se omitirá.

Teorema

El precio de una opción americana de compra (sin dividendos), $C_{am}\,(a,T)$, con vigencia hasta el período T, y precio de ejercicio a, está dado por:

$$C_{am}\,(a,T)_{,} = \int_0^T\int_a^\infty\left(\frac{S_0}{\mathrm{E}s_t}x - e^{-rt}a\right)I\left(\frac{S_0}{\mathrm{E}s_t}x > e^{-rt}a\right)f_{S_t}(x)f(t \mid x)dxdt$$

donde f_{S_t} es la densidad de S_T.

Se puede demostrar, mediante el cálculo de las variaciones, que la función

$$f^*(t \mid x) = \begin{cases} 1 & t=T \\ 0 & t<T \end{cases}$$

resuelve el problema:

$$\max_f C_{am}$$

sujeto a:

$$\int_0^T f(t \mid x)dt = 1$$

De ello se desprende que $C_{am}\,(a,t)_{f^*} \geq C_{am}\,(a,t)_{f}$.

Pero $C_{am}\,(a,t)_{f^*} = C_{eu}\,(a,t)$, ya que $f_0\,(T\text{-}t) = f_T\,(t)$

Por último, es necesario mencionar que para opciones de venta, basta poner el signo contrario a los argumentos del valor esperado y cambiar el signo de la desigualdad de la función indicadora I. Así, para obtener el precio de una opción de venta con precio de ejercicio a y fecha de vencimiento en T, basta calcular:

$$P(a,T) = \mathrm{E}\left((e^{-rT}a - e^{-\mu T}S_T)\, I(e^{-\mu T}S_T < e^{-rT}a) \right)$$

Metodología

Se usará el método de Samuelson para calcular el precio de opciones sobre activos con distintas funciones de distribución, y se comparará con el precio que se obtendría utilizando la fórmula de Black y Scholes, que supone que los activos se distribuyen lognormal. Para estimar el precio que la fórmula de Black y Scholes asignaría a opciones sobre activos con distribución distinta de la lognormal, se harán simulaciones de números aleatorios generados por la distribución y se calculará la volatilidad a partir de ellos para evaluar la fórmula.

Distribuciones empleadas

En el análisis se utilizaron las siguientes distribuciones, cuyos parámetros se escogieron de manera que $E[X] = 120$ y $Var[X] = 15^2 = 225$:

Distribución	Esperanza	Varianza
Gamma (λ=8/15,ρ=64)	$E[X]=\rho/\lambda$	$Var[X]=\rho/\lambda^2$
Normal (μ=120,σ=15)	$E[X]=\mu$	$Var[X]=\sigma^2$
Lognormal (M=4.779739650,Σ=0.1245158062)	$E[X]=\exp(M+\Sigma^2/2)$	$Var[X]= \exp[2(M+\Sigma^2)- \exp(2M+\Sigma^2)]$
Pareto (ν=106.7582667,θ=9.062257733)	$E[X]=\theta\nu/\theta-1$	$Var[X]=\theta\nu^2/[(\theta-1)^2(\theta-2)]$
Weibull (k=.6590658796 10^{-20}, b=9.602733020)	$E[X]=k^{-1/b}\Gamma(1+1/b)$	$Var[X]= k^{-2/b}(\Gamma(1+2/b)- \Gamma(1+2/b)^2)$

Las distribuciones tienen como función de densidad:

Distribución	Función de densidad f	Rango relevante
Gamma (λ,ρ)	$f(x) = \lambda^{\rho} x^{\rho-1} e^{-\lambda x} (\Gamma(\rho))^{-1}$	$(0,\infty)$
Normal (μ,σ)	$f(x) = \exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2) ((2\pi)^{1/2}\sigma)^{-1}$	$(-\infty,\infty)$
Lognormal (M,Σ)	$f(x) = \exp(-(\ln(x)-M)^2/2\Sigma^2) (x (2\pi)^{1/2}\Sigma)^{-1}$	$(0,\infty)$
Pareto (ν,θ)	$f(x) = \theta\nu^{\theta} / (\theta-1)$	(ν,∞)
Weibull (k, b)	$f(x) = kb\, x^{b-1} \exp(-ax^{b})$	$(0,\infty)$

Simulación

El método que se presentará a continuación se conoce como el método de la transformada inversa para generación de números generados por una variable aleatoria con distribución no uniforme.[2]

Dado un conjunto X = $\{x_i, i = 1\ldots n\}$ de números aleatorios generados por una distribución continua uniforme con parámetros 0, 1 (ie $f_u(x) = 1$, con f_u la función de densidad de x), es posible crear un conjunto de números aleatorios Y = $\{y_i, i = 1\ldots n\}$ generado por una distribución continua d de la siguiente manera:

$$F(y_i) = x_i \quad \forall\, i = 1\ldots n$$

En el presente trabajo se utilizó dicho método para las distribuciones de Pareto y de Weibull, y para generar los números aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1, se utilizó el generador integrado en el paquete de cómputo Maple. Para generar los números aleatorios provenientes de las distribuciones Gamma y Normal, se utilizó el generador que para este fin trae el mismo paquete.

Obtención de los precios

Como se había mencionado en la sección de Distribuciones Empleadas, se escogieron parámetros de las mismas tales que $ES_T = 120$. Asimismo se supuso $S_0 = 100$, y $a = 110$.

En el análisis se utilizaron cinco tasas diferentes de interés anual (R): 1%, 5%, 10%, 15%, y 20%. Para el cálculo de la tasa instantánea r se utilizó la siguiente expresión:

$$r = \ln(1 + R) / T,$$

con T el número de períodos antes del vencimiento de la opción. En este trabajo, se consideraron opciones con vencimiento a los 12 meses (ie $T = 12$).

[2] Existen otros métodos de simulación. Para mayores referencias, consultar:
Coss Bu, Raúl
Simulación

Cálculo del precio utilizando el método de Samuelson

Como se ha mencionado ya, se utilizaron distribuciones diferentes de la lognormal para modelar el comportamiento del activo subyacente, lo cual rompe con uno de los supuestos del modelo de Black y Scholes. Para obtener los precios de las opciones de acuerdo con la verdadera distribución de su activo subyacente, se utilizó la expresión mencionada anteriormente:

$$C(a,T) = \mathrm{E}\left((e^{-\mu T} S_T - e^{-rT} a)\, I(e^{-\mu T} S_T > e^{-rT} a) \right)$$

Esto se hizo con ayuda del paquete Maple, mediante el cual se pueden resolver integrales definidas por métodos numéricos.

En el análisis se supuso, como se explicó en el planteamiento del modelo, que

$$\frac{S_0}{\mathrm{E}S_T} = e^{-\mu T}$$

Precio para la opción de acuerdo con los valores obtenidos en la simulación, utilizando la fórmula B-S

Para hacer la comparación del precio de Samuelson con el precio que asignaría la fórmula de Black y Scholes a activos con distribución distinta de la lognormal, se siguió el siguiente procedimiento: Se simularon primeramente 50 precios del activo subyacente utilizando cada distribución. Con estos 50 datos simulados, se estimó la volatilidad necesaria para utilizar la fórmula B-S.[3] Este procedimiento se repitió 500 veces para así obtener 500 precios diferentes provenientes de datos simulados con la misma distribución. El "precio para los datos simulados", que aparece en el cuadro de resultados que aparece posteriormente, es el promedio de los precios obtenidos. Con estos precios, además, se procedió a construir un intervalo con el 95% de confianza centrado en el precio para los datos simulados..[4]

Como se hizo notar anteriormente, si el activo subyacente tiene una distribución lognormal, el precio obtenido por la fórmula de Black y Scholes coincide con el precio de Samuelson de la

[3] Se utilizó la librería financiera del paquete Maple, que ya contiene la fórmula. Para los parámetros T, a, y S_0 se utilizaron los valores ya definidos anteriormente. De manera análoga, se utilizaron las cinco tasas R previamente enunciadas.

[4] Se utilizó para ello la distribución normal, lo cual se justifica por la Ley de los Grandes Números .

opción. Por ello, para la distribución lognormal no fue necesario efectuar simulaciones. En este caso se utilizó la fórmula de Black y Scholes.

Para el cálculo, se tomó en consideración que en el modelo de Black y Scholes se supone que el comportamiento del activo subyacente está dado por:

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$$

La ecuación diferencial estocástica que describe al proceso tiene como única solución:

$$S_t = S_0 \exp\left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\right)$$

$$\text{ie } \ln(S_t / S_0) \sim N\left((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t\right)$$

De ello se desprende que la distribución de S_T, que es la que se necesita para el cálculo del precio según el Método de Bladt y Rydberg es:

$$\text{ie } \ln(S_T / S_0) \sim N\left((\mu - \sigma^2/2)T, \sigma^2 T\right)$$

Como se recordará, de la sección de Distribuciones Empleadas, la distribución Lognormal con parámetros M = 4.779739650 y Σ = 0.1245158062 tiene la propiedad de que: E[X] = 12 y Var [X] = 15^2. De esta manera, el valor de σ que se debe utilizar en la Fórmula de Black y Scholes es $\sigma = \Sigma / T^{1/2} = 0.1245158062 / 12^{1/2} = 0.035944617 11397$.

Explicación de las sesiones en MapleV2

Se darán a continuación dos ejemplos de las sesiones en Maple con las que se efectuaron los cálculos recién explicados:

1) *Sesión en MapleV2 para la distribución Gamma*

Para esta distribución, se utilizó el generador de números aleatorios con distribución Gamma que viene integrado en el paquete. Este generador se cargó con la instrucción:

```
> with(stats): G := RandGamma(64):
```

Asimismo, en todas las distribuciones analizadas, para estimar el precio para los datos simulados se utilizó la función que tiene el paquete para calcular el precio según la fórmula de Black y Scholes. Para poder emplear la función, se utilizó el comando:

```
> readlib(finance):
```

Como se ha comentado, se simularon 50 precios de activo, para calcular el precio de la opción. El procedimiento se repitió 500 veces. Se supuso un precio actual del activo (S_0) de 100, un período T de vencimiento de 12 meses, un precio de ejercicio a de 110y distintas tasas de interés R, de las que se obtuvo la tasa continua de interés r mediante la fórmula explicada anteriormente. Los valores de todos los parámetros se indican con los siguientes comandos;

```
> NUM:=50;
> NUMSIM:=500;
> S0:=100;
> T:=12;
> r:=ln(1.01)/T;
> a:=110;
> price1:=array[1..NUMSIM];
```

Con los siguientes comandos se indicó en que archivo se guardarían los resultados:

```
> readlib(write):
> open('outgamma'):
```

Los comandos "for j to NUMSIM do" y "od" encierran el conjunto de instrucciones que permite generar los datos y obtener el precio para los datos simulados una vez. El procedimiento se repite 500 (NUMSIM) veces.

```
> for j to NUMSIM do
> DATA:=seq(15/8*G(),i=1..NUM):
> S1:=sum('ln(DATA[i]/S0)/NUM','i'=1..NUM):
> S2:=sum('ln(DATA[i]/S0)^2/NUM','i'=1..NUM):
> sigmahat:=sqrt(1/T*(S2-S1^2)):
```

```
> price1[j]:=blackscholes(a,T,S0,sigmahat, r):
> writeln(price1[j]):
> od:
```

Con el comando "DATA:=seq(15/8*G(),i=1..NUM):" se simulan los 50 precios del activo que se distribuye Gamma (λ=8/15,ρ=64). La constante 15/8 que multiplica a "G()" se debe a que los números que se generaron con "RandGamma(64):" tienen distribución Gamma (λ= 1, ρ=64). Para obtener los números generados por la distribución con los parámetros deseados, se utiliza la siguiente propiedad de la distribución Gamma: Gamma ($\alpha\lambda$, ρ) = α Gamma (λ, ρ).

Por lo explicado en la sección anterior, para obtener la volatilidad (σ) es necesario calcular la expresión $\ln(S_t/S_0) = \ln(\text{DATA}/S_0)$. Con estos datos se estima la varianza mediante la expresión Σx^2 / num + $\bar{x}$ (x = ln(DATA/S_0)). Por lo expuesto anteriormente, para estimar σ se puede emplear la expresión: $\sigma = (\text{Var}(\ln(\text{DATA}/S_0)) / T)^{1/2}$. Con el estimador de σ y los datos previamente definidos, se calcula el precio para los datos simulados mediante la fórmula de Black y Scholes. Por ejemplo, la volatilidad de los primeros 50 datos simulados con la distribución Gamma fue de 0.3113319306. Por lo tanto el primer precio obtenido por la fórmula de Black y Scholes para datos simulados con la distribución Gamma fue 1.37220968.

Una vez se obtuvieron los 500 precios, se cierra el archivo y se obtienen la correspondiente media y desviación estándar. La media es el precio que aparece en la columna de resultados como "Precio para los datos simulados". Con la desviación estándar se construye el intervalo de confianza para este precio.

```
> close('outgamma');
> meansim:=0: mean1:=0:
> for i to NUMSIM do meansim:=meansim+price1[i]/NUMSIM od:
> for i to NUMSIM do mean1:=mean1+price1[i]^2/NUMSIM od:
> var:=(mean1-meansim^2);
> price:=meansim;
> lowerprice:=evalf(price-1.96*sqrt(var));
> upperprice:=evalf(price+1.96*sqrt(var));
```

Para el cálculo del precio de Samuelson, se calcula la expresión $E\left((e^{-\mu T}S_T - e^{-rT}a) I(e^{-\mu T}S_T > e^{-rT}a) \right)$. Esto se hace mediante los siguientes comandos:

```
> f:=lambda^rho/GAMMA(rho)*x^(rho-1)*exp(-lambda*x);
> rho:=64;
> lambda:=8/15;
> media:=evalf(int(x*f,x=0..infinity));
> varianza:=evalf(int((x-media)^2*f,x=0..infinity));
> factor1:=S0/media*x-exp(-r*T)*a;
> factor2:=factor1*Heaviside(factor1);
> factor3:=factor2*f;
> priceN:=int(factor3,x=0..infinity);
```

Para el caso específico de la distribución Gamma, fue necesario partir la integral en dos sumandos. Las instrucciones mediante las que se hizo esto aparecen a continuación:

```
> int(x^64*exp(-8/15*x),x=130.6930693..infinity);
> sumando1:=.1700911293*10^(-104)*5/6*(");
> int(x^63*exp(-8/15*x),x=130.6930693..infinity);
> sumando2:=.1700911293*10^(-104)*108.9108911*(");
> precio:=sumando1-sumando2;
```

2) Sesión en MapleV2 para la distribución Pareto

Para esta distribución, se utilizó el método de la transformada inversa para la generación de números aleatorios. Primero se cargó el generador de números aleatorios con distribución uniforme.

```
> with(stats): U := RandUniform(0..1):
```

Nuevamente se utilizó la función que tiene el paquete para calcular el precio según la fórmula de Black y Scholes. Para poder emplear la función, se utilizó el comando:

```
> readlib(finance):
```

También se indicaron los parámetros que se emplearían en el análisis.

```
> NUM:=50;
> NUMSIM:=500;
> S0:=100;
> T:=12;
> r:=ln(1.01)/T;
> a:=110;
```

Con los siguientes pasos, se obtuvo una expresión explícita para los números *y* que satisfacen:

$$F(y_i) = x_i \quad \forall\, i = 1 \ldots n$$

F en este caso es la función de distribución de Pareto, la cual se obtuvo integrando la función de densidad *f*.

```
> price1:=array[1..NUMSIM];
> f:=theta*nu^(theta)/x^(theta+1); #Pareto
> nu:=106.7582667;
> theta:=-120/(nu-120);
> print (f);
> ecuacion:=F=int(f,x=nu..y);
> y:=solve(ecuacion,y);
```

Se indicó el archivo en donde se guardarían los datos:

```
> readlib(write):
> open('outpare'):
```

Con las instrucciones comprendidas entre los comandos "for j to NUMSIM do" y "od" se simularon los números con distribución Pareto. Primero, con "seq(U(),i=1..NUM):" se generaron los números con distribución uniforme. Con la expresión para *y* obtenida anteriormente (transformada inversa), se obtuvo la sucesión de números generados con la distribución de Pareto

```
> for j to NUMSIM do
> seq(U(),i=1..NUM):
> for i from 1 to NUM do F:=U(i):
> P(i):=y: od:
> DATA:=seq(P(i),i=1..NUM):
```

Se obtuvo la volatilidad (σ), de manera análoga a lo hecho para la distribución Gamma. Con ella se calculó el precio para los datos simulados, utilizando la fórmula de Black Scholes.

```
> S1:=sum('ln(DATA[i]/S0)/NUM','i'=1..NUM):
> S2:=sum('ln(DATA[i]/S0)^2/NUM','i'=1..NUM):
> sigmahat:=sqrt(1/T*(S2-S1^2)):
> price1[j]:=blackscholes(a,T,S0,sigmahat, r):
> writeln(price1[j]):
> od:
```

El procedimiento ya enunciado se repitió 500 (NUMSIM) veces, por lo que se obtuvieron 500 precios. Se cerró el archivo donde se guardaron los datos, y se obtuvieron la media y la desviación estándar correspondientes. El precio para los datos simulados es la media. Con la desviación estándar se obtuvo el intervalo de confianza.

```
> close('outpare'):
> meansim:=0: mean1:=0:
> for i to NUMSIM do meansim:=meansim+price1[i]/NUMSIM od:
> for i to NUMSIM do mean1:=mean1+price1[i]^2/NUMSIM od:
> var:=(mean1-meansim^2);
> price:=meansim;
> lowerprice:=evalf(price-1.96*sqrt(var));
> upperprice:=evalf(price+1.96*sqrt(var));
```

Nuevamente, para el cálculo del precio de Samuelson se usó la expresión $E\left((e^{-\mu T}S_T - e^{-rT}a)\, I(e^{-\mu T}S_T > e^{-rT}a) \right)$.

```
> print (f);
> media:=evalf(int(x*f,x=nu..infinity));
> varianza:=evalf(int((x-media)^2*f,x=nu..infinity));
> factor1:=S0/media*x-exp(-r*T)*a;
> factor2:=factor1*Heaviside(factor1);
> factor3:=factor2*f;
> priceN:=int(factor3,x=nu..infinity);
```

Gráficas

Para la elaboración de las gráficas comparativas de los precios obtenidos por ambos métodos para las distribuciones Gamma, Pareto y Normal, se empleó el paquete Maple. Se obtuvieron ambos precios en función de *r*, y después se hicieron las gráficas mediante el comando "Plot". Sin embargo, para elaborar la gráfica análoga para la distribución de Weibull, el procedimiento seguido fue distinto, dado que el software fue incapaz de obtener expresiones para los precios en función de una r arbitraria. Puesto que el programa era capaz de obtener los precios valores específicos de r (por ejemplo r=.17, etc), se procedió de la siguiente manera. Se dividió el intervalo (0,.2)[5] en 100, y se hizo un programa en Maple que evaluara los precios en cada una de las 100 r's obtenidas de partir el intervalo. Se guardaron los resultados y la gráfica se construyó en la hoja de cálculo Excel.

Para la gráfica en la que se comparan los precios reales de las diferentes distribuciones para distintas tasas de interés, se realizó la gráfica en Maple considerando las distribuciones Gamma, Pareto y Normal. La gráfica se importó al programa Paint y allí se editó para añadirle la línea correspondiente a los precios para la distribución de Weibull, tomando en cuenta los precios previamente guardados en la hoja de cálculo Excel.

En la sección de anexos, se hallan impresiones de las sesiones de Maple con las cuales se obtuvieron los precios (para la tasa de interés de 1% anual) y de las sesiones en las que se crearon las gráficas que se exhiben más adelante (se incluyen también las hojas de Excel para la distribución de Weibull). También se encuentran gráficas de los quinientos precios obtenidos mediante la fórmula de Black y Scholes para los datos simulados utilizando otras distribuciones.

Resultados

En la tabla que se encuentra en la siguiente página se presentan los precios obtenidos por los dos métodos, y las cotas inferior y superior del intervalo de confianza para el precio obtenido por la Fórmula de Black y Scholes..

Se observa que el precio aumenta con la tasa de interés. Esto se debe a que el precio es la esperanza de la pérdida que sufriría el emisor en caso de que se ejerciera la opción, la cual es $e^{-\mu T}S_T - e^{-rT}a$ (cuando $e^{-\mu T}S_T > e^{-rT}a$). Cuando r aumenta, el valor presente del precio de ejercicio disminuye, con lo que la pérdida esperada por el emisor es mayor.

Obsérvese que para bajas tasas de interés el precio de Samuelson para la distribución de Pareto es el más alto. Esto se debe a que bajo la distribución de Pareto es más probable que ocurran eventos extremos, ya que esta distribución tiene la cola al infinito más pesada.

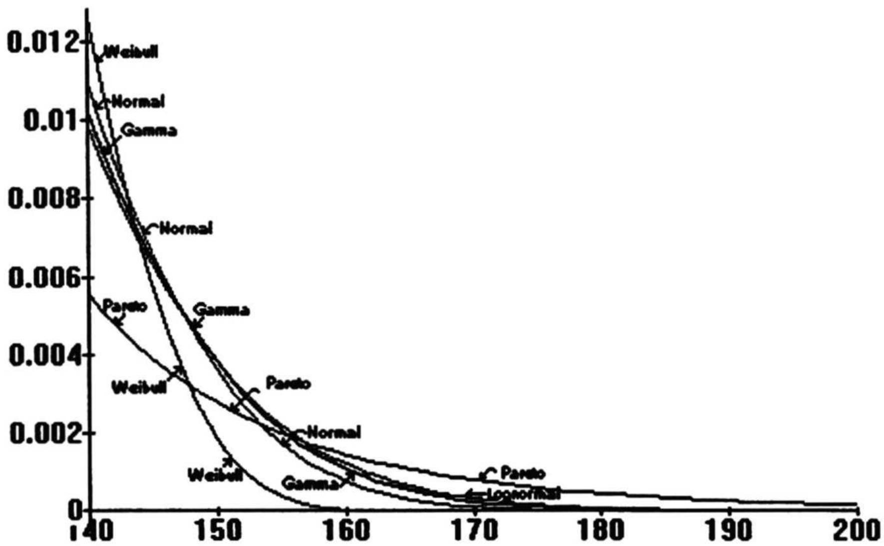
[5] Recuérdese que la tasa de interés se encuentra en el rango (0,ln(1.25)/12). Si se evalúa ln(1.25)/12 se obtiene aproximadamente 0.186. Se consideró más conveniente extender el dominio de la gráfica a 0.2, en vez de dejarlo entre 0 y 0.186

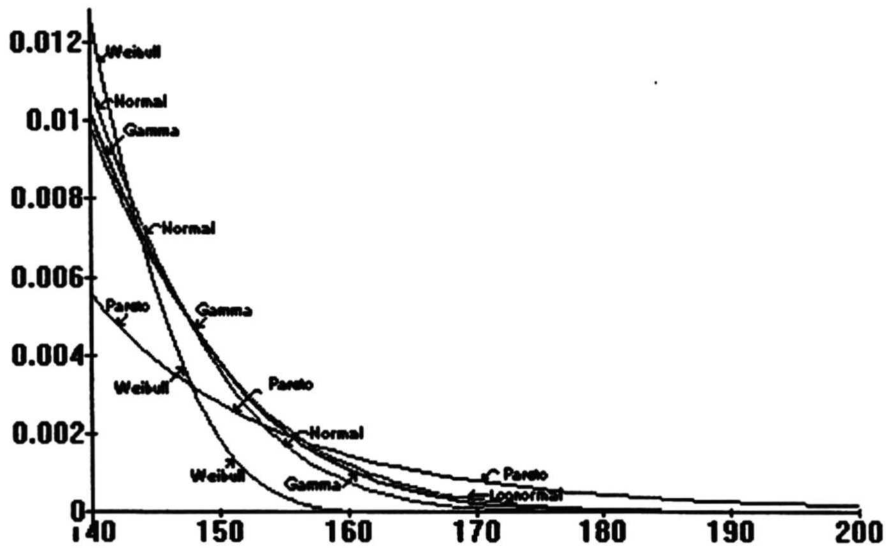
Precios de Samuelson obtenidos en el análisis

	Black-Scholes (Lognormal)	Gamma	Normal	Pareto	Weibull
0.01	1.90048902	1.85553977	1.74738478	2.16015933	1.40680273
0.05	3.05160872	3.03016455	2.96336511	2.95446836	2.72331331
0.1	4.96425481	4.9802896	4.9867785	4.29896839	4.94039281
0.15	7.33600804	7.38451784	7.45934431	6.15187338	7.59129301
0.2	10.0382703	10.1045917	10.2223289	8.67012522	10.4679039

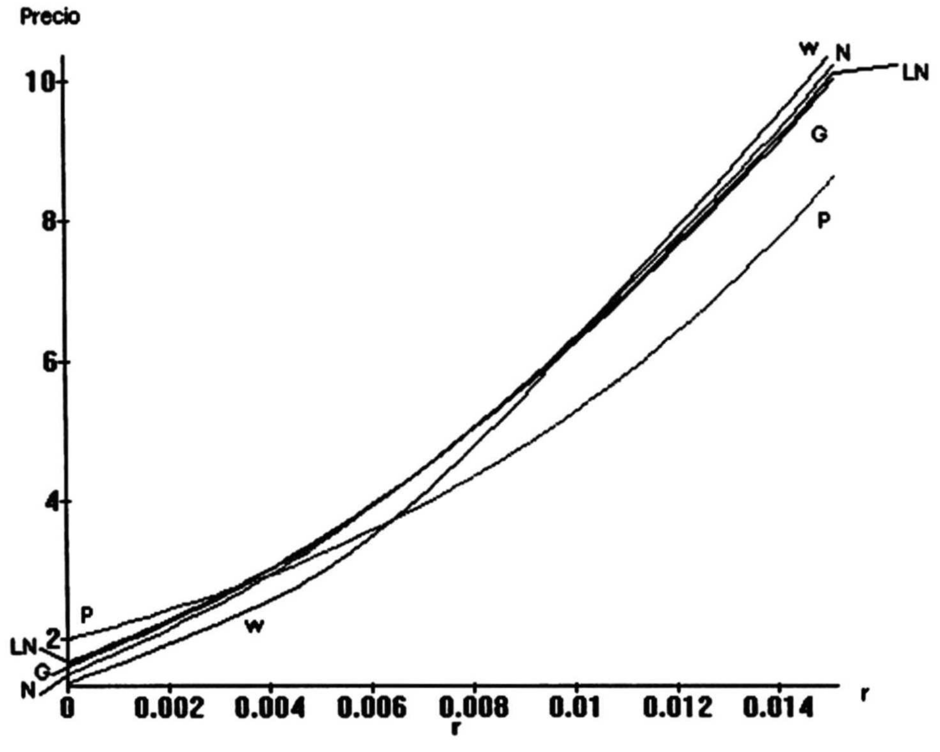
En la siguiente página se presentan dos gráficas en las que se observa que las distribuciones con colas al infinito sucesivamente menos pesadas son: Pareto, Lognormal, Gamma, Normal y Weibull. De los resultados expuestos en la tabla se observa que para tasas bajas de interés, una opción cuyo activo subyacente tiene una distribución con cola más pesada que otra tiene un precio más alto.

Colas de las funciones de distribución empleadas en el análisis





Para tasas de interés altas la situación cambia. Esto se debe a que para tasas bajas de interés exp(-*rT*)*a* es grande. En cambio, para tasas de interés altas, exp(-*rT*)*a* disminuye y cobran mayor importancia la cola inferior (-∞) y la parte de enmedio (el "cuerpo") de la función de densidad. Así, ante distintas tasas de interés, no es tarea trivial saber si el precio para una opción cuyo activo subyacente tiene una distribución con cola pesada es más alto o no que el precio para una distribución con cola poco pesada. Esto se aprecia con claridad en la siguiente gráfica.



En esta gráfica se observa como la sensibilidad a la tasa de interés depende de la distribución del activo subyacente, siendo la distribución de Weibull la que hace aumentar el precio con mayor rapidez, y la de Pareto, la que lo hace crecer más lentamente. Esto se debe, evidentemente, a que la distribución de Pareto tiene la cola más pesada (con el cuerpo de la distribución menos grueso), mientras que la distribución de Weibull tiene la cola más ligera.

En los siguientes cuadros se muestran: el precio para los datos simulados, las cotas del intervalo de confianza para este precio, el precio de Samuelson , y, para fines de comparación, el precio de Black y Scholes para el caso en que los activos efectivamente se distribuyen como lognormal.

Comparación de los precios de distintas distribuciones con el de la distribución lognormal

	Gamma				Lognormal
R	Precio para los datos simulados	Cota inferior	Cota superior	Precio Samuelson	Precio Samuelson=Precio B-S
0.01	1.13584033	0.52058805	1.7510926	1.85553977	1.90048902
0.05	2.11949107	1.33867215	2.90031	3.03016455	3.05160872
0.1	3.9653296	3.11367435	4.81698485	4.9802896	4.96425481
0.15	6.43816153	5.68490907	7.19141398	7.38451784	7.33600804
0.2	9.34515093	8.78866699	9.90163486	10.1045917	10.0382703

	Normal				Lognormal
R	Precio para los datos simulados	Cota inferior	Cota superior	Precio Samuelson	Precio Samuelson=Precio B-S
0.01	1.93519009	1.02580903	2.84457116	1.74738478	1.90048902
0.05	3.08164057	2.02874985	4.1345313	2.96336511	3.05160872
0.1	4.99119968	3.887048	6.09535136	4.9867785	4.96425481
0.15	7.36451967	6.35225276	8.37678658	7.45934431	7.33600804
0.2	10.070254	9.24357097	10.8969371	10.2223289	10.0382703

	Pareto				Lognormal
R	Precio para los datos simulados	Cota inferior	Cota superior	Precio Samuelson	Precio Samuelson=Precio B-S
0.01	1.33394893	0.13629801	2.53159986	2.16015933	1.90048902
0.05	2.34649937	0.88521624	3.8077825	2.95446836	3.05160872
0.1	4.20169779	2.63071848	5.7726771	4.29896839	4.96425481
0.15	6.65629168	5.24844605	8.06413732	6.15187338	7.33600804
0.2	9.52530614	8.43947387	10.6111384	8.67012522	10.0382703

	Weibull				Lognormal
R	Precio para los datos simulados	Cota inferior	Cota superior	Precio Samuelson	Precio Samuelson=Precio B-S
0.01	2.18327128	0.88466471	3.48187786	1.40680273	1.90048902
0.05	3.35910767	1.88617449	4.83204085	2.72331331	3.05160872
0.1	5.27782167	3.74630639	6.80933695	4.94039281	4.96425481
0.15	7.63093484	6.21588786	9.0459818	7.59129301	7.33600804
0.2	10.2961989	9.11431973	11.4780781	10.4679039	10.0382703

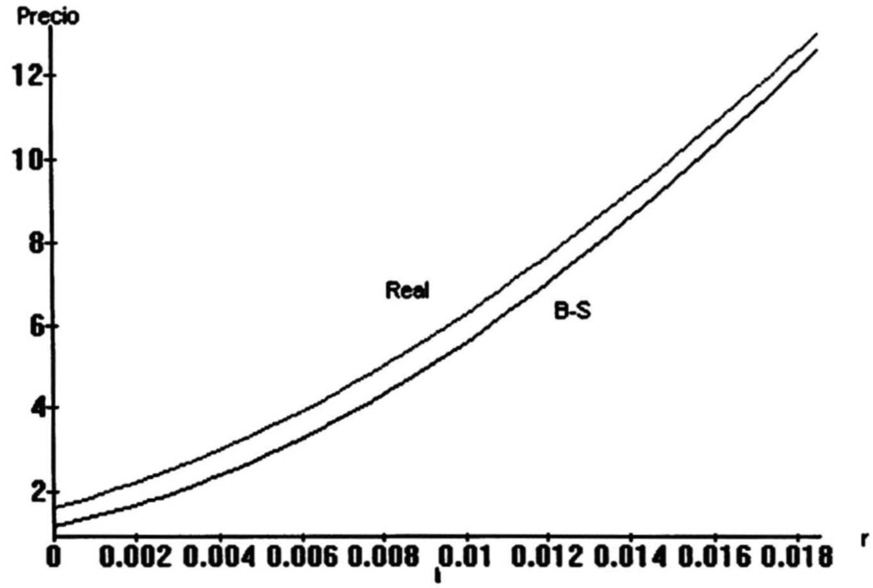
En este análisis se observa que dada una tasa del 1% anual y las distribuciones ya mencionadas, ocurre que la fórmula de Black y Scholes subvalúa las opciones cuyos activos subyacentes tengan las distribuciones Gamma, o Pareto (con los parámetros especificados); y sobrevalúa las opciones cuyos activos subyacentes tengan distribución Normal o Weibull. Así, para esta tasa de interés, la fórmula de Black y Scholes da el precio sucesivamente más bajos a las opciones cuyos activos subyacentes tienen distribución Weibull, Normal, Lognormal, Pareto y Gamma. Sin embargo, los precios reales (los dados por la verdadera distribución del activo subyacente) no se comportan de esa manera. En orden decreciente los precios reales son: Pareto,

Lognormal, Gamma, Normal, Weibull. Esto cambia con la tasa de interés.

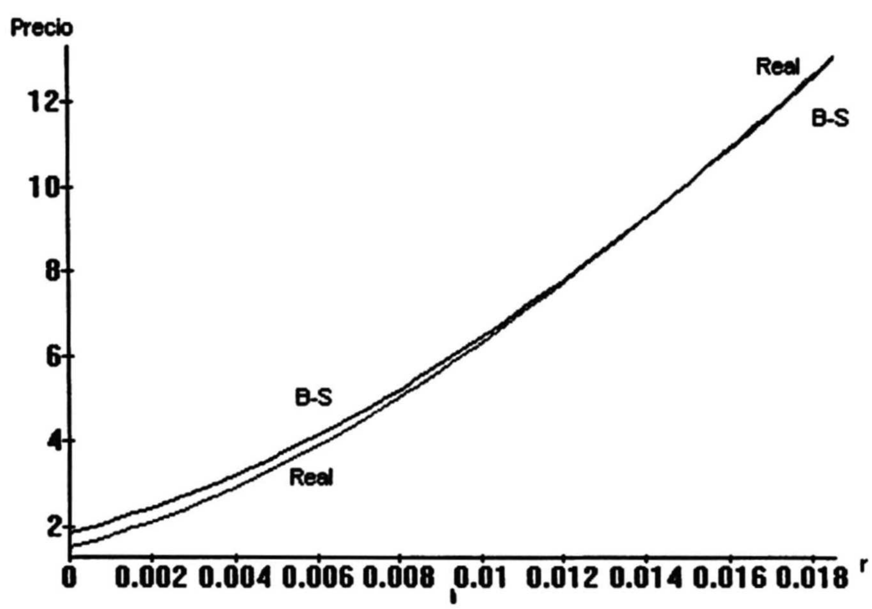
En las siguientes páginas se hallan gráficas que comparan los precios obtenidos por ambos métodos para las distintas distribuciones. Los casos de las distribuciones Pareto, Normal y Weibull, son interesantes porque en ellos ocurre que para tasas de interés bajas la fórmula de Black y Scholes subvalúa la opción, y para tasas de interés más altas la sobrevalúa. El caso de la distribución de Gamma es distinto, puesto que para el rango estudiado, la fórmula de Black y Scholes siempre subvalúa la opción. Además, como se ve en el cuadro de la página anterior, en todos los casos estudiados el precio real *está fuera* del intervalo de confianza del precio para los datos simulados. Recuérdese que éste precio se obtuvo empleando la fórmula de Black y Scholes, la cual presupone que el activo subyacente tiene distribución lognormal, condición que *no es satisfecha* por los activos considerados en el análisis. Esta es la razón de la diferencia en ambos precios, y de que en algunos casos el precio de Samuelson (que se obtiene basándose en la *verdadera* distribución del activo subyacente) no se encuentre dentro del intervalo de confianza que se obtendría para la opción utilizando la fórmula de Black y Scholes.

Gráficas comparativas

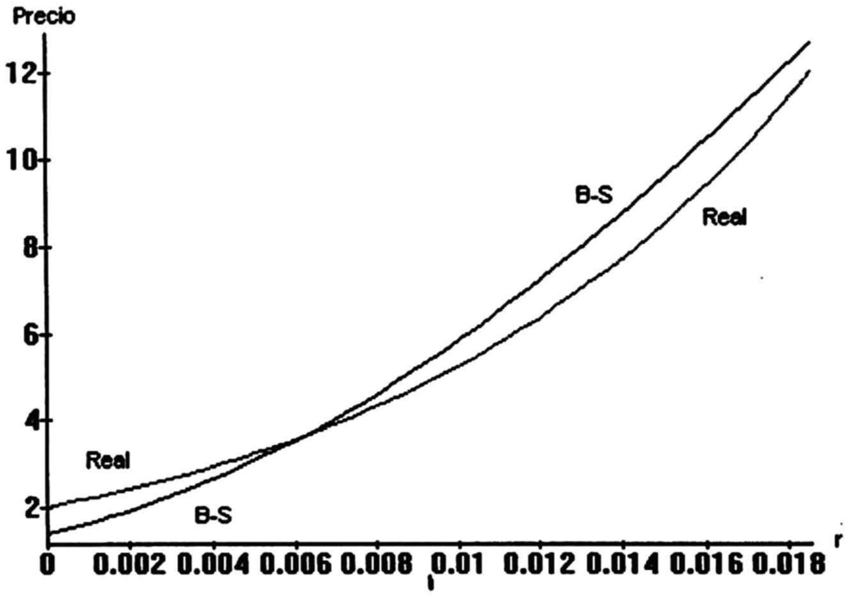
Comparación del precio real con el precio B-S para la distribución Gamma



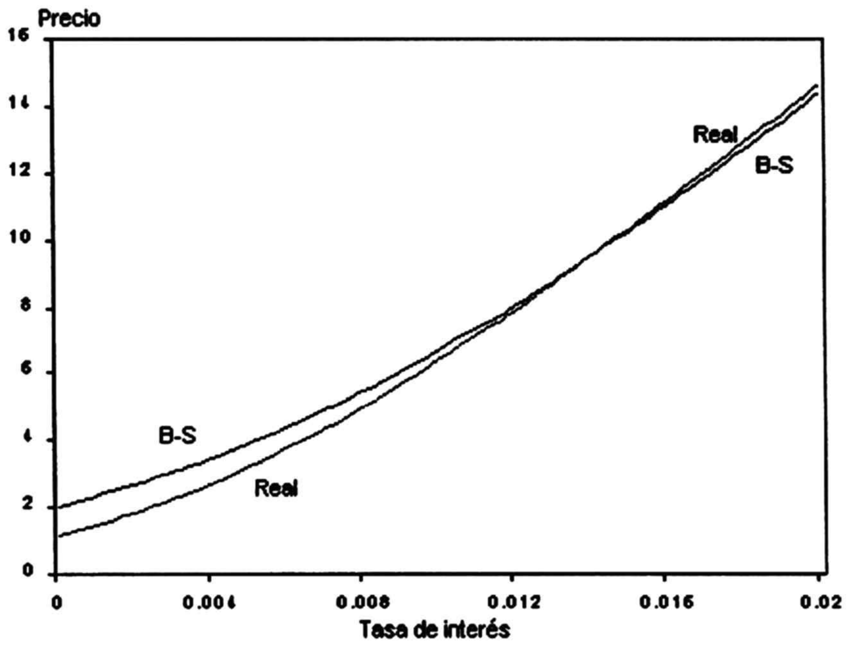
Comparación del precio real con el precio B-S para la distribución Normal



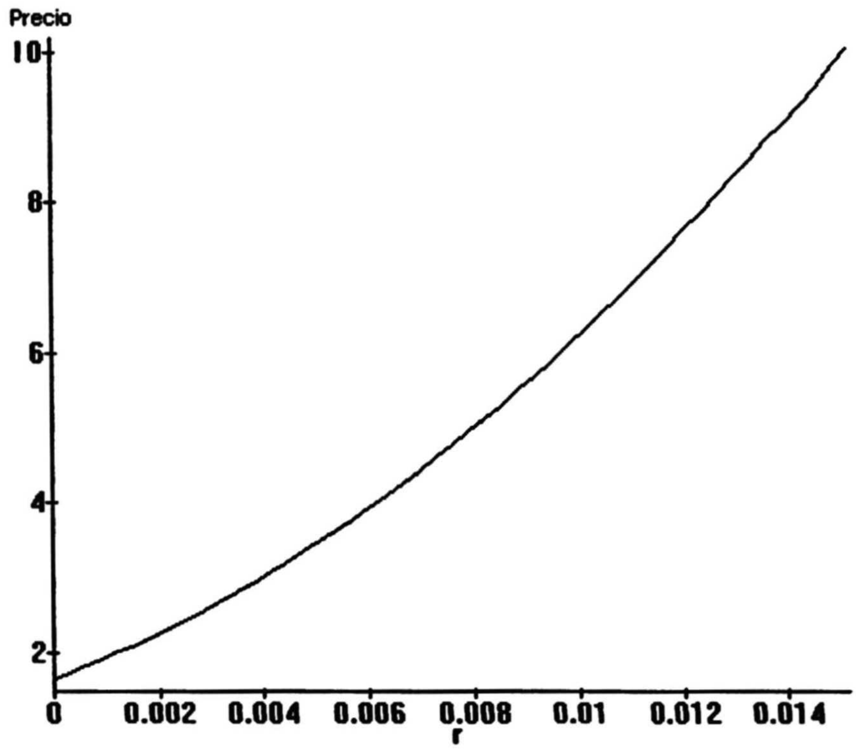
Comparación del precio real con el precio B-S para la distribución Pareto



Comparación del precio real con el precio B-S para la distribución Normal



Precios para diferentes tasas de interés. Distribución Lognormal.



Conclusiones

Del análisis realizado, se desprende que es importante efectuar pruebas para verificar cuál es la distribución de los activos sobre los cuáles se escriben opciones financieras para saber que tan confiable es la fórmula de Black y Scholes en el cálculo del precio. Como ya se ha visto, existen distribuciones para las cuales el precio de Samuelson, calculado en base a la verdadera distribución del activo subyacente, *no se encuentra* dentro de un intervalo de confianza al 5% de significancia centrado en el precio para los datos simulados, calculado mediante la fórmula de Black y Scholes. La diferencia entre ambos se debe a que la fórmula de Black y Scholes supone que el activo *tiene* distribución lognormal.

Además, es necesario notar que hasta el momento no existe un criterio sencillo que permita distinguir si la fórmula de Black y Scholes está sobrevalorando o subvaluando la opción en cuestión. Cabe señalar que las diferencias encontradas oscilan entre 0.10 y .90 unidades monetarias aproximadamente. Tomando en consideración que en los mercados de derivados generalmente se venden lotes de 100 opciones[5], y que las unidades monetarias empleadas usualmente son dólares, es claro que la diferencia entre los dos precios no es despreciable, aún cuando el precio real se encontrara en el intervalo de confianza del precio para los datos simulados, obtenido por la fórmula de Black y Scholes.

Por otro lado, con respecto al método de Samuelson, es importante notar la importancia que tiene la probabilidad de ocurrencia de eventos extremos (determinada por la cola de la distribución) en el precio de las opciones cuando la tasa de interés es baja. En los países desarrollados, esta conclusión es importante, dadas las bajas de interés que enfrentan.

El modelo de Bladt y Rydberg abre un nuevo campo de estudio que podría permitir en un futuro obtener precios de opciones confiables, en el sentido de que no se estarían transgrediendo un supuesto esencial para la validez del modelo con el que se calculan: el de log normalidad.

[5] Véase Mansell Carstens Catherine
Las nuevas Finanzas en México

Bibliografía

Andreasen *et al* (1996)
"The Black-Scholes Formula", Documento de trabajo, Universidad de Aarhus.

Bladt & Rydberg (1998)
"An actuarial Approach to Option Pricing under the Physical Measure and without Market Assumptions" en Insurance, Mathematics and Economics (Próxima aparición)

Samuelson, P. A. (1965)
"Rational Theory of Warrant Pricing", en Industrial Management Review, 6, 13-31.

Merton, R. & Samuelson P. A. (1969)
"A Complete Model of Warrant Pricing that Maximizes Utility" en Sloan Management Review, 17-46.

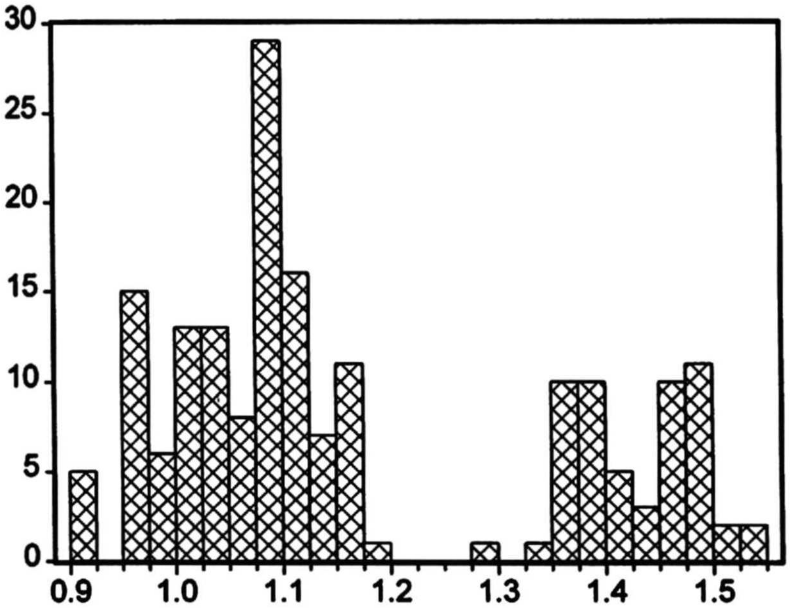
Merton (1963)
"Theory of Rational Option Pricing" en Bell Journal of Economics and Managemente Science, 4, 141-183

Anexos

Anexo 1: Pruebas de Normalidad para Series de Maizoro, Kimberly Clark y Bimbo

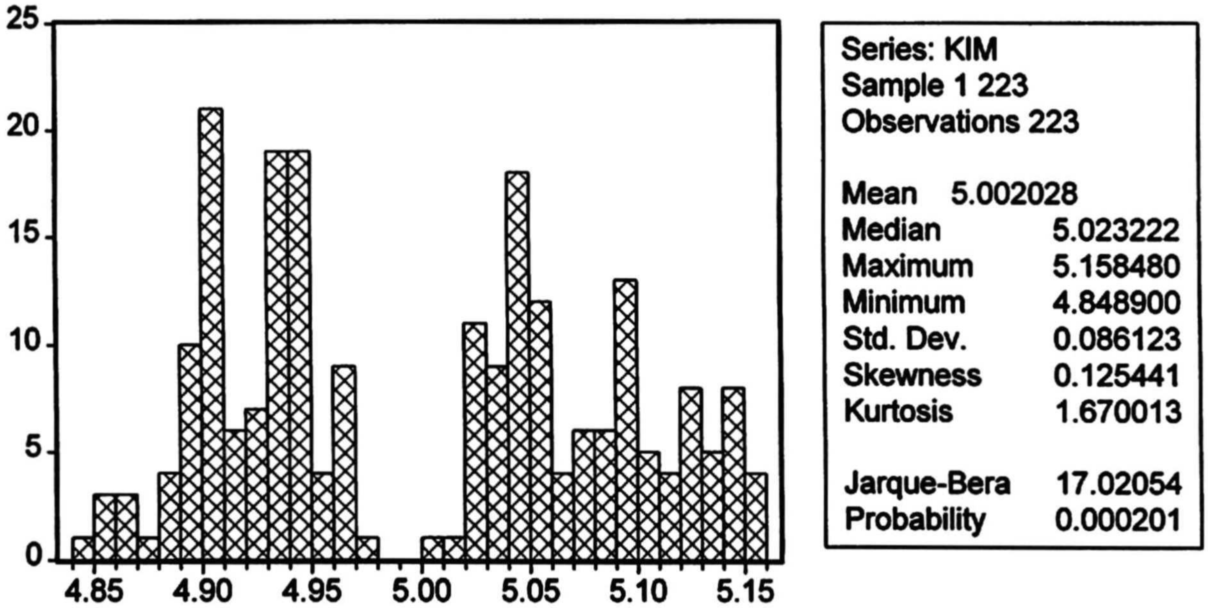
Anexo 2: Sesiones en MapleV2. Para la distribución de Weibull se incluye también la hoja de cálculo en Excel de Microsoft con la que se elaboró la gráfica

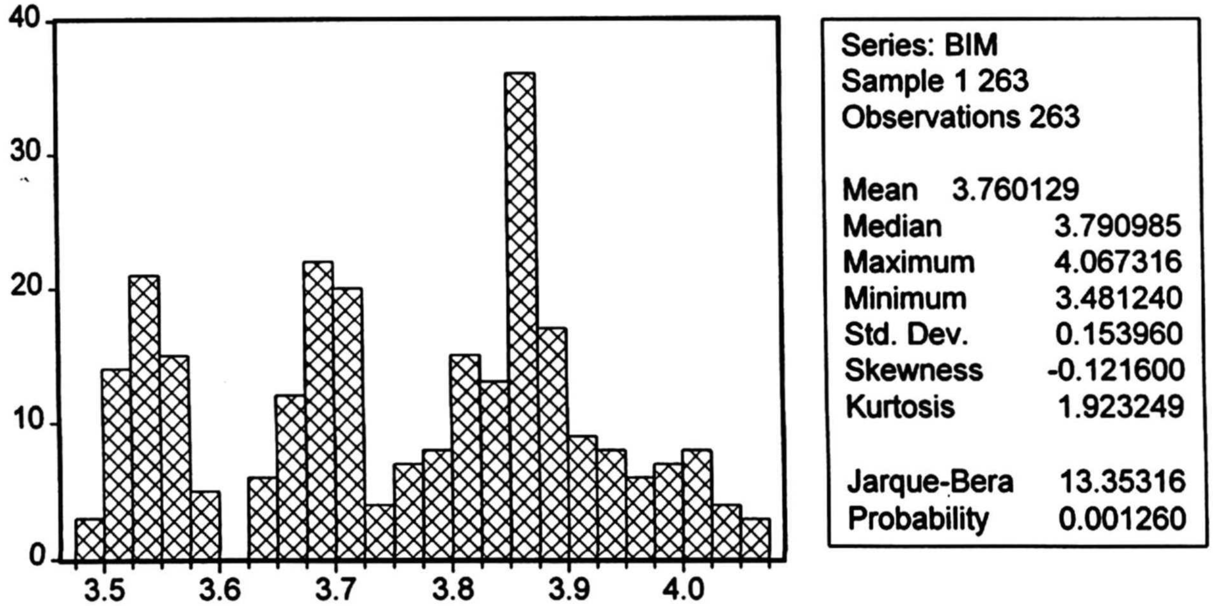
Anexo 3: Gráficas de los datos simulados para las distribuciones Gamma, Normal, Pareto y Weibull



Series: MAI
Sample 1 179
Observations 179

Mean	1.173391
Median	1.101940
Maximum	1.526056
Minimum	0.916291
Std. Dev.	0.182995
Skewness	0.621123
Kurtosis	1.923182
Jarque-Bera	20.15773
Probability	0.000042


25
20
15
10
5
0
4.85
4.90
4.95
5.00
5.05
5.10
5.15
Series: KIM
Sample 1 223
Observations 223
Mean 5.002028
Median 5.023222
Maximum 5.158480
Minimum 4.848900
Std. Dev. 0.086123
Skewness 0.125441
Kurtosis 1.670013
Jarque-Bera 17.02054
Probability 0.000201


40
30
20
10
0
3.5
3.6
3.7
3.8
3.9
4.0
Series: BIM
Sample 1 263
Observations 263
Mean 3.760129
Median 3.790985
Maximum 4.067316
Minimum 3.481240
Std. Dev. 0.153960
Skewness -0.121600
Kurtosis 1.923249
Jarque-Bera 13.35316
Probability 0.001260

```
> with(stats): G := RandGamma(64):
> readlib(finance):
> NUM:=50;
```

$$NUM := 50$$

```
> NUMSIM:=500;
```

$$NUMSIM := 500$$

```
> S0:=100;
```

$$S0 := 100$$

```
> T:=12;
```

$$T := 12$$

```
> r:=ln(1.01)/T;
```

$$r := .0008291942377$$

```
> a:=110;
```

$$a := 110$$

```
> price1:=array[1..NUMSIM];
```

$$price1 := array_{[1 \,..\, 500]}$$

```
> readlib(write):
> open('outgamma'):
> for j to NUMSIM do
> DATA:=seq(15/8*G(),i=1..NUM):
> S1:=sum('ln(DATA[i]/S0)/NUM','i'=1..NUM):
> S2:=sum('ln(DATA[i]/S0)^2/NUM','i'=1..NUM):
> sigmahat:=sqrt(1/T*(S2-S1^2)):
> price1[j]:=blackscholes(a,T,S0,sigmahat, r):
> writeln(price1[j]):
> od:
> close('outgamma');
> meansim:=0: mean1:=0:
> for i to NUMSIM do meansim:=meansim+price1[i]/NUMSIM od:
> for i to NUMSIM do mean1:=mean1+price1[i]^2/NUMSIM od:
```

```
> var:=(mean1-meansim^2);
```

$$var := .098535862$$

```
> price:=meansim;
```

$$price := 1.135840325$$

```
> lowerprice:=evalf(price-1.96*sqrt(var));
```

$$lowerprice := .5205880456$$

```
> upperprice:=evalf(price+1.96*sqrt(var));
```

$$upperprice := 1.751092604$$

```
> f:=lambda^rho/GAMMA(rho)*x^(rho-1)*exp(-lambda*x);
```

$$f := \frac{\lambda^{\rho} x^{(\rho-1)} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\rho)}$$

```
> rho:=64;
```

$$\rho := 64$$

```
> lambda:=8/15;
```

$$\lambda := \frac{8}{15}$$

```
> media:=evalf(int(x*f,x=0..infinity));
```

$$media := 120.$$

```
> varianza:=evalf(int((x-media)^2*f,x=0..infinity));
```

$$varianza := 225.0000061$$

```
> factor1:=S0/media*x-exp(-r*T)*a;
```

$$factor1 := .8333333333\, x - 108.9108911$$

```
> factor2:=factor1*Heaviside(factor1);
```

$$factor2 := (.8333333333\, x - 108.9108911)\, \mathrm{Heaviside}(.8333333333\, x - 108.9108911)$$

```
> factor3:=factor2*f;
```

$$factor3 := 43556142965880123323311949751266331066368/2560753353137761886296521433516543155893843781324121929218690831269689970261520661102919184525232840817909191200030250001873355358839035034179687 5$$

$$(.8333333333\, x - 108.9108911)\, \mathrm{Heaviside}(.8333333333\, x - 108.9108911)\, x^{63}\, e^{-\frac{8}{15} x}$$

```
> priceN:=int(factor3,x=0..infinity);
```

$$priceN := \int_{130.6930693}^{\infty} .1700911293\ 10^{-104}\, (.8333333333\, x - 108.9108911)\, x^{63}\, e^{-.5333333333\, x}\, dx$$

```
> int(x^64*exp(-8/15*x),x=130.6930693..infinity);
```

$$.1909220944\ 10^{107}$$

```
> sumando1:=.1700911293*10^(-104)*5/6*(");
```

$$sumando1 := 27.06179555$$

```
> int(x^63*exp(-8/15*x),x=130.6930693..infinity);
```

$$.1360678000\ 10^{105}$$

```
> sumando2:=.1700911293*10^(-104)*108.9108911*(");
```

$$sumando2 := 25.20625578$$

```
> precio:=sumando1-sumando2;
```

$$precio := 1.85553977$$

```
>
```

```
> with(stats): N := RandNormal(120,15):
> readlib(finance):
> NUM:=50;
```

$$NUM := 50$$

```
> NUMSIM:=500;
```

$$NUMSIM := 500$$

```
> S0:=100;
```

$$S0 := 100$$

```
> T:=12;
```

$$T := 12$$

```
> r:=ln(1.01)/T;
```

$$r := .0008291942377$$

```
> a:=110;
```

$$a := 110$$

```
> price1:=array[1..NUMSIM];
```

$$price1 := array_{[1\,..\,500]}$$

```
> readlib(write):
> open('outnorm'):
> for j to NUMSIM do
> DATA:=seq(N(),i=1..NUM):
> S1:=sum('ln(DATA[i]/S0)/NUM','i'=1..NUM):
> S2:=sum('ln(DATA[i]/S0)^2/NUM','i'=1..NUM):
> sigmahat:=sqrt(1/T*(S2-S1^2)):
> price1[j]:=blackscholes(a,T,S0,sigmahat, r):
> writeln(price1[j]):
> od:
> close('outnorm'):
> meansim:=0: mean1:=0:
> for i to NUMSIM do meansim:=meansim+price1[i]/NUMSIM od:
> for i to NUMSIM do mean1:=mean1+price1[i]^2/NUMSIM od:
```

```
> var:=(mean1-meansim^2);
```

$$var := .215268098$$

```
> price:=meansim;
```

$$price := 1.935190092$$

```
> lowerprice:=evalf(price-1.96*sqrt(var));
```

$$lowerprice := 1.025809025$$

```
> upperprice:=evalf(price+1.96*sqrt(var));
```

$$upperprice := 2.844571159$$

```
> f:=1/(sqrt(2*Pi)*15)*exp(-(x-120)^2/(2*15^2));
```

$$f := \frac{1}{30} \frac{\sqrt{2}\, \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{450}(x-120)^2\right)}}{\sqrt{\pi}}$$

```
> media:=evalf(int(x*f,x=-infinity..infinity));
```

$$media := 120.0000000$$

```
> varianza:=evalf(int((x-media)^2*f,x=-infinity..infinity));
```

$$varianza := 225.0000000$$

```
> factor1:=S0/media*x-exp(-r*T)*a;
```

$$factor1 := .8333333333\, x - 108.9108911$$

```
> factor2:=factor1*Heaviside(factor1);
```

$$factor2 := (.8333333333\, x - 108.9108911)\, \mathrm{Heaviside}(.8333333333\, x - 108.9108911)$$

```
> factor3:=factor2*f;
```

$$factor3 := \frac{1}{30}(.8333333333\, x - 108.9108911)\, \mathrm{Heaviside}(.8333333333\, x - 108.9108911)\sqrt{2}\, \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{450}(x-120)^2\right)} / \sqrt{\pi}$$

```
> priceN:=int(factor3,x=-infinity..infinity);
```

$$priceN := 1.747384776$$

```
> with(stats): U := RandUniform(0..1):
> readlib(finance):
> NUM:=50;
```

$$NUM := 50$$

```
> NUMSIM:=500;
```

$$NUMSIM := 500$$

```
> S0:=100;
```

$$S0 := 100$$

```
> T:=12;
```

$$T := 12$$

```
> r:=ln(1.01)/T;
```

$$r := .0008291942377$$

```
> a:=110;
```

$$a := 110$$

```
> price1:=array[1..NUMSIM];
```

$$price1 := array_{[1\,..\,500]}$$

```
> f:=theta*nu^(theta)/x^(theta+1); #Pareto
```

$$f := \frac{\theta\, \nu^{\theta}}{x^{(\theta+1)}}$$

```
> nu:=106.7582667;
```

$$\nu := 106.7582667$$

```
> theta:=-120/(nu-120);
```

$$\theta := 9.062257733$$

```
> print (f);
```

$$.2183402062\ 10^{20}\ \frac{1}{x^{10.06225773}}$$

```
> ecuacion:=F=int(f,x=nu..y);
```

$$ecuacion := F = -.2409335650\ 10^{19}\ \frac{1}{y^{\left(\frac{906225773}{100000000}\right)}} + 1.000000014$$

```
> y:=solve(ecuacion,y);
```

$$y := \left(-.2409335650\ 10^{19}\ \frac{1}{F - 1.000000014}\right)^{\left(\frac{100000000}{906225773}\right)}$$

```
> readlib(write):
> open('outpare'):
```

```
> for j to NUMSIM do
> seq(U(),i=1..NUM):
> for i from 1 to NUM do F:=U(i):
> P(i):=y: od:
> DATA:=seq(P(i),i=1..NUM):
> S1:=sum('ln(DATA[i]/S0)/NUM','i'=1..NUM):
> S2:=sum('ln(DATA[i]/S0)^2/NUM','i'=1..NUM):
> sigmahat:=sqrt(1/T*(S2-S1^2)):
> price1[j]:=blackscholes(a,T,S0,sigmahat, r):
> writeln(price1[j]):
> od:
> close('outpare'):
> meansim:=0: mean1:=0:
> for i to NUMSIM do meansim:=meansim+price1[i]/NUMSIM od:
> for i to NUMSIM do mean1:=mean1+price1[i]^2/NUMSIM od:
> var:=(mean1-meansim^2);
```

$$var := .373377690$$

```
> price:=meansim;
```

$$price := 1.333948932$$

```
> lowerprice:=evalf(price-1.96*sqrt(var));
```

$$lowerprice := .136298009$$

```
> upperprice:=evalf(price+1.96*sqrt(var));
```

$$upperprice := 2.531599855$$

```
> print (f);
```

$$.2183402062\ 10^{20}\ \frac{1}{x^{10.06225773}}$$

```
> media:=evalf(int(x*f,x=nu..infinity));
```

$$media := 120.0000018$$

```
> varianza:=evalf(int((x-media)^2*f,x=nu..infinity));
```

$$varianza := 225.0000225$$

```
> factor1:=S0/media*x-exp(-r*T)*a;
```

$$factor1 := .8333333208\, x - 108.9108911$$

```
> factor2:=factor1*Heaviside(factor1);
```

$$factor2 := (.8333333208\, x - 108.9108911)\,\mathrm{Heaviside}(.8333333208\, x - 108.9108911)$$

```
> factor3:=factor2*f;
```

$$factor3 := .2183402062\; 10^{20}\, \frac{(.8333333208\, x - 108.9108911)\,\mathrm{Heaviside}(.8333333208\, x - 108.9108911)}{x^{10.06225773}}$$

```
> priceN:=int(factor3,x=nu..infinity);
```

$$priceN := 2.160159325$$

```
> with(stats): U := RandUniform(0..1):
> readlib(finance):
> NUM:=50;
```

$$NUM := 50$$

```
> NUMSIM:=500;
```

$$NUMSIM := 500$$

```
> S0:=100;
```

$$S0 := 100$$

```
> T:=12;
```

$$T := 12$$

```
> r:=ln(1.01)/T;
```

$$r := .0008291942377$$

```
> a:=110;
```

$$a := 110$$

```
> price1:=array[1..NUMSIM];
```

$$price1 := array_{[1\,..\,500]}$$

```
> f:=k*b*x^(b-1)*exp(-k*x^b); #Weibull; #k, b > 0
```

$$f := k\,b\,x^{(b-1)}\,e^{-k\,x^b}$$

```
> b:=1/.104137019945;
```

$$b := 9.602733020$$

```
> k:=(225/(GAMMA(1+2*.104137019945)-(GAMMA(1+.104137019945))^2))^(-1/(2*.104137019
> 945));
```

$$k := .6590658796\ 10^{-20}$$

```
> print (f);
```

$$.6328833684\ 10^{-19}\,x^{8.602733020}\,e^{-.6590658796\ 10^{-20}\,x^{9.602733020}}$$

```
> ecuacion:=F=int(f,x=0..y);
```

$$ecuacion := F = -.9999999999\,e^{-.6590658796\ 10^{-20}\,y^{\frac{480136651}{50000000}}} + .9999999999$$

```
> y:=solve(ecuacion,y);
```

$$y := \left[-.1517299000\ 10^{21}\ \ln(-1.000000000\,F + .9999999999)\right]^{\frac{50000000}{480136651}}$$

```
> readlib(write):
> open('outweib'):
```

```
> for j to NUMSIM do
> seq(U(),i=1..NUM):
> for i from 1 to NUM do F:=U(i):
> P(i):=y: od:
> DATA:=seq(P(i),i=1..NUM):
> S1:=sum('ln(DATA[i]/S0)/NUM','i'=1..NUM):
> S2:=sum('ln(DATA[i]/S0)^2/NUM','i'=1..NUM):
> sigmahat:=sqrt(1/T*(S2-S1^2)):
> price1[j]:=blackscholes(a,T,S0,sigmahat, r):
> writeln(price1[j]):
> od:
> close('outweib'):
> meansim:=0: mean1:=0:
> for i to NUMSIM do meansim:=meansim+price1[i]/NUMSIM od:
> for i to NUMSIM do mean1:=mean1+price1[i]^2/NUMSIM od:
> var:=(mean1-meansim^2);
```

$$var := .438978300$$

```
> price:=meansim;
```

$$price := 2.183271282$$

```
> lowerprice:=evalf(price-1.96*sqrt(var));
```

$$lowerprice := .884664707$$

```
> upperprice:=evalf(price+1.96*sqrt(var));
```

$$upperprice := 3.481877857$$

```
> print (f);
```

$$.6328833684\ 10^{-19}\ x^{8.602733020}\ e^{-.6590658796\ 10^{-20}\ x^{9.602733020}}$$

```
> media:=evalf(int(x*f,x=0..infinity));
```

$$media := 120.0000010$$

```
> varianza:=int(x^2*f,x=0..infinity)-2*media*int(x*f,x=0..infinity)+media^2*int(f,x=0..infinity);
```

$$varianza := 224.99998$$

```
> factor1:=S0/media*x-exp(-r*T)*a;
```

$$factor1 := .8333333264\,x - 108.9108911$$

```
> factor2:=factor1*Heaviside(factor1);
```

$$factor2 := (.8333333264\,x - 108.9108911)\,\mathrm{Heaviside}(.8333333264\,x - 108.9108911)$$

```
> factor3:=factor2*f;
```

$$factor3 := .6328833684\;10^{-19}\,(.8333333264\,x - 108.9108911)\,\mathrm{Heaviside}(.8333333264\,x - 108.9108911)\,x^{8.602733020}\,e^{-.6590658796\;10^{-20}\,x^{9.602733020}}$$

```
> int(x^9.602733020*exp(-.6590658796*10^(-20)*x^9.602733020)*Heaviside(.8333333264*x-1
> 08.9108911),x=0..infinity);
```

$$.5447784174\;10^{21}$$

```
> sumando1:=.6328833684*10^(-19)*.8333333264*(");
```

$$sumando1 := 28.73176641$$

```
> int(x^8.602733020*exp(-.6590658796*10^(-20)*x^9.602733020)*Heaviside(.8333333264*x-1
> 08.9108911),x=0..infinity);
```

$$.3964282534\;10^{19}$$

```
> sumando2:=.6328833684*10^(-19)*108.9108911*(");
```

$$sumando2 := 27.32496368$$

```
> priceN:=sumando1-sumando2;
```

$$priceN := 1.40680273$$

```
> readlib(finance):
> S0:=100;
```

$$S0 := 100$$

```
> T:=12;
```

$$T := 12$$

```
> r:=ln(1.01)/T;
```

$$r := .0008291942377$$

```
> a:=110;
```

$$a := 110$$

```
> f:=1/(x*sqrt(2*Pi)*Sigma)*exp(-(ln(x)-Mu)^2/(2*Sigma^2));
```

$$f := \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}\, e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{(\ln(x) - M)^2}{\Sigma^2}\right)}}{x \sqrt{\pi}\, \Sigma}$$

```
> media:=simplify(int(x*f,x=0..infinity));
```

$$media := e^{\left(M + \frac{1}{2} \Sigma^2\right)}$$

```
> varianza:=simplify(int((x-media)^2*f,x=0..infinity));
```

$$varianza := e^{\left(2\,M + 2\,\Sigma^2\right)} - e^{\left(2\,M + \Sigma^2\right)}$$

```
> Mu:=4.779739650;
```

$$M := 4.779739650$$

```
> Sigma:=.1245158062;
```

$$\Sigma := .1245158062$$

```
> print(media,varianza);
```

$$120.0000000,\ 224.99999$$

```
> priceN:=blackscholes(a,T,S0,Sigma/sqrt(T),r);
```

$$priceN := 1.90048902$$

```
>
```

```
> with(stats): U := RandUniform(0..1):
> readlib(finance):
> S0:=100;
```

$$S0 := 100$$

```
> T:=12;
```

$$T := 12$$

```
> signum(r):=1;
```

$$\mathrm{signum}(r) := 1$$

```
> a:=110;
```

$$a := 110$$

```
> price1:=array[1..NUMSIM];
```

$$price1 := array_{[1 \,..\, NUMSIM]}$$

```
> f:=k*b*x^(b-1)*exp(-k*x^b); #Weibull; #k, b > 0
```

$$f := k\, b\, x^{(b-1)}\, e^{-k\, x^{b}}$$

```
> b:=1/.104137019945;
```

$$b := 9.602733020$$

```
> NUM:=300;
```

$$NUM := 300$$

```
> k:=(225/(GAMMA(1+2*.104137019945)-(GAMMA(1+.104137019945))^2))^(-1/(2*.104137019
> 945));
```

$$k := .6590658796\ 10^{-20}$$

```
> print (f);
```

$$.6328833684\ 10^{-19}\, x^{8.602733020}\, e^{-.6590658796\ 10^{-20}\, x^{9.602733020}}$$

```
> ecuacion:=F=int(f,x=0..y);
```

$$ecuacion := F = -.9999999999\, e^{-.6590658796\ 10^{-20}\, y^{\frac{480136651}{50000000}}} + .9999999999$$

```
> y:=solve(ecuacion,y);
```

$$y := \left[-.1517299000\ 10^{21}\, \ln(-1.000000000\, F + .9999999999)\right]^{\frac{50000000}{480136651}}$$

```
> media:=120;
```

$$media := 120$$

```
> factor1:=S0/media*x-exp(-r*T)*a;
```

$$factor1 := \frac{5}{6}x - 110\, e^{-12\, r}$$

```
> factor2:=factor1*Heaviside(factor1);
```

$$factor2 := \left(\frac{5}{6}x - 110\,e^{-12\,r}\right) \mathrm{Heaviside}\left(\frac{5}{6}x - 110\,e^{-12\,r}\right)$$

```
> factor3:=factor2*f;
```

$$factor3 := .6328833684\ 10^{-19} \left(\frac{5}{6}x - 110\,e^{-12\,r}\right) \mathrm{Heaviside}\left(\frac{5}{6}x - 110\,e^{-12\,r}\right) x^{8.602733020}$$
$$e^{-.6590658796\ 10^{-20}\ x^{9.602733020}}$$

```
> divi:=100;
```

$$divi := 100$$

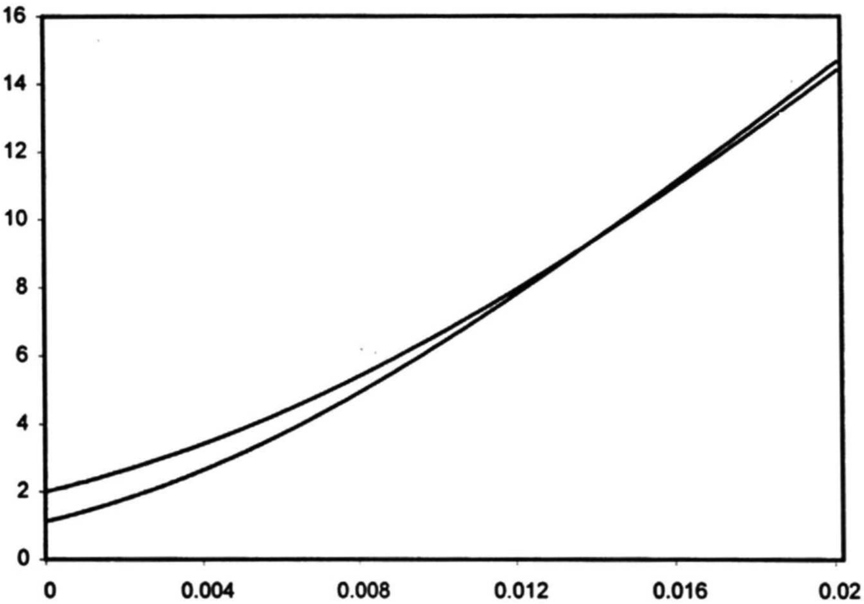
```
> seq(U(),i=1..NUM):

> for i from 1 to NUM do F:=U(i):

> P(i):=y: od:

> DATA:=seq(P(i),i=1..NUM):

> S1:=sum('ln(DATA[i]/S0)/NUM','i'=1..NUM):

> S2:=sum('ln(DATA[i]/S0)^2/NUM','i'=1..NUM):

> sigmahat:=sqrt(1/T*(S2-S1^2));
```

$$sigmahat := .03924022872$$

```
> readlib(write):

> open('graf'):

> for i from 0 to divi do

> r:=.02/divi*i;

> int(x^9.602733020*exp(-.6590658796*10^(-20)*x^9.602733020)*Heaviside(5/6*x-110*exp(-1
> 2*r)),x=0..infinity):

> sumando1:=.6328833684*10^(-19)*5/6*("):

> int(x^8.602733020*exp(-.6590658796*10^(-20)*x^9.602733020-12*r)*Heaviside(5/6*x-110*e
> xp(-12*r)),x=0..infinity):

> sumando2:=.6328833684*10^(-19)*110*("):

> precio:=sumando1-sumando2;

> bs:=blackscholes(a,T,S0,sigmahat, r):

> writeln(r,precio,bs);
```

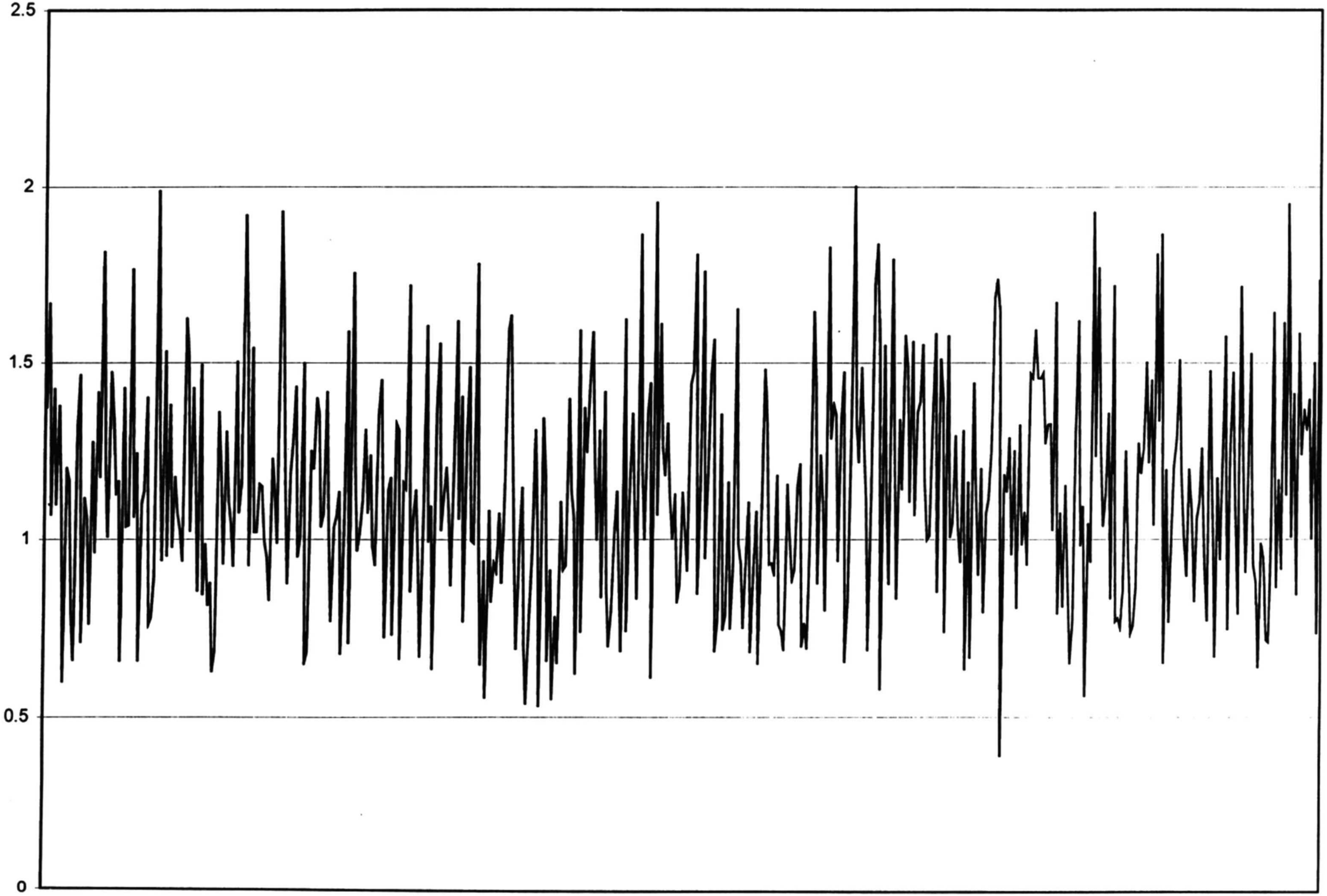
```
> od:
> close('graf');
```

r	Real	B-S
0	1.1513966	2.03033441
0.0002	1.21000175	2.08927826
0.0004	1.27050427	2.1494778
0.0006	1.33291687	2.21094516
0.0008	1.39725081	2.27369202
0.001	1.46351574	2.33772976
0.0012	1.53171999	2.40306946
0.0014	1.60187033	2.4697219
0.0016	1.67397212	2.53769733
0.0018	1.7480293	2.60700585
0.002	1.82404439	2.67765701
0.0022	1.90201847	2.74966007
0.0024	1.98195138	2.82302387
0.0026	2.0638415	2.89775683
0.0028	2.14768595	2.97386695
0.003	2.23348057	3.05136183
0.0032	2.32121993	3.13024862
0.0034	2.41089745	3.210534
0.0036	2.50250528	3.29222428
0.0038	2.59603448	3.37532524
0.004	2.69147496	3.45984219
0.0042	2.78881564	3.54578004
0.0044	2.88804427	3.63314316
0.0046	2.98914773	3.72193542
0.0048	3.09211191	3.81216029
0.005	3.1969217	3.90382064
0.0052	3.30356124	3.9969189
0.0054	3.41201377	4.09145704
0.0056	3.5222617	4.18743641
0.0058	3.63428671	4.28485791
0.006	3.74806978	4.38372196
0.0062	3.8635912	4.4840284
0.0064	3.98083056	4.58577658
0.0066	4.09976697	4.68896537
0.0068	4.22037888	4.79359304
0.007	4.34264417	4.89965738
0.0072	4.4665404	5.00715571
0.0074	4.5920445	5.11608478
0.0076	4.71913302	5.22644079
0.0078	4.84778219	5.33821945
0.008	4.97796786	5.45141601
0.0082	5.10966552	5.56602514
0.0084	5.24285045	5.68204099
0.0086	5.37749757	5.79945729
0.0088	5.51358164	5.91826718
0.009	5.65107733	6.03846335
0.0092	5.78995882	6.16003798
0.0094	5.93020058	6.28298276
0.0096	6.07177661	6.40728889
0.0098	6.21466104	6.53294716
0.01	6.35882779	6.65994781
0.0102	6.50425085	6.78828063
0.0104	6.65090418	6.91793503
0.0106	6.79876162	7.04889985
0.0108	6.94779728	7.18116364
0.011	7.09798508	7.31471439

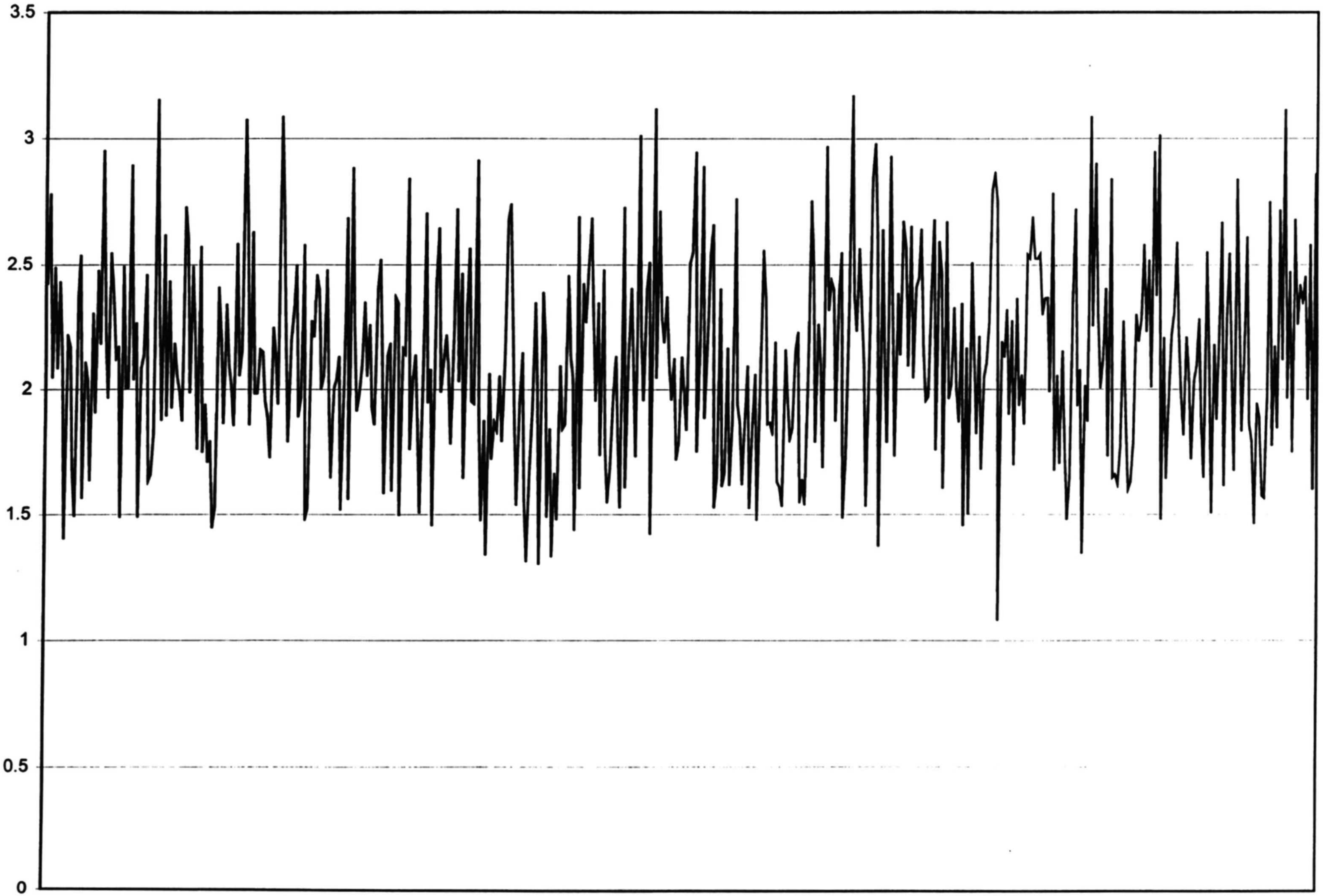


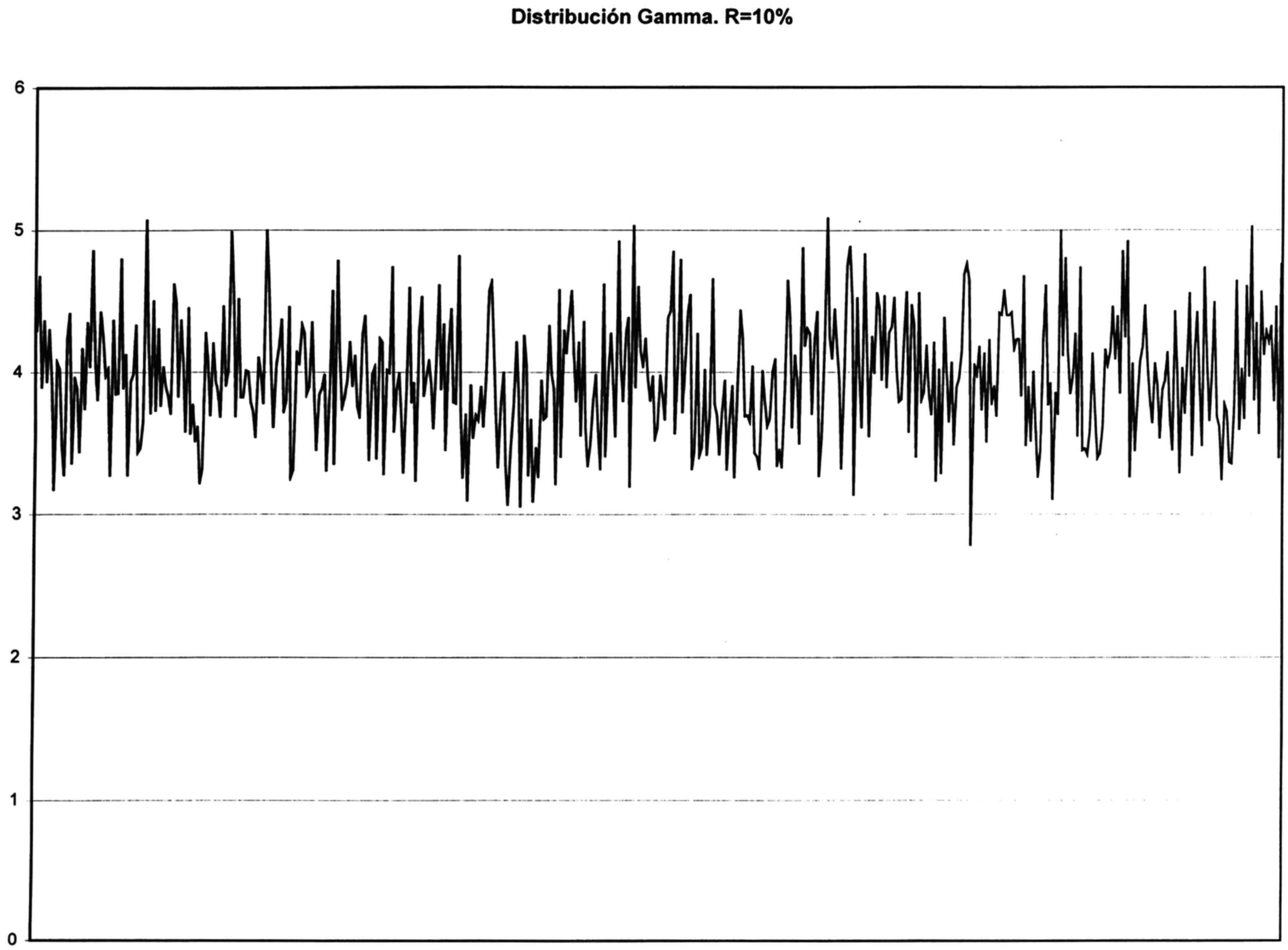
0.0112	7.24929913	7.44953973
0.0114	7.40171356	7.5856269
0.0116	7.55520276	7.72296267
0.0118	7.70974095	7.86153351
0.012	7.86530271	8.0013254
0.0122	8.02186274	8.14232408
0.0124	8.17939591	8.28451482
0.0126	8.33787713	8.42788259
0.0128	8.49728162	8.57241201
0.013	8.65758489	8.7180874
0.0132	8.81876235	8.86489273
0.0134	8.98078999	9.0128117
0.0136	9.14364374	9.16182774
0.0138	9.3073	9.31192391
0.014	9.47173528	9.46308314
0.0142	9.63692641	9.61528799
0.0144	9.8028504	9.76852085
0.0146	9.96948468	9.92276388
0.0148	10.1368068	10.077999
0.015	10.3047945	10.234208
0.0152	10.4734262	10.3913723
0.0154	10.6426802	10.5494735
0.0156	10.8125353	10.7084926
0.0158	10.9829705	10.8684108
0.016	11.1539653	11.0292089
0.0162	11.3254992	11.190868
0.0164	11.4975521	11.3533685
0.0166	11.6701045	11.5166913
0.0168	11.8431368	11.6808167
0.017	12.0166297	11.8457253
0.0172	12.1905647	12.0113976
0.0174	12.3649231	12.1778138
0.0176	12.5396868	12.3449543
0.0178	12.7148378	12.5127995
0.018	12.8903585	12.6813296
0.0182	13.0662317	12.8505251
0.0184	13.2424403	13.0203662
0.0186	13.4189678	13.1908334
0.0188	13.5957977	13.361907
0.019	13.7729139	13.5335675
0.0192	13.9503006	13.7057955
0.0194	14.1279425	13.8785716
0.0196	14.3058244	14.0518764
0.0198	14.4839311	14.2256908
0.02	14.6622484	14.3999956

Distribución Gamma. R=1%

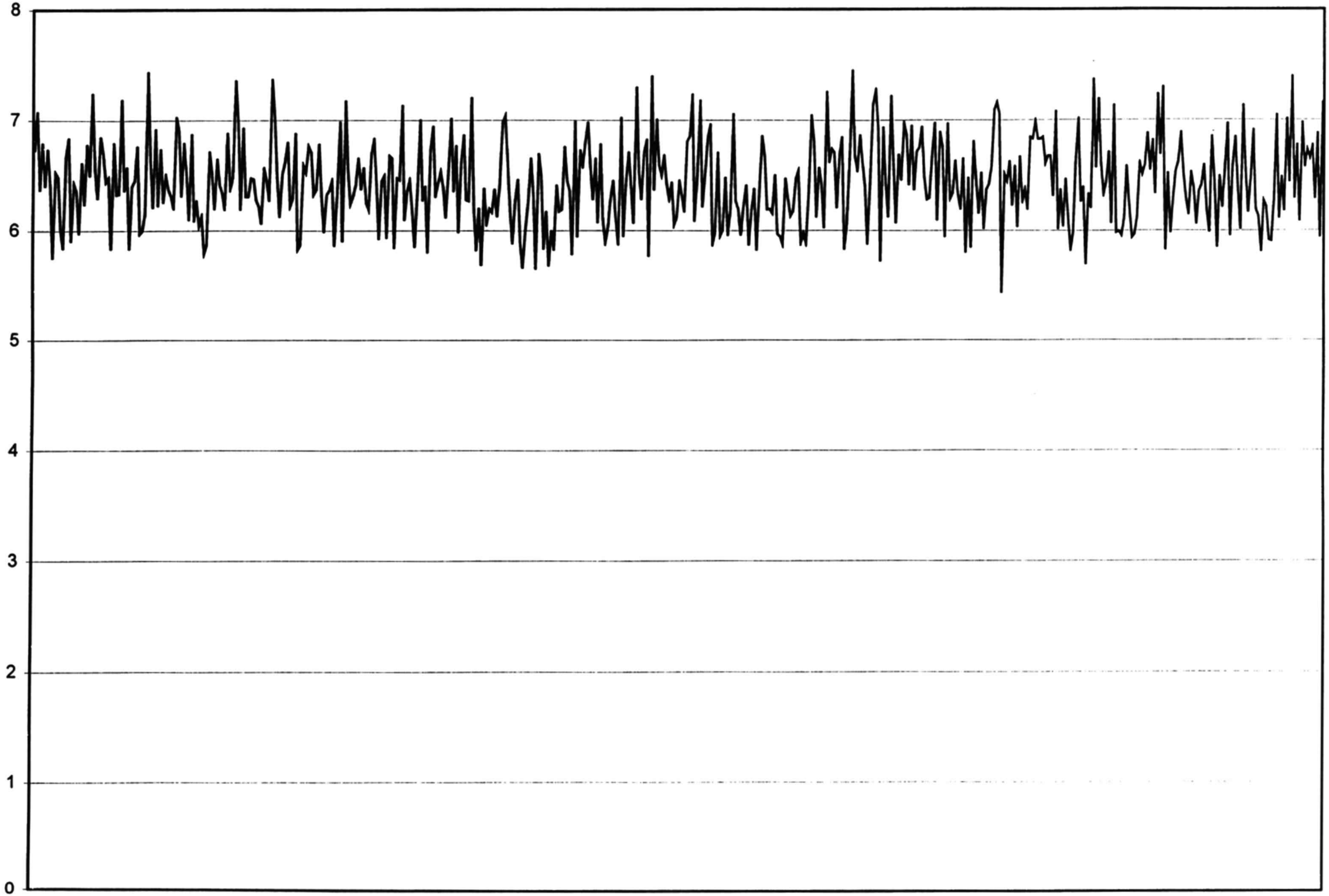


Distribución Gamma. R= 5%

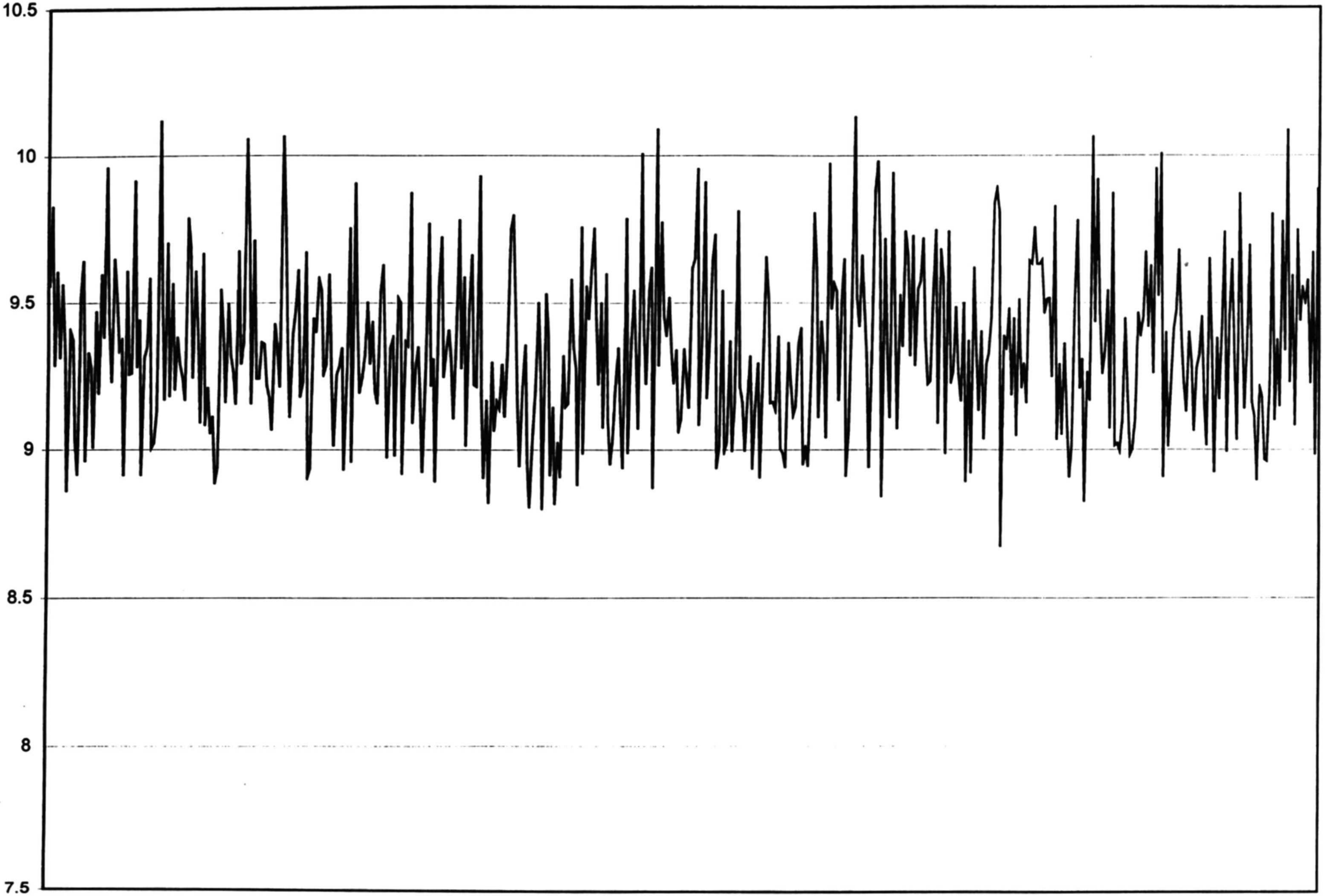



Distribución Gamma. R=10%
6
5
4
3
2
1
0

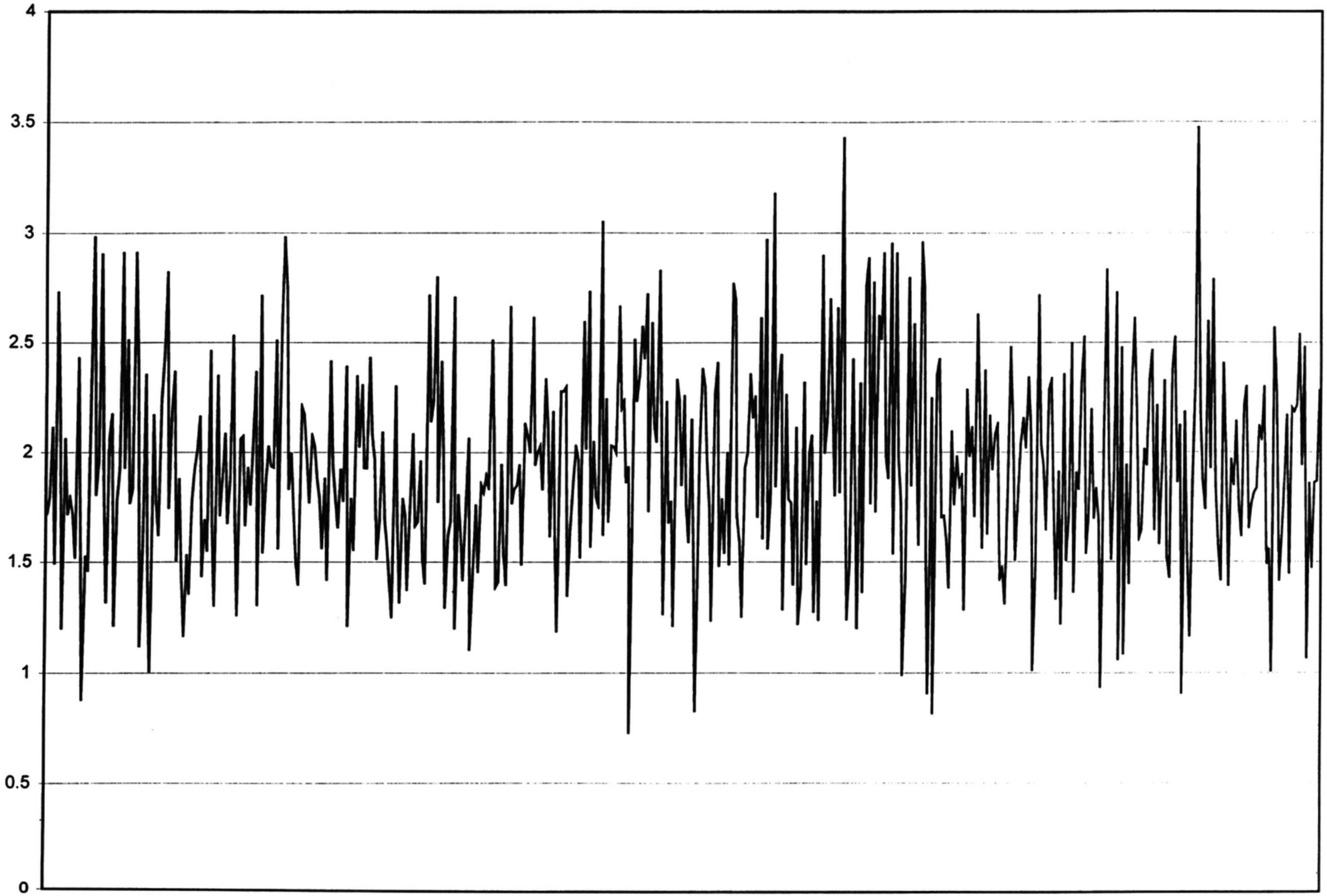
Distribución Gamma. R=15%



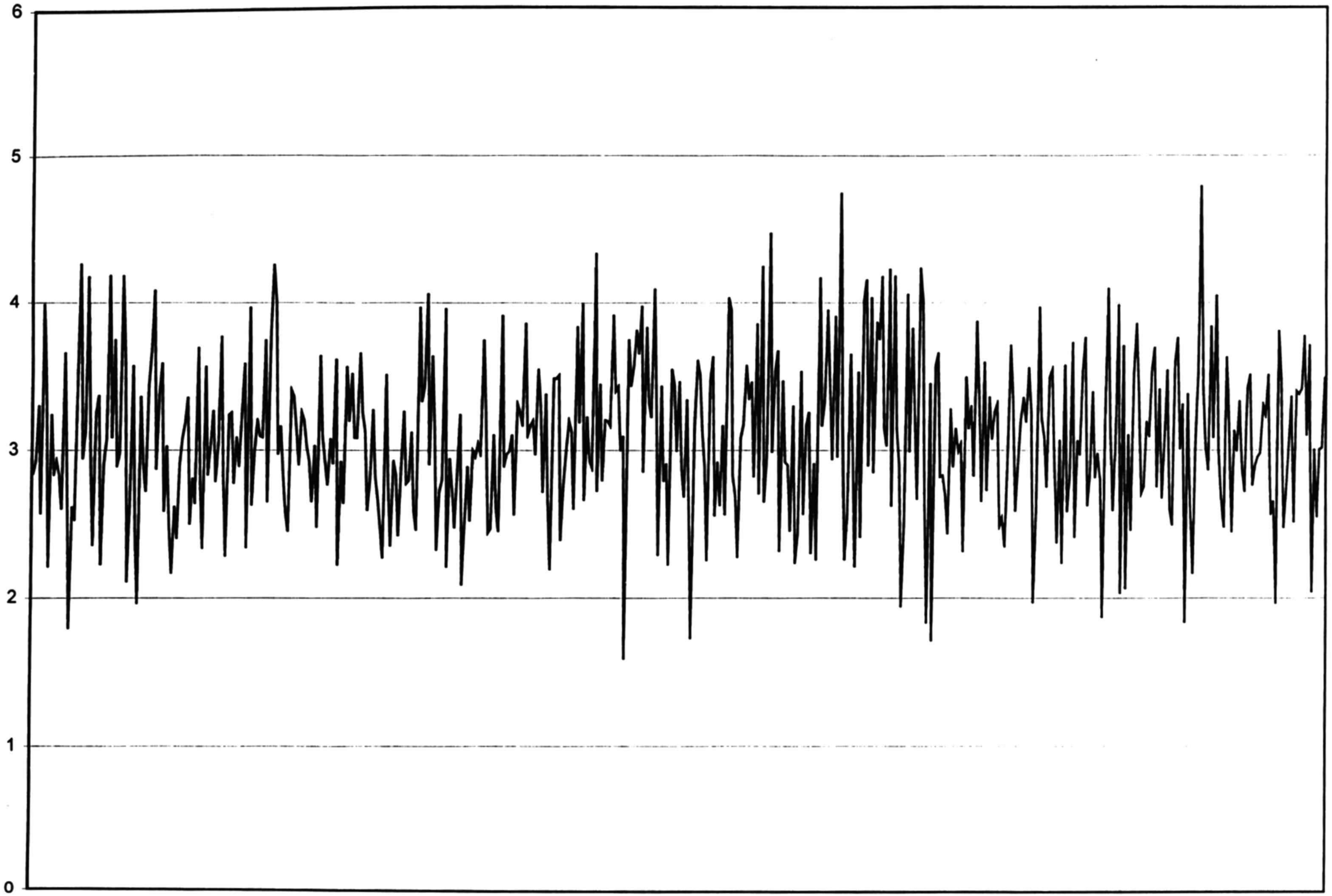
Distribución Gamma. R=20%



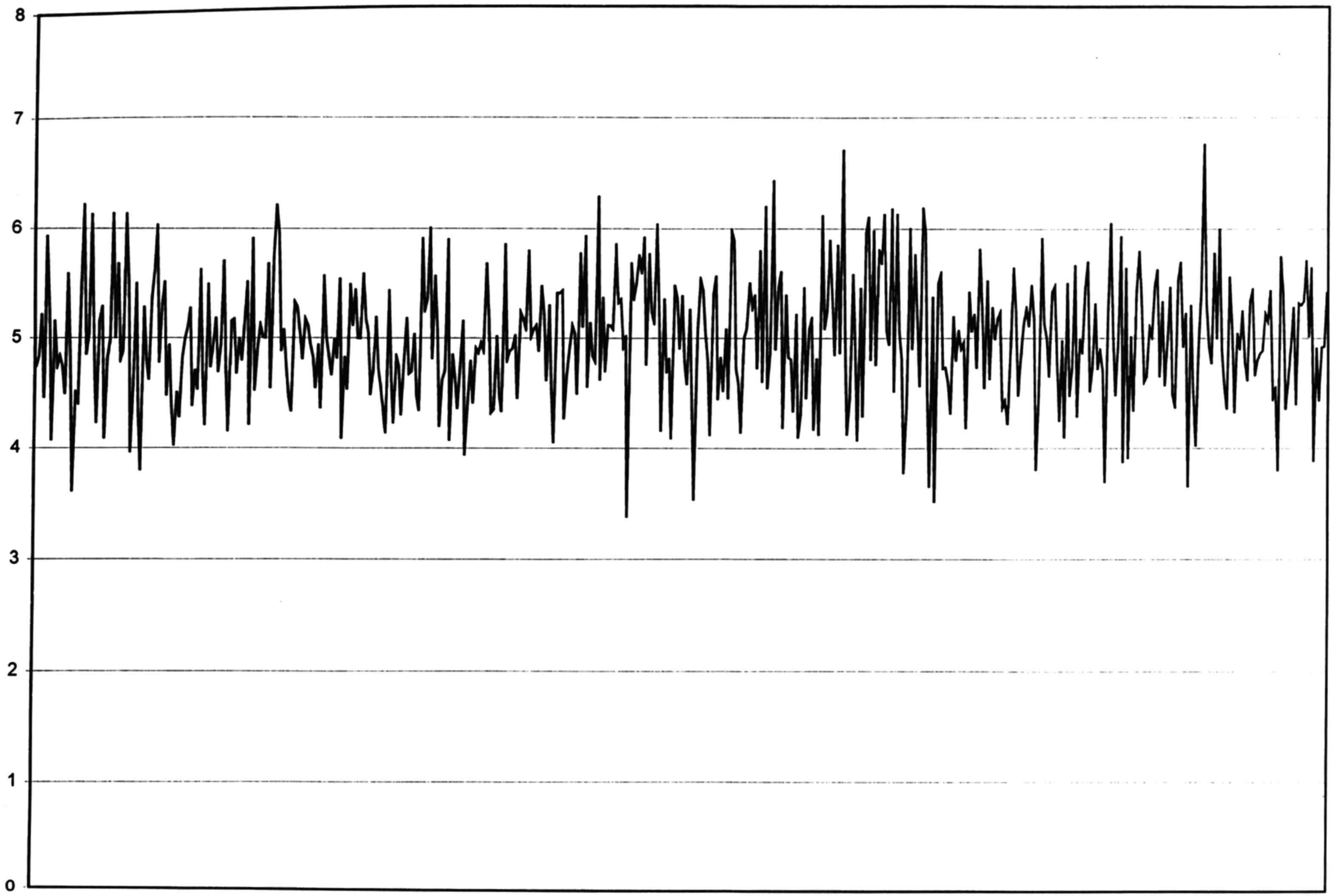
Distribución normal. R=1%



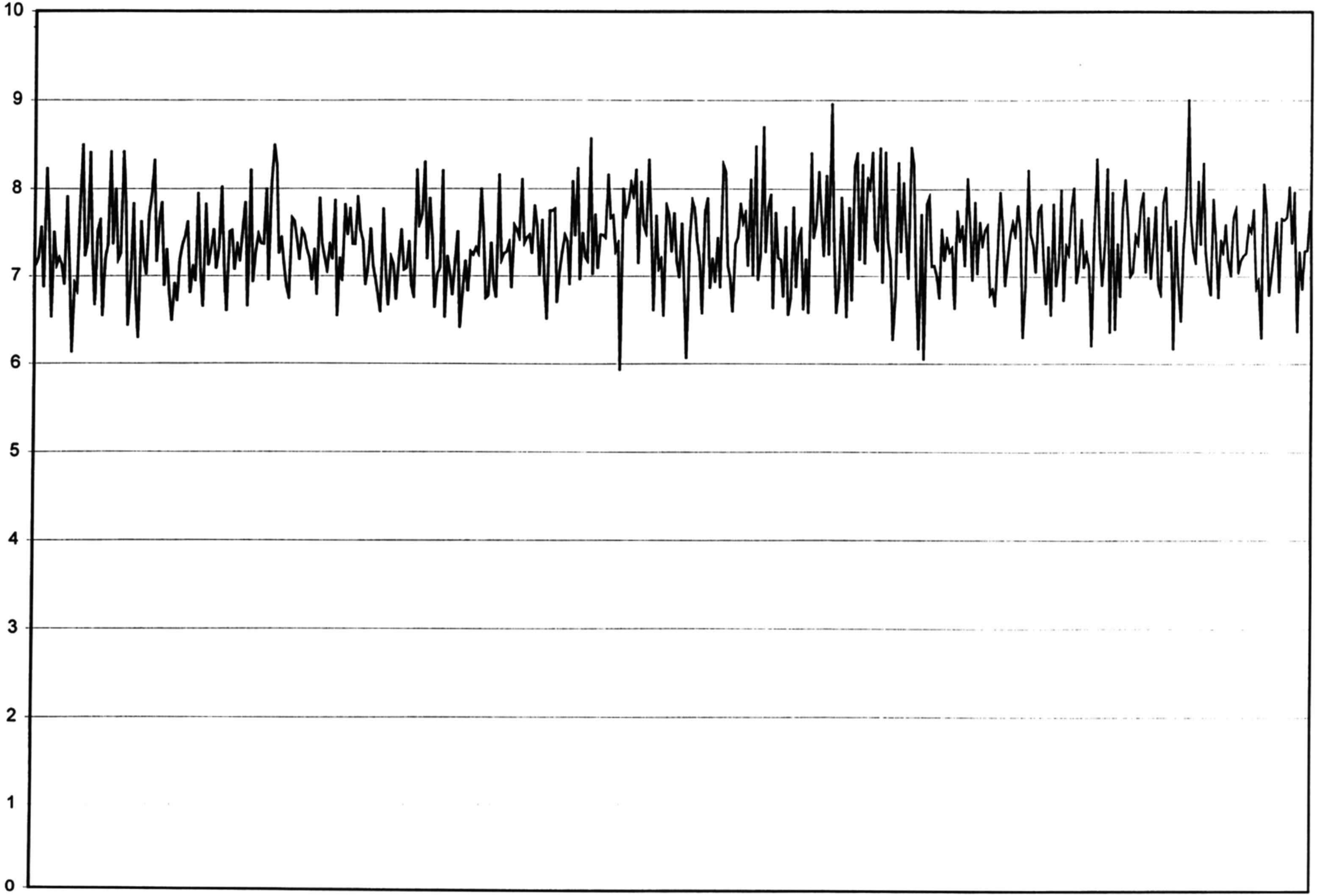
Distribución normal. R=5%

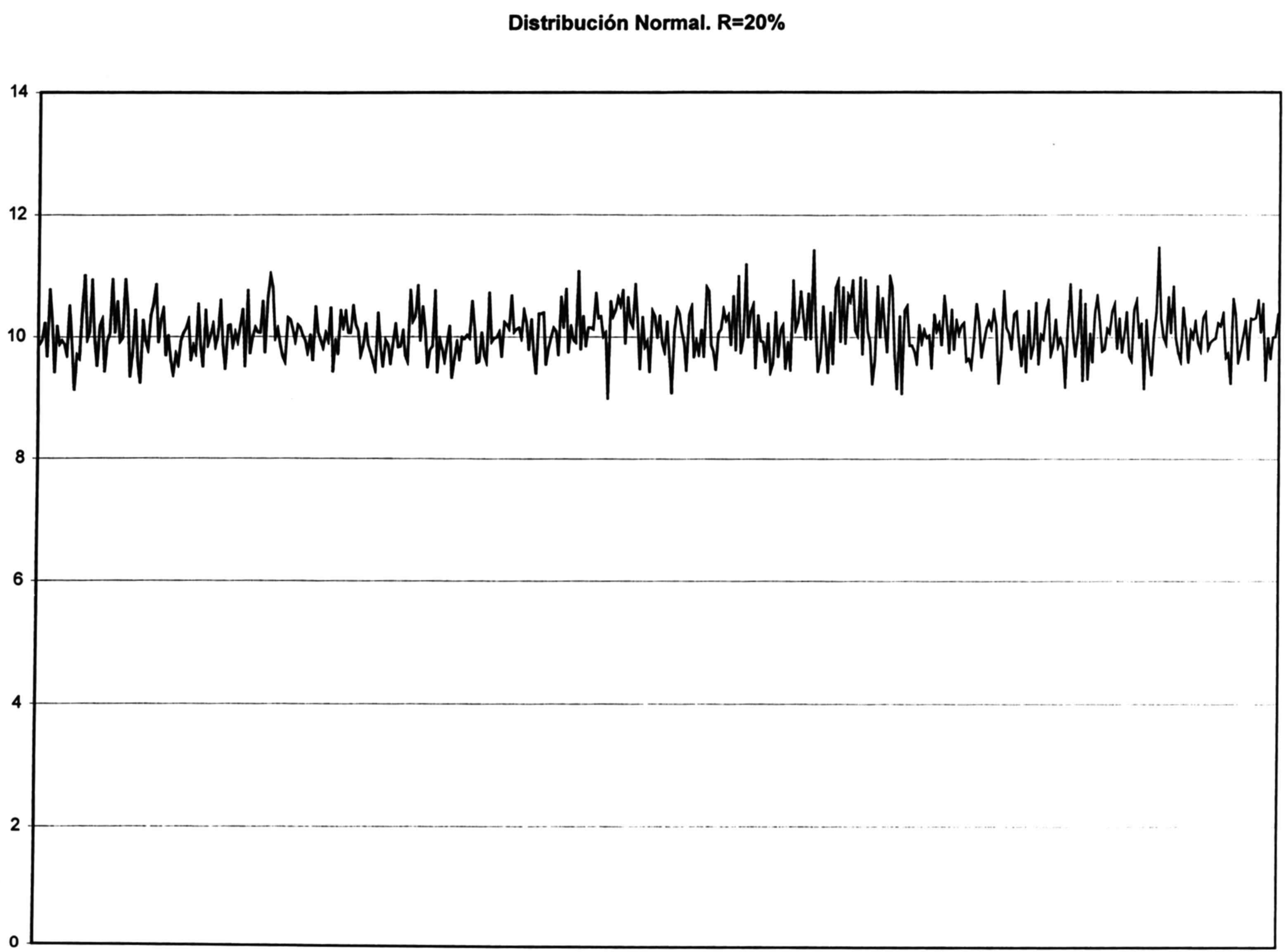


Distribución Normal. R=10%

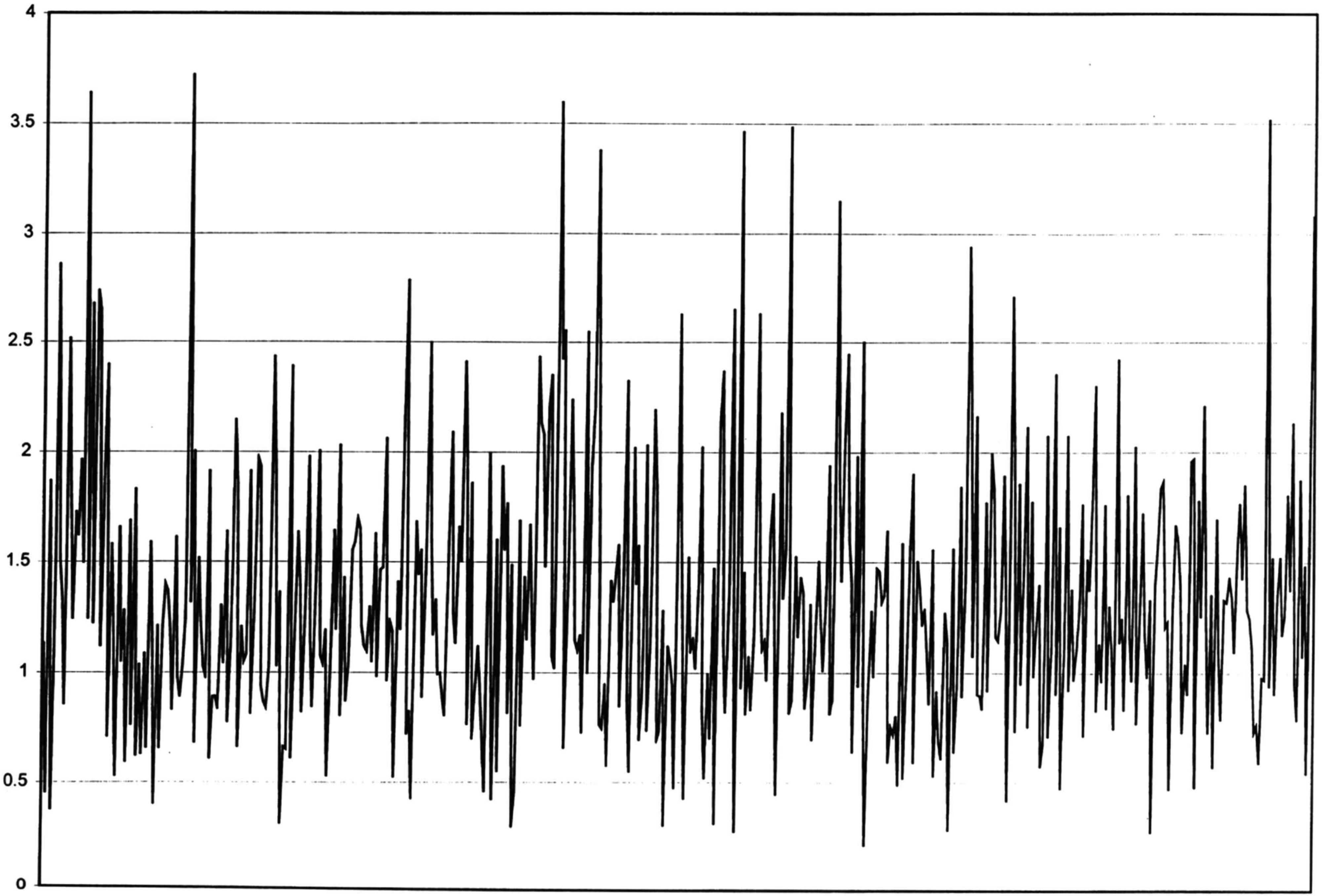


Distribución normal. R=15%

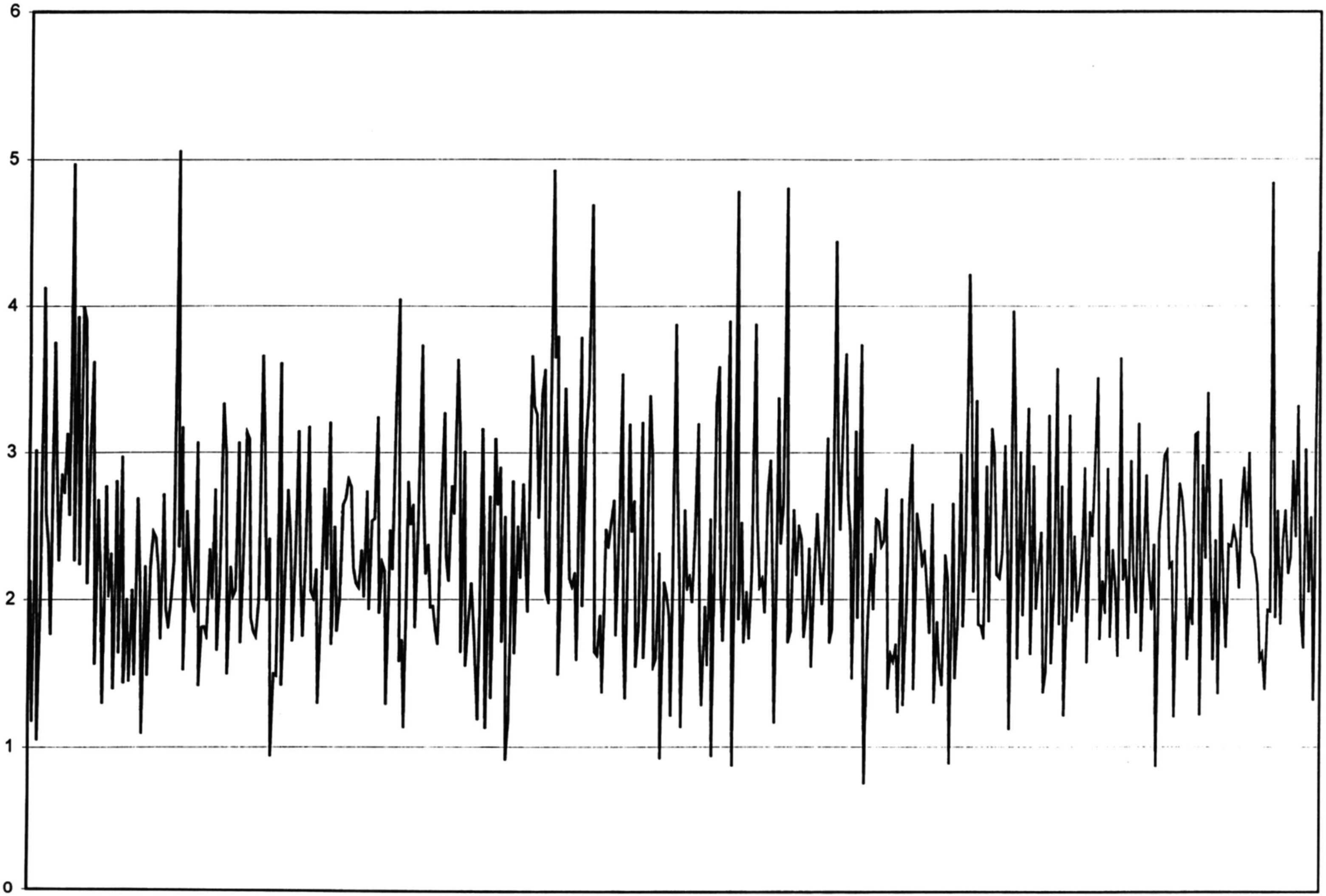


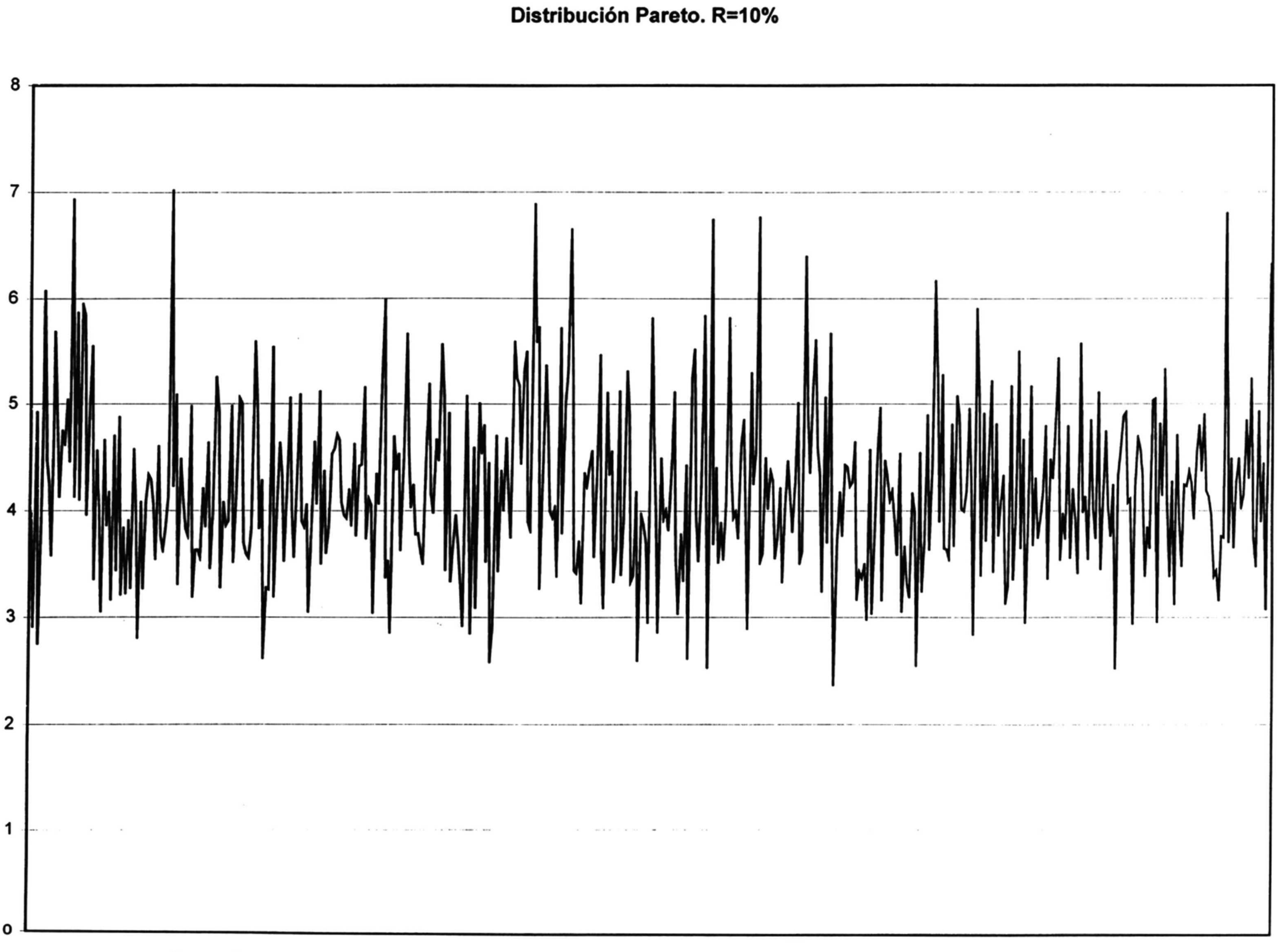

Distribución Normal. R=20%
14
12
10
8
6
4
2
0

Distribución de Pareto. R= 1%

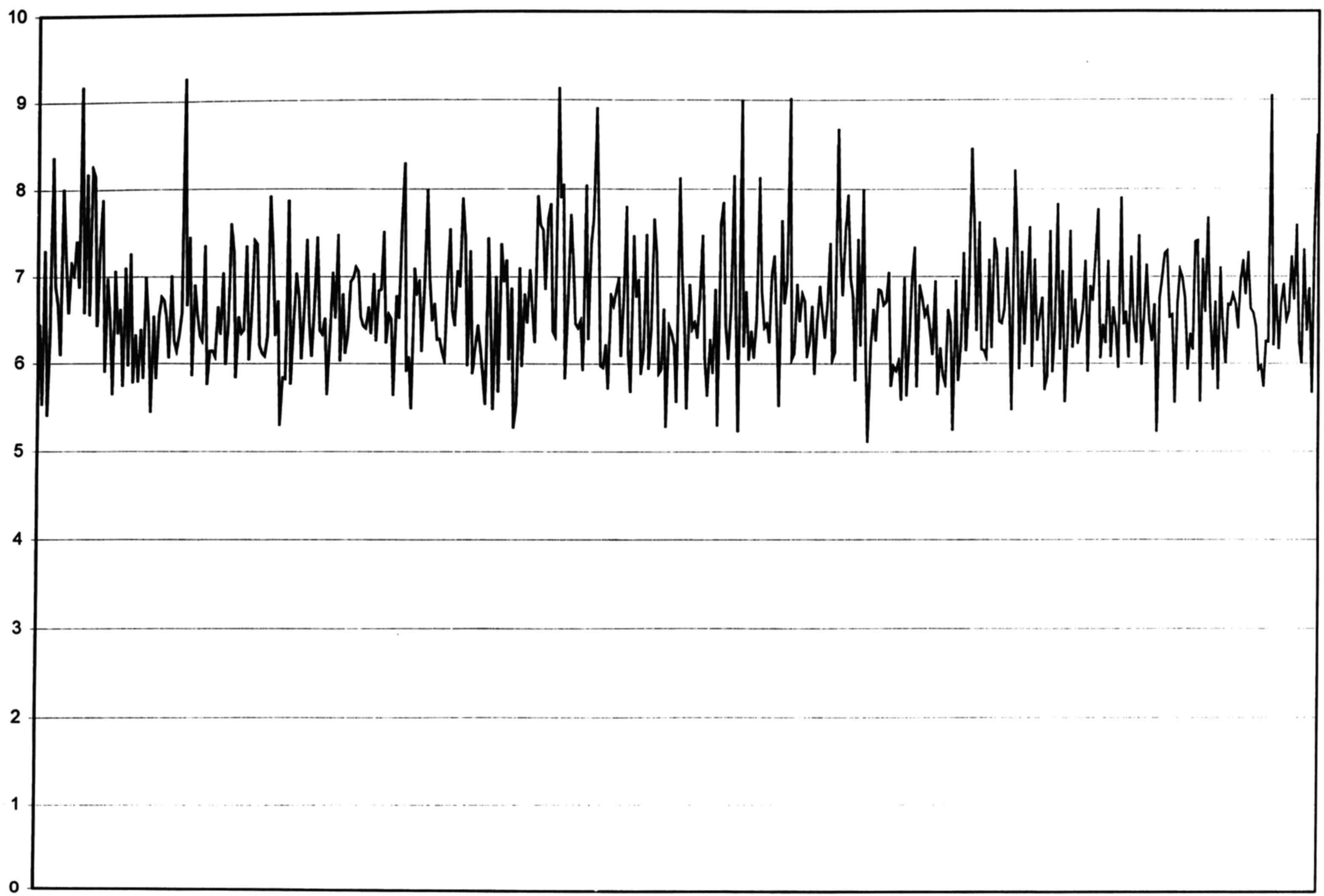


Distribución Pareto. R=5%

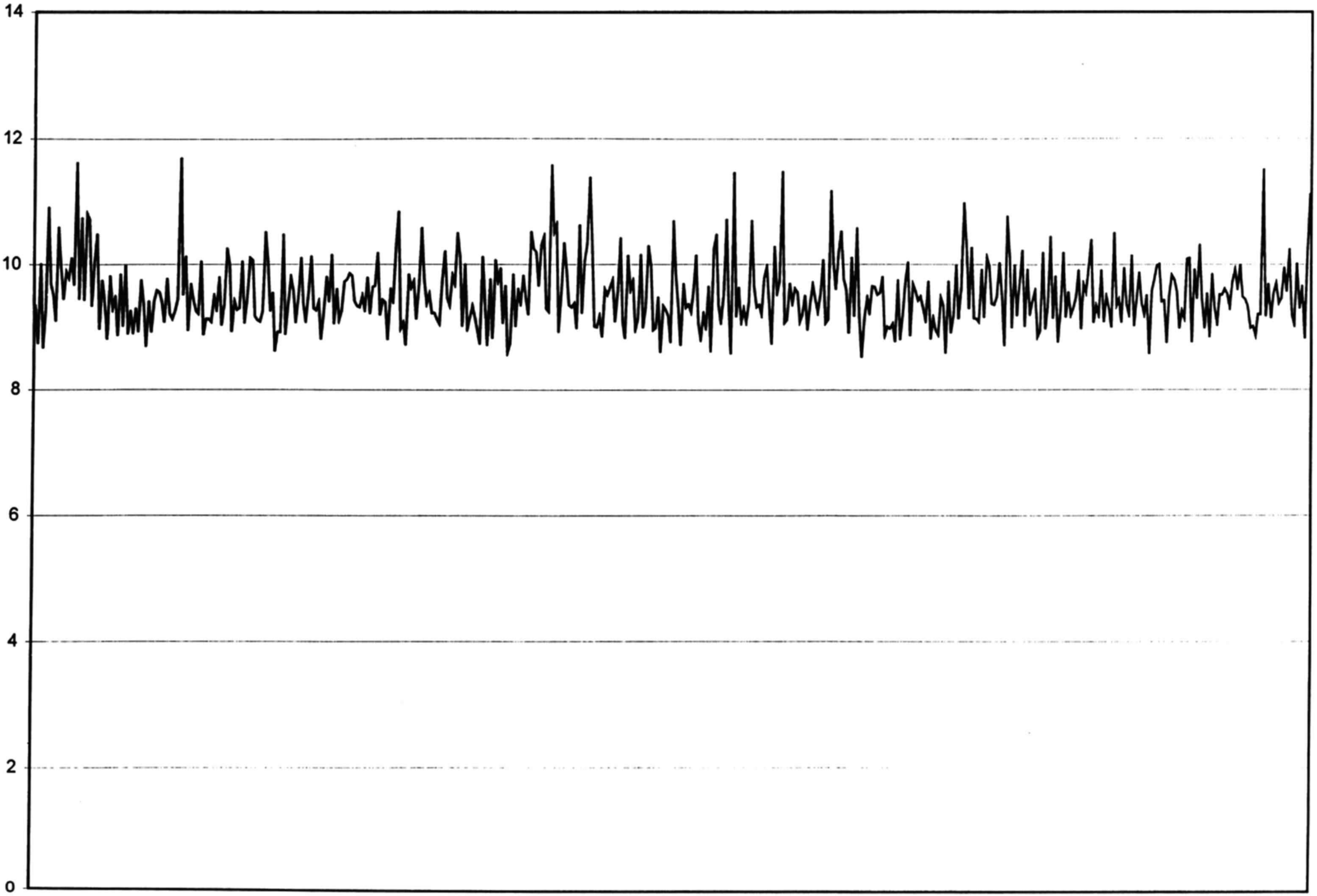



Distribución Pareto. R=10%
8
7
6
5
4
3
2
1
0

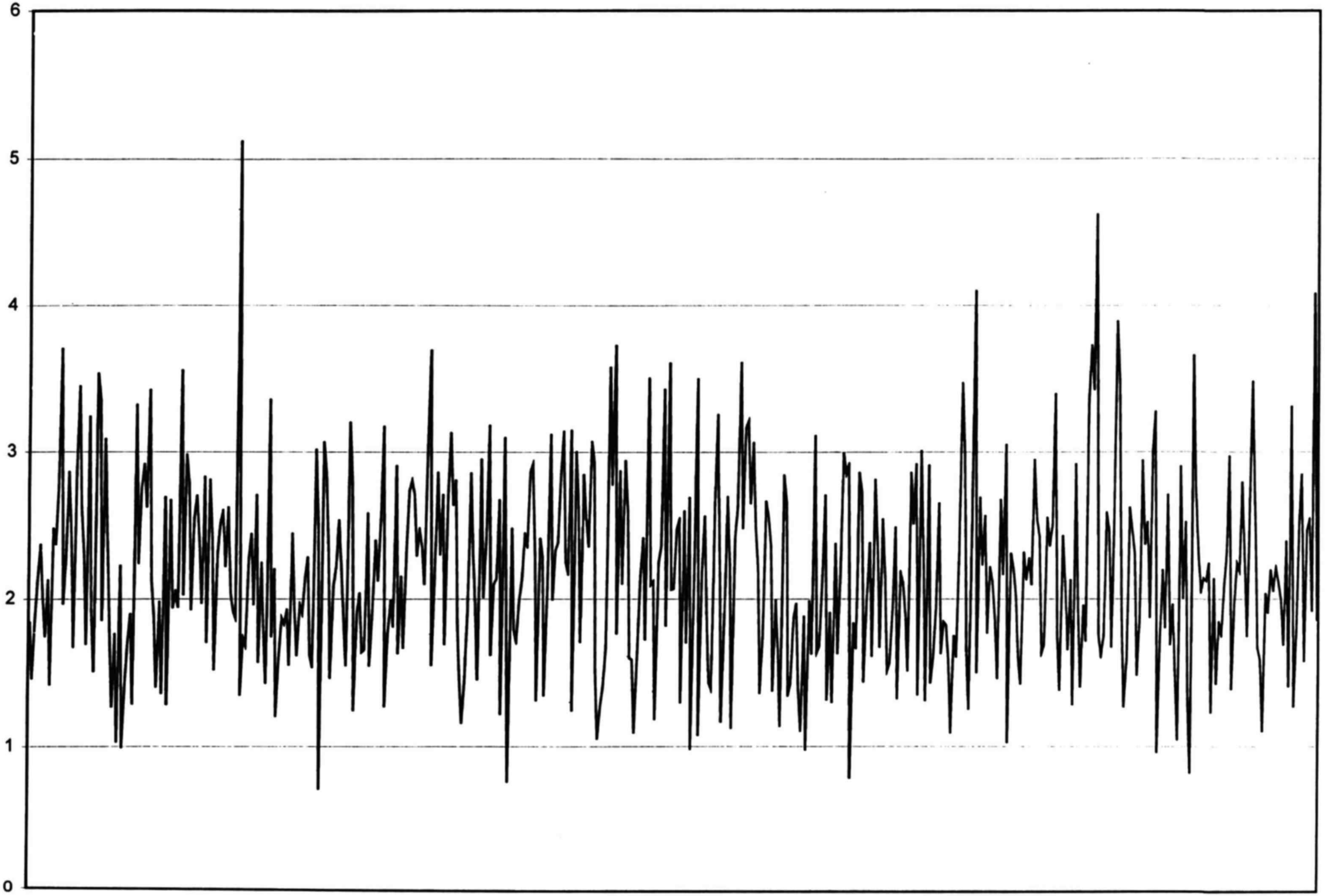
Distribución Pareto. R=15%



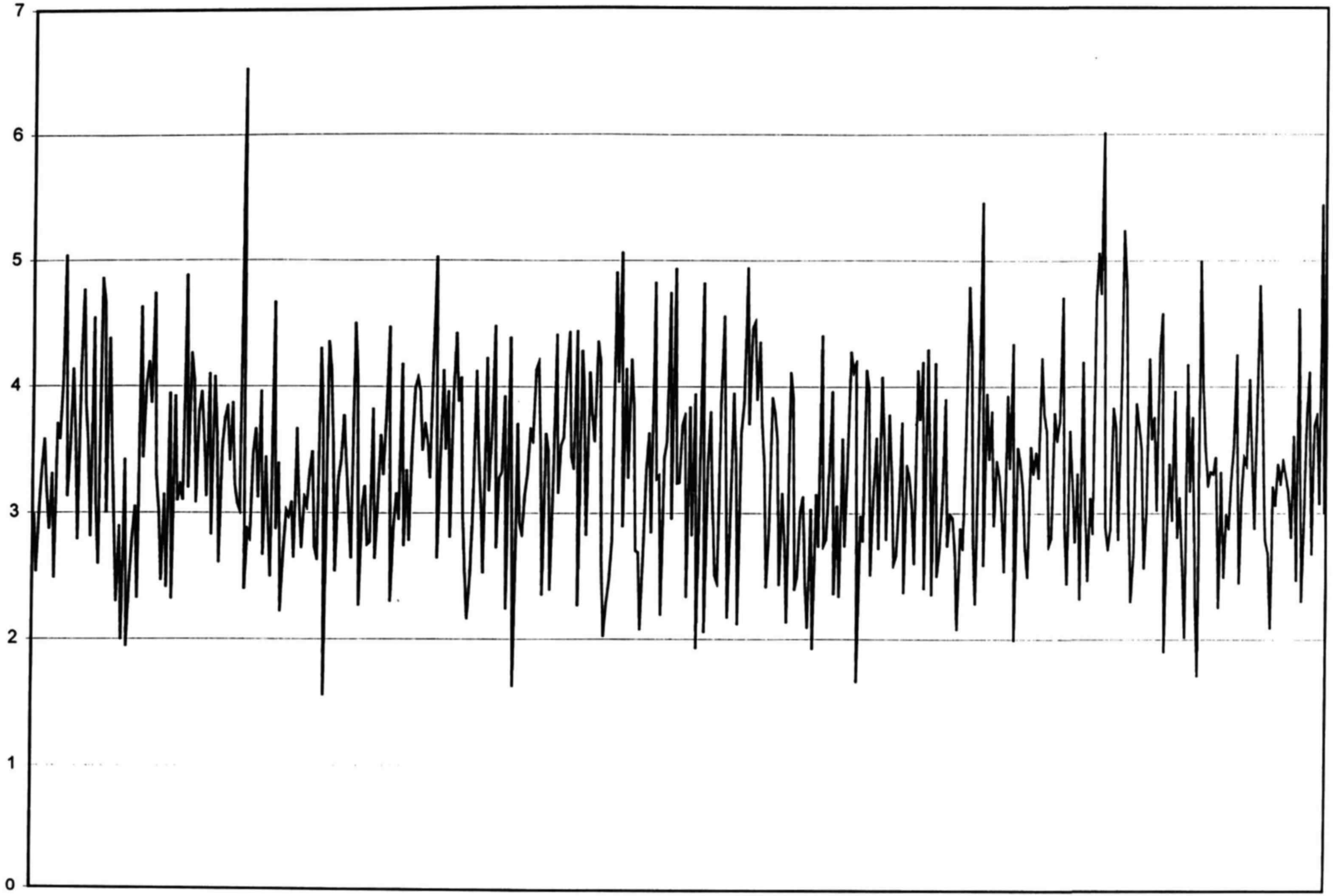
Distribución Pareto. R=20%



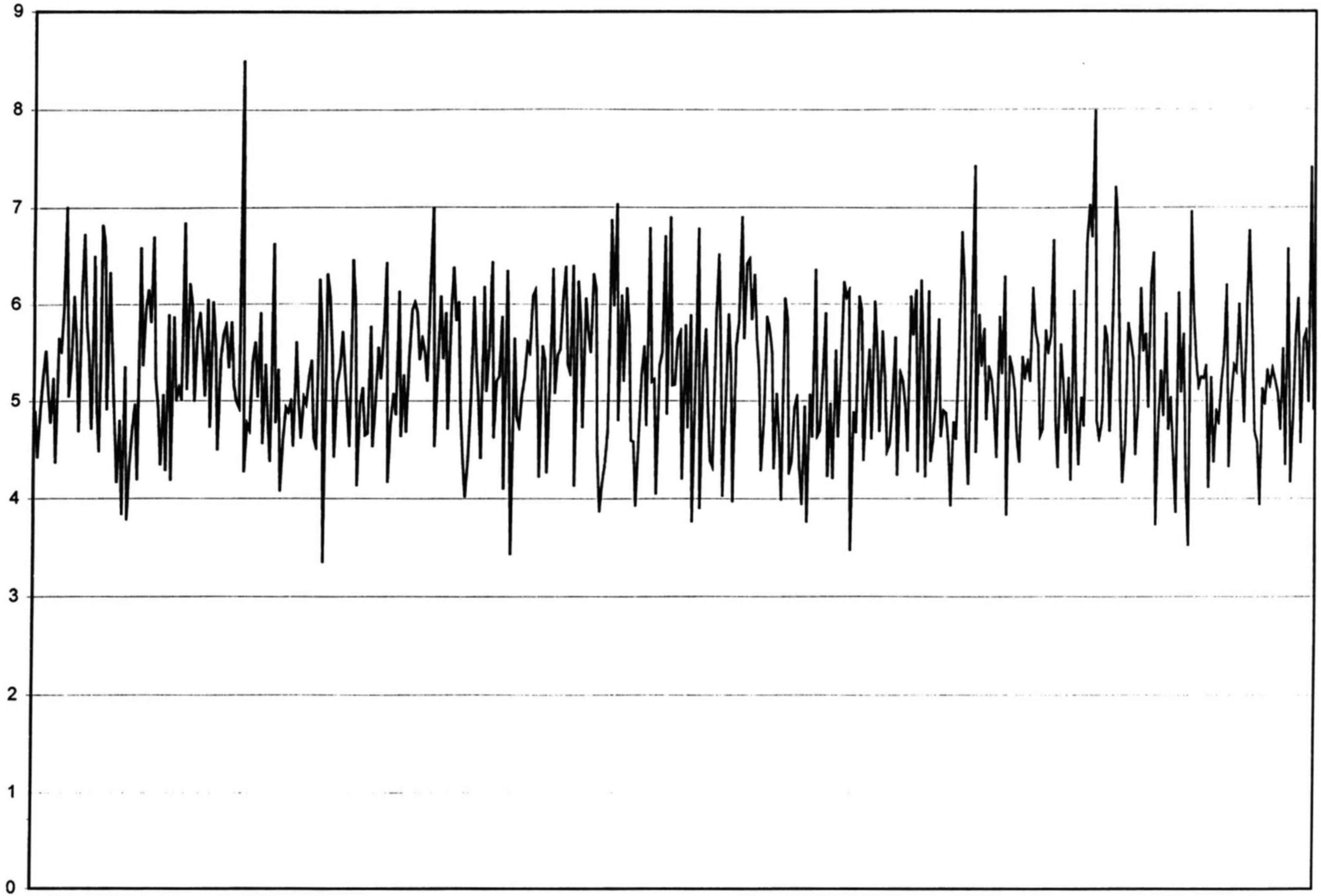
Distribución Weibull. R=1%



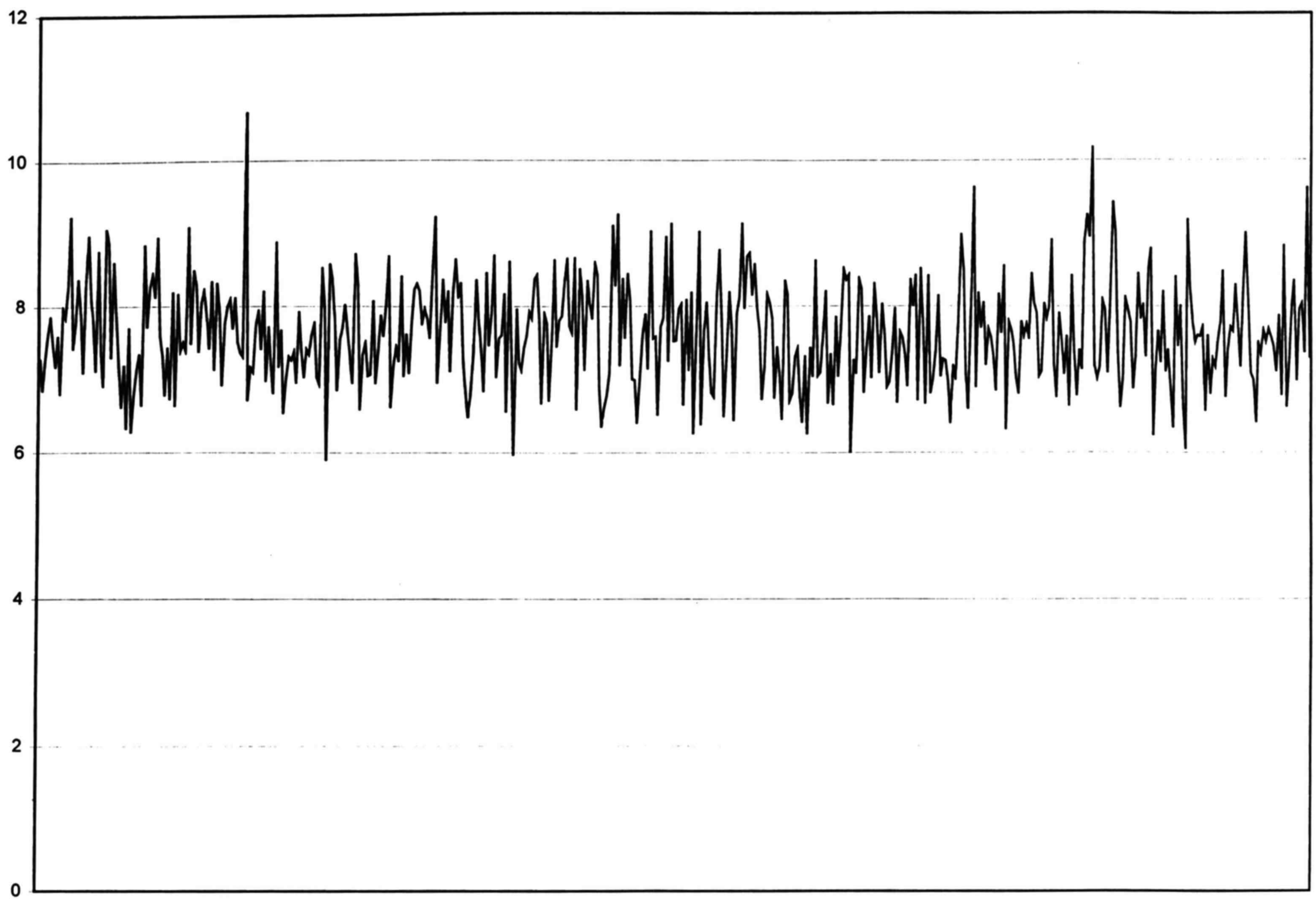
Distribución Weibull. R=5%



Distribución Weibull. R=10%



Distribución Weibull. R=15%



Distribución Weibull. R=20%