TRABAJO DE INVESTIGACION PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN ECONOMIA

CENTRO DE ESTUDIOS ECONOMICOS

EL COLEGIO DE MEXICO

SOBRE EL NUMERO DE FACTORES NECESARIO EN UN MODELO APT PARA VALUAR ACTIVOS EN EL SECTOR FINANCIERO MEXICANO

Raúl Juárez Sánchez

Promoción 1995-1997

1999

ASESOR: Prof. Eneas Caldiño García

Agradecimientos

El presente trabajo no habría sido posible sin la oportuna colaboración del Profesor Eneas Caldiño, quien en cierta medida me permitió conocer una rama de la Economía con una riqueza inagotable: Economía Financiera.

Indice

RESUMEN

La teoría de precios de arbitraje (APT) de Ross (1976) ha generado un interés creciente en la aplicación de modelos de factores lineales en el estudio de los precios de los activos. Como Connor y Korajczyck (1993) mencionan, el APT tiene el atractivo de exigir un número mínimo de hipótesis acerca de la naturaleza de la economía – una estructura de factores para los rendimientos, la ausencia de oportunidades de arbitraje en los mercados financieros, y un intercambio sin fricciones- que contrastan con los requerimientos de otros modelos famosos de valuación de activos como el CAPM que hacen suposiciones fuertes sobre la estructura de los rendimientos y/o sobre las preferencias de los individuos, como en Sharpe (1964) y Lintner (1965).

En la aplicación de dichos modelos multifactoriales es importante conocer el número "apropiado" de factores. Esta cuestión ha sido analizada por Connor y Korajczyck (1993), los cuales proponen una prueba para el número de factores; en un modelo más general, Trzcinka (1986) retoma la discusión de Chamberlain y Rotschild (1983a) acerca del comportamiento asintótico de los valores propios en relación con los factores en un APT. En el presente trabajo se revisa la literatura concerniente al número de factores en un APT, estableciendo previamente las definiciones e interpretaciones relevantes y se concluye estimando un APT y probando la hipótesis de que el número relevante de factores es uno determinado. Para ello se utilizan datos de rendimientos diarios de empresas que cotizaron en la Bolsa Mexicana de Valores durante el período comprendido entre marzo de 1992 y julio de 1997.

Introducción

La teoría de precios de arbitraje (APT) fue introducida por Ross (1976) como una alternativa al CAPM. El APT puede ser más general que el CAPM, ya que permite factores de riesgo múltiples, por otra parte, el APT no requiere la identificación del portafolio de mercado; sin embargo, dicha generalidad tiene sus costos implícitos, ya que esta relación es aproximada en su forma general, requiriendo condiciones fuertes para el cumplimiento exacto de la relación. Sin embargo, es necesario contar con bases teóricas consistentes que nos permitan determinar el número de factores, así como la identificación de los mismos.

Diversos métodos han sido sugeridos para tal motivo, entre los cuales podemos señalar a la técnica de componentes principales asintóticas, introducida primero por Connor y Korajczik (1988), quienes determinaron una técnica con bases económicas y estadísticas sólidas para identificar los factores de riesgo presentes en la economía. Sin embargo, la cuestión sobre el número de factores a ser utilizado permaneció abierta, y no es sino hasta Connor y Korajzcik (1993) cuando se introduce una estadística de prueba para el número de factores necesario para ponerle precio a cualquier activo dentro de la economía. Este resultado toma relevancia en un ambiente de elección bajo incertidumbre; los resultados obtenidos en Connor y Korajczik (1993) son robustos bajo modificaciones severas en el entorno económico, esto es, los factores persistentes de riesgo permanecen durante largos períodos de tiempo, cambiando únicamente los rendimientos asociados con cada uno de ellos.

I La teoría de precios de arbitraje.

1.1 Especificación del APT.

En este capítulo describiremos el modelo de precios de arbitraje (APT). La discusión original puede encontrarse en Ross (1976), Huberman (1982), así como en Chamberlain y Rotschild (1983a) y (1983b) que detallan con cuidado y profundidad la estructura del APT. La discusión siguiente está basada en mayor medida en dichos trabajos. Sea **R** el vector de rendimientos (infinito pero numerable) de un conjunto infinito de activos comerciados. Suponemos que los rendimientos siguen un modelo de factores aproximado

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{E}(\mathbf{R}_t) + \mathbf{B}\mathbf{f}_t + \varepsilon_t$$

$$\mathbf{E}(\varepsilon_t \mid \mathbf{f}_t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{f}_t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \mathbf{V} \qquad \textbf{(1)}$$

Donde $\mathbf{f}_t$ es un k-vector de factores económicos persistentes, **B** es una matriz ∞ x k de sensibilidades de los activos a los factores y ε_t es el vector de rendimientos idiosincráticos, esto es, rendimientos que están relacionados únicamente con el comportamiento de los activos y no con el de los factores. Por otra parte, la matriz **V** satisface ciertas propiedades sobre el comportamiento de los valores propios, condiciones que serán analizadas más adelante y que constituyen la base de las pruebas para el número de factores en está estructura.

El propósito de la presente tesina es discutir una prueba propuesta por Connor y Korajczyck (1993) para el número de factores en un modelo de factores y por ello es pertinente definir términos adicionales a los arriba expuestos. La prueba propuesta por Connor y Korajczyck (1993) es válida en un modelo de factores aproximado y contrasta con las pruebas propuestas anteriormente: Dhrymes, Friend y Gultekin (1984), Trzcinka (1986) y Brown (1989), las cuales suponían una estructura de factores estricta, es decir, una estructura en la cual las componentes idiosincráticas o diversificables de los rendimientos de los activos tienen correlación cero entre activos y que var $(\varepsilon_t) < \sigma^2$.

Siguiendo a Chamberlain y Rotschild (1983b), diremos que existe una estructura de k-factores estricta si Σ_N puede ser descompuesto como

$$\Sigma_N = \mathbf{B_N}\,\mathbf{B_N}' + \mathbf{V_N} \qquad \textbf{(2)}$$

donde $\mathbf{B_N}$ es una matriz de orden (Nxk) cuyo elemento (i,j) es $\beta_{i,j}$ y $\mathbf{V_N}$ es una matriz diagonal con elementos uniformemente acotados y Σ_N es la matriz de covarianza de los rendimientos de los activos.

. A diferencia de **(1)** que supone un número infinito de activos comerciados, aquí se supone un número finito N de activos comerciados. Ross (1976) demostró que una estructura de k-factores estricta y una condición de no arbitraje implican la existencia de números ψ, $\tau_1, \ldots,$ τ_k tales que

$$\Sigma_{i=1,\ldots,\infty} (\mu_i - \psi - \tau_1\beta_{i1} - \ldots - \tau_k\beta_{ik})^2 < \infty \qquad \textbf{(3)}$$

Su demostración es muy similar a la de Huberman (1982); en la demostración hecha por Ross (1976) donde μ_i es el rendimiento esperado del activo i.

Diremos que Σ_N tiene una estructura de k-factores aproximada si existe una sucesión $\{\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{ik}\}_{i=1,\ldots,\infty}$ tal que para toda **N**

$$\Sigma_N = \mathbf{B_N}\,\mathbf{B_N}' + \mathbf{V_N} \qquad \textbf{(4)}$$

donde el (i,j) elemento de la matriz **N x k**, $\mathbf{B_N}$ es β_{i1} y $\{ \mathbf{V_N} \}$ es una sucesión de matrices con valores propios uniformemente acotados. La intuición en una estructura de factores aproximada es la siguiente: la estructura estocástica de los rendimientos de los activos está determinada por un número pequeño (k) de objetos o variables; todo lo demás es irrelevante y puede ignorarse - Chamberlain y Rotschild (1983a). Estos autores, junto con Ingersoll (1984) muestran que la diagonalidad de $\mathbf{V_N}$ no es necesaria para la demostración del APT. De hecho Ingersoll (1984) obtiene resultados muy interesantes con respecto a las cotas en la desigualdad **(3)**.

El supuesto manejado por Ingersoll (1984) y Chamberlain y Rotschild (1983a) es que

$$\mathbf{lim}_{N\to\infty}\ \mathbf{(1/N)(\ B_N\ B_N')} = \Phi\ ;\ \ \Phi \text{ no singular} \qquad \textbf{(5)}$$

$$\mathbf{lim}_{N\to\infty}\ ||\mathbf{V_N}|| \leq \gamma < \infty \qquad \textbf{(6)}$$

donde $||\bullet||$ es la norma-2 de una matriz[1]. Así pues, sólo requieren que $\mathbf{V_N}$ tenga valores propios acotados cuando N crece.

Según Connor y Korajczyck (1993), así como Brown (1989), es más atractivo utilizar un modelo de k-factores aproximado, ya que intuitivamente, cuando N crece, la proporción de la variación total explicada por cualquier fuente no persistente de riesgo debe aproximarse a cero. Suponer una estructura de factores estricta puede obligar a tratar la incertidumbre específica a un sector industrial como un factor persistente.

Chamberlain y Rotschild (1983a) demuestran que un mercado tiene una estructura de factores aproximada si y solo si k-valores propios de Σ_N crecen sin cota y todos los demás valores propios permanecen acotados cuando $N\to\infty$. Este resultado es el centro de las pruebas para el número de factores propuestas por Trzcinka (1986). Por otra parte, Brown (1989) discute las dificultades que propone el análisis de los valores propios cuando el número de activos crece sin límite.

Además de las suposiciones hechas en **(1)**, supondremos, siguiendo a Connor y Korajczyck (1988) que

$$||\mathbf{(1/N)(\ B_N'\ B_N)^{-1}}|| \leq \mathbf{c_1} < \infty \quad \text{para toda N}$$

$$||\mathbf{V_N}|| < \mathbf{c_2} < \infty \qquad \text{para toda N}$$

y que existe una varianza idiosincrática promedio

$$\sigma^2 = \mathbf{plim}_{N\to\infty}\mathbf{(1/N)(\ \varepsilon_t^{N'}\varepsilon_t^{N})}$$

[1] Para matrices simétricas, positivas definidas, la norma-2 de una matriz es el mayor valor propio de una matriz.

donde **plim** denota límite en probabilidad.

Existe una versión de equilibrio[1] del APT en la cual

$$\mathbf{E(R_t) = R_{Ft}\, e + B\gamma_t} \tag{7}$$

Donde $\mathbf{R_{Ft}}$ es el rendimiento del activo sin riesgo, **e** un vector de unos y γ_t es un k-vector de primas de riesgo de los factores cuya interpretación será dada más adelante. Si combinamos **(1)** y **(7)** obtenemos

$$\mathbf{R_t - R_{Ft}\, e = B(\gamma_t + f_t) + \varepsilon_t} \tag{8}$$

Sea $\mathbf{R^N}$ la matriz (NxT) que consiste de los rendimientos observados sobre N activos en T períodos. Sea $\mathbf{R_F}$ el vector de rendimientos observados sobre el activo sin riesgo. La matriz de excesos de rendimientos (NxT) está dada por $\mathbf{r^N = R^N - eR_{Ft}}$. Los excesos de rendimientos están dados por

$$\mathbf{r^N = B^N F + \varepsilon^N} \tag{9}$$

donde **F** es la matriz (kxT) de realizaciones de $(\gamma_t + \mathbf{f_t})$ sobre el periodo y ε^N es la matriz (NxT) de realizaciones de ε_t.

Al principio de esta tesina se hicieron notar las virtudes del APT con respecto a otros modelos como el CAPM, no obstante, el APT adolece de algunos defectos. Como Ingersoll (1984) señala, la relación de precios es solo aproximada, si bien Chamberlain y Rotschild (1983a) proporcionaron condiciones bajo las cuales la relación de precios es exacta y que están relacionadas con la existencia de un portafolio de activos riesgosos bien diversificado sobre la frontera de activos eficiente en media-varianza. Siguiendo a Ingersoll (1984), la relación de precios no necesariamente es única ni las primas de los factores están identificadas como en el CAPM. Cuando hablamos de un portafolio bien diversificado, entendemos aquél que ha removido todo el riesgo idiosincrático; estos portafolios son identificados por

[1] **La diferencia entre el APT estándar y la versión de equilibrio es que las condiciones de arbitraje estándar implican que (7) se cumple como una aproximación, mientras que la versión de equilibrio deriva a (7) como una igualdad bajo ciertos supuestos sobre las preferencias y las ofertas de activos.**

Chamberlain y Rotschild (1983a y 1983b) como los fondos mutuos separadores de Ross(1976).

1.2 Identificación estadística de los factores

En el análisis sobre el número de factores pertinente en nuestro modelo de factores es conveniente determinar el conjunto de factores a ser utilizado. Como Connor y Korajczyck (1993) mencionan, hay una variedad de enfoques distintos entre si. Mientras que algunos autores como Chen, Roll y Ross (1986) derivan rendimientos de los factores de un conjunto de variables macroeconómicas, otros utilizan factores generados estadísticamente. Como en Connor y Korajczyck (1988), utilizamos factores generados estadísticamente haciendo uso de la técnica de componentes principales, la cual será detallada más adelante. Además, describiremos brevemente el método propuesto por Lehmann y Modest (1988), el cual está basado en análisis de máxima verosimilitud.

El enfoque de análisis de componentes principales es similar al de componentes principales común, excepto por el hecho de que descansa en resultados asintóticos cuando el número N de activos crece, además, permite la posibilidad de introducir primas de riesgo variantes en el tiempo. Anteriormente habíamos definido $\mathbf{r}^N$ como la matriz de rendimientos en exceso sobre el rendimiento del activo libre de riesgo, de ahora en adelante conocida como la matriz de rendimientos en exceso, por otra parte, definimos ahora a $\Omega^N = \mathbf{(1/N)(}\ \mathbf{r}^N\ \mathbf{r}^{N'}\mathbf{)}$ como la matriz de productos cruzados de orden (TxT). Sean $\mathbf{G}^N$ la matriz ortonormal de orden (KxT) compuesta por los primeros K vectores propios de Ω^N . Connor y Korajczyck (1988) muestran, basados en un resultado de Chamberlain y Rotschild (1983) que $\mathbf{G}^N = \mathbf{L}^N\mathbf{F}+\phi^N$, donde $\mathbf{L}^N$ es una matriz no singular para toda **N** y $\mathbf{plim}\phi^N\mathbf{=O}$ una matriz compuesta por ceros. Así pues, el análisis de vectores propios es asintóticamente equivalente al análisis de factores, pero hay una indeterminación, ya que **F** está determinada hasta una transformación no singular.

Existe una relación entre el análisis de factores y el análisis de componentes principales que conocemos de estadística multivariada. Si denotamos por Σ la verdadera matriz de covarianza de los rendimientos de los activos y suponemos que obedecen a un modelo de factores estricto

$$\Sigma = \mathbf{BB'} + \mathbf{V} \qquad \mathbf{(10)}$$

donde $\mathbf{V}$ se supone diagonal, tenemos el modelo estándar de análisis de factores. Si multiplicamos **(10)** a la izquierda y a la derecha por $\mathbf{V}^{-1/2}$ obtenemos

$$\Sigma^* = \mathbf{B}^*\mathbf{B}^{*\prime} + \mathbf{I} \qquad \mathbf{(11)}$$

con $\mathbf{B}^* = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{B}$ y $\Sigma^* = \mathbf{V}^{-1/2}\Sigma\, \mathbf{V}^{-1/2}$ que es la matriz de covarianza de $\mathbf{r}^* = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{r}$ y las componentes principales de (11) son idénticas a las cargas de los factores en (10) excepto por una transformación no singular. Connor y Korajczyck (1988) notaron que la transformación puede mejorar la eficiencia de su técnica de componentes principales. La variante propuesta por Connor y Korajczyck (1988) y que utilizaremos en la estimación de los factores en nuestra muestra es la siguiente: denotando **DIAG(V)** a la matriz cuyo (i, i) elemento es el i-ésimo elemento sobre la diagonal de la matriz de covarianza de los rendimientos idiosincráticos y cuyo (i,j) elemento es cero si $i \neq j$. Construyamos la matriz transformada de excesos de rendimientos $\mathbf{r}^* = \mathbf{DIAG(V)}^{-1/2}\mathbf{r}$ y la matriz correspondiente de productos cruzados Ω^*. La idea es que los vectores propios de esta matriz convergerán más rápidamente que los vectores propios de la matriz Ω original ya que las componentes idiosincráticas de los rendimientos transformados tendrán varianzas idénticas entre activos, en este sentido la técnica de componentes principales asintóticas es parecida a la de mínimos cuadrados ponderados (WLS) en un modelo de regresión.

Para implementar el procedimiento, primero estimamos los factores calculando $\mathbf{G}^N$, los vectores propios de Ω^N. Luego estimamos los elementos sobre la diagonal de $\mathbf{V}^N$ calculando la varianza de los residuales en una regresión de $\mathbf{r}^N$ sobre $\mathbf{G}^N$ (más una constante). Calculamos $\Omega^{N*} = (1/N)(\mathbf{r}^{N*\prime}\mathbf{r}^{N*})$ y estimamos nuevamente $\mathbf{G}^{N*}$. Si el tamaño de muestra es lo suficientemente grande, $\mathbf{G}^{N^*}$ no debe suministrar una mejora sustancial sobre $\mathbf{G}^N$; el hecho de usar estimados de las varianzas idiosincráticas introduce un sesgo y reduce posiblemente la ganancia en eficiencia del procedimiento. Creemos que las betas constantes pueden ser justificadas siguiendo un enfoque como en Keim (1993), permitiendo que sean γ_t las primas de riesgo de los factores las que varíen a lo largo del tiempo. Cabe destacar que $\mathbf{f}_t$ y γ_t no se identifican por separado.

En el presente trabajo hacemos uso del bono gubernamental con vencimiento a un mes como el activo sin riesgo, y calculamos las $\mathbf{r}_{Ft}$ apropiadas. Otros autores como Lehmann y Modest (1988), construyen un portafolio ortogonal, encontrando los N pesos del portafolio, $\mathbf{w}_{rf}$ de tal forma que

$$\text{Min } \mathbf{w}_{rf}'\mathbf{D}\,\mathbf{w}_{rf} \qquad \text{s.a. } \mathbf{w}_{rf}'\mathbf{b}_k = \mathbf{0} \text{ para toda k y } \mathbf{w}_{rf}'\iota = \mathbf{1}$$

Con $\mathbf{b}_k$ la k-ésima columna de la matriz de carga de los factores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{D}$ es la matriz diagonal construida con las varianzas de los estimados de los errores idiosincráticos. No usaremos dicho enfoque en nuestro trabajo, ya que como Connor y Korajczyck (1988) señalan, la ganancia en eficiencia no justifica la carga extra en cómputo.

II Persistencia de factores y procesos mixing.

Puesto que deseamos exhibir el poder de el estadístico de prueba para el número de activos propuesta por Connor y Korajczyck (1988), es necesario desarrollar una estadística que esté basada en el resultado de que si k es el número correcto de factores económicos persistentes, al incrementar el número de factores no habrá una disminución significativa en la media de los cuadrados de los rendimientos idiosincráticos, para ello debemos relacionar el modelo aproximado de factores con el concepto estadístico de strong mixing. Este es el propósito principal de este capitulo.

2.1 Strong mixing y no persistencia del riesgo idiosincrático

En el capitulo anterior definimos la estructura de factores estricta y aproximada. Además debemos señalar que el modelo de factores estricto, permite heterogeneidad en la variabilidad idiosincrática (distintos elementos sobre la diagonal de **V**), pero no permite dependencia entre rendimientos de activos (todos los elementos fuera de la diagonal de **V** iguales a cero). La ventaja de una estructura de factores aproximada es que permite heterogeneidad y cantidades limitadas de dependencia. Como Connor y Korajczyck (1993) señalan, podemos incorporar estás dos características en el modelo suponiendo que $\{\varepsilon_i\}_{i=1,\ldots,\infty}$ es un proceso mixing. A continuación definimos dicho concepto.

Sea $\{\varepsilon_i\}_{i=1,\ldots,\infty}$ una sucesión de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, y sea $\mathbf{F}_a^b$ el conjunto de información (σ-álgebra) generada por $(\varepsilon_a,\ldots,\varepsilon_b)$. Una medida de la dependencia entre los σ-campos $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ está dada por $\alpha(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \sup_{\{G\in\mathcal{G},\, H\in\mathcal{H}\}} |P(G\cap H)-P(G)P(H)|$, que es la diferencia máxima entre la probabilidad conjunta de los eventos en $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ y el producto de las probabilidades de cada evento. Los coeficientes mixing del proceso $\{\varepsilon_i\}_{i=1,\ldots,\infty}$ están definidos como $\alpha(\mathbf{m}) = \sup_N(\mathcal{F}_{-\infty}^{N}, \mathcal{F}_{N+M}^{\infty})$. Si $\alpha(\mathbf{m})\rightarrow 0$ cuando $M\rightarrow\infty$ la sucesión $\{\varepsilon_i\}_{i=1,\ldots,\infty}$ se conoce como strong mixing o α–mixing.

Como en Connor y Korajczyck (1993), suponemos que la heterogeneidad y la dependencia son de la siguiente forma:

Hipotesis de α-mixing. Existe un ordenamiento de la sucesión $\{\varepsilon_i\}_{i=1,\dots,\infty}$ tal que $\{\varepsilon_i\}$ es un proceso strong mixing con coeficientes mixing $\alpha(\mathbf{m})$ que son $\mathbf{O}(\mathbf{m}^{-\lambda})$ para $\lambda>2$[3].

La independencia de dos eventos **G** y **H** implica $P(G)P(H) = P(G \cap H)$. La condición mixing quiere decirnos que si m es muy grande entonces las dos variables aleatorias ε_i y ε_{i+m} cumplen $P(G)P(H) \approx P(G \cap H)$ donde **G** y **H** son las realizaciones de ε_i y ε_{i+m} respectivamente. Esto es, si dos variables aleatorias están lo suficientemente alejadas entonces son casi independientes. Las estadísticas utilizadas en las pruebas son tales que no se necesita saber el ordenamiento apropiado, basta suponer que existe. Como Connor y Korajczyck (1993) destacan, el proceso mixing permite un tradeoff entre la dependencia en el proceso y las restricciones de momentos requeridas por las leyes de grandes números y los teoremas de límite central. Así pues, la suposición de que $\{\varepsilon_i\}_{i=1,\dots,\infty}$ es mixing permite tener dependencia en cortes transversales y rendimientos idiosincráticos heteroscedásticos, pero conservando las condiciones necesarias para una estructura de factores aproximada. El siguiente Teorema es de Connor y Korajczyck (1993) y tiene que ver con la propiedad de strong mixing.

Teorema 1 **Suponga que la hipótesis de mixing se cumple para una sucesión de rendimientos idiosincráticos, y que $E[|\varepsilon_i|^{2(1+\delta)}]$ está acotada para toda i y para alguna $\delta>2/(\lambda-2)$. Entonces los valores propios de V^N están acotados cuando $N\to\infty$**

Demostración. Por el corolario 6.16 de White (1984), las hipótesis implican que $\exists M^* < \infty$ tal que $|V_{ij}{}^N| \le M^* \; |i - j|^{-\lambda\delta/(2+2\delta)}$, $i\neq j$ donde $V_{ij}{}^N$ es el (i, j) elemento de

[3] La notación $O(m^{-\lambda})$ indica que la sucesión x(m) es a lo más de orden $m^{-\lambda}$. Esto quiere decir que existe un número real M tal que $m^{-\lambda}|\alpha(m)| \le M$ para toda m donde $M<\infty$.

$\mathbf{V^N}$. Sea $\mathbf{s}= -\lambda\delta/(2+2\delta)$. Las restricciones sobre λ y δ implican que $s > 1$. Considere la norma-1 de la matriz $\mathbf{V^N}$. Está norma está definida como

$$\mathbf{Max}_j \left[\Sigma_{i=1,\dots,\infty} \mid \mathbf{V_{ij}}^N \mid : \mathbf{j=1,\dots, N} \right]$$

La cota impuesta sobre el valor absoluto de los elementos por condiciones mixing implican que la norma-1 de $\mathbf{V^N}$, $\| \mathbf{V^N} \|_1$ está acotada por $\mathbf{M^*}$ $[1+2\xi(\mathbf{s})]$ donde $\xi(\mathbf{s})$ es

$$\xi(\mathbf{s})= \Sigma_{i=1,\dots,\infty}(\mathbf{1/i^s})$$

la cual converge para $s>1$. Esto significa que $\| \mathbf{V^N} \|_1 <\infty$. Coma la norma-1 de una matriz es una cota superior de los valores propios de una matriz (Schwarz, Rutishauser y Stiefel (1973)), los valores propios de $\mathbf{V^N}$ están acotados cuando $N\rightarrow\infty$. Como el valor propio más grande está creciendo conforme N crece, se desprende que todos los valores propios estén uniformemente acotados para toda N.

De tal forma (1), (5), y (6) implican una estructura de factores aproximada como en Chamberlain y Rotschild (1983a). El Teorema 1 proporciona condiciones suficientes para que los rendimientos de los activos sigan una estructura de factores aproximada. Que $\sigma^2= \mathbf{V^N}$ está implícito en el siguiente Teorema.

Teorema 2 Bajo las hipótesis del Teorema 1, $\varepsilon_t^{N'}\varepsilon_t^N/N$ converge en probabilidad a σ_ε cuando $N\rightarrow\infty$, donde $\sigma_\varepsilon=\mathbf{lim}_{N\rightarrow\infty}\mathbf{E}[\varepsilon_t^{N'}\varepsilon_t^N/N]$

Demostración Las restricciones sobre los momentos de ε supuestas en el Teorema 1 implican que $\mathbf{V_{ii}}^N = E[\varepsilon_i^2]$ está acotado. De aquí, σ_ε existe y es finito. Como $\{\varepsilon_i\}_{i=1,\dots,\infty}$es mixing, $\{\varepsilon_i^2\}_{i=1,\dots,\infty}$ también lo es (White (1984)). Como la sucesión $\{\varepsilon_i^2\}_{i=1,\dots,\infty}$ es mixing, $\varepsilon_t^{N'}\varepsilon_t^N/N$ converge casi seguramente (a.s.) a σ_ε (White (1984), corolario 3.48). Por último utilizamos el hecho de que la convergencia casi segura implica convergencia en probabilidad.

III Una estadística de prueba para el número de factores en un modelo de factores aproximado

En este capítulo derivamos la estadística de prueba propuesta por Connor y Korajczyck (1993). En la sección 3.2 dicha estadística es obtenida bajo la hipótesis de observabilidad perfecta de los rendimientos de los activos. En la sección 3.2 la estadística es derivada para el caso en el que no es posible observar perfectamente los rendimientos, sino que hay que estimarlos. Por último, en la sección 3.3, discutimos brevemente dichos enfoques y comentamos los trabajos realizados por Trzcinka (1986) y Brown (1989) sobre el número de factores.

3.1 Estadística de prueba para el caso de observabilidad perfecta de los rendimientos

Se supone que los rendimientos de los activos están dados por una estructura de factores aproximada y que los rendimientos son strong mixing. Sea $\mathbf{f}^*$ una variable aleatoria que no es uno de los factores persistentes y que no está correlacionada con los factores persistentes. Connor y Korajczyck (1993) llaman a este factor "pseudofactor", y nos dicen que puede ser una combinación de las variables idiosincráticas o alguna influencia extendida en la industria, pero no tanto como para ser un factor persistente por si solo. La prueba debe ser capaz de distinguir entre este pseudofactor y los k-factores verdaderos.

El modelo $\mathbf{r}^N = \mathbf{c}^N + \mathbf{B}^N\mathbf{f} + \varepsilon^N$ equivalente a (1) puede escribirse como:

$$\mathbf{r}^N = \mathbf{c}^N + \mathbf{B}^N\mathbf{f} + \beta^N\mathbf{f}^* + \varepsilon^{*N}$$

donde β^N es el vector (NX1) de proyecciones de mínimos cuadrados de $\mathbf{r}^N$ sobre $\mathbf{f}^*$ (tomando en cuenta $\mathbf{f}$). Un resultado de Ingersoll (1984) muestra que la estructura de k-factores aproximada implica que $\beta^{N'}\beta^N \leq \varpi < \infty \ \forall \mathbf{N}$.

El vector ε^N puede expresarse como $\varepsilon^N = \beta^N \mathbf{f}^* + \varepsilon^{*N}$. Si los rendimientos siguen una estructura de factores aproximada con k-factores, entonces el (k+1)-factor no puede tener cargas de factores significativas para un número importante de activos.

Esto se desprende de que $\mathbf{V}^N$ no es diagonal. Además,

$$\mathbf{plim}_{N\to\infty}(\mathbf{1/N})(\varepsilon_t^{N'}\varepsilon_t^N) = (\mathbf{f}^{*2})\mathbf{plim}_{N\to\infty}(\mathbf{1/N})(\beta^{N'}\beta^N) + \mathbf{plim}_{N\to\infty}(\mathbf{1/N})$$

$$(\varepsilon_t^{*N'}\varepsilon_t^{*N}) = \mathbf{plim}_{N\to\infty}(\mathbf{1/N})(\varepsilon_t^{*N'}\varepsilon_t^{*N})$$

Esto implica $\mathbf{plim}_{N\to\infty}(\mathbf{1/N})(\varepsilon_t^{*N'}\varepsilon_t^{*N} - \varepsilon_t^{N'}\varepsilon_t^N) = \mathbf{0}$ .De este modo, la variabilidad de los activos explicada por el (k+1) factor es asintóticamente cero en promedio. En lo que sigue, ε y $\varepsilon*$ denotan las matrices de orden (NxT) de rendimientos de idiosincráticos observados para los N activos sobre T períodos de tiempo usando k factores más un pseudofactor, respectivamente. Denotando $\varepsilon_{\bullet t}$ y $\varepsilon_{i\bullet}$ a la t-ésima columna y el i-ésimo renglón de ε respectivamente. La estadística propuesta originalmente es:

$$\mu_t^N = \varepsilon_{\bullet t}'\,\varepsilon_{i\bullet}/\,N \quad ; \quad \mu_t^{*N} = \varepsilon_{\bullet t}^{*'}\,\varepsilon_{i\bullet}^{*}/\,N \ , \quad \mathbf{t=1,...,T}$$

pero como Connor y Korajczyck (1993) señalan, tiene el inconveniente de converger a una distribución degenerada. La estadística modificada se obtiene tomando la diferencia entre μ en un período en el tiempo y $\mu*$ en el siguiente periodo. Luego se calculan las medias y las varianzas usando todas las observaciones. Definiendo el vector Δ^N como

$$\Delta_s^N = \mu_{2s-1}^N - \mu_{2s-1}^{*N} \qquad\qquad \mathbf{s=1,..., T/2}$$

Por las características de ε_{it} y de ε_{it} , estás son independientes e idénticamente distribuidas. Entonces Δ^N está compuesto por variables aleatorias independientes. $E[\Delta_s^N]$ converge a $(\mathbf{f}_{2s-1}^{*2})(\beta^{N'}\beta^N)/\mathbf{N}$ así que $E[\Delta_s^N]\to\mathbf{0}$ cuando $N\to\infty$, bajo $\mathbf{H_O}= \mathbf{K}$ factores. Bajo la alternativa hay (K+1) factores persistentes, por ello se espera que los valores de Δ_s^N sean positivos ya que $(\mathbf{f}_{2s-1}^{*2})(\beta^{N'}\beta^N)/\mathbf{N}\to\mathbf{a}$, con $\mathbf{a}>0$. Además, cuando $N \to \infty$ se tiene que Δ^N converge en distribución a un vector de v.a.i.i.d. con distribución $\mathbf{N(0,x)}$ donde $\mathbf{x}$ es común a todas las variables.

Sea $\psi^{a,N} = \mathbf{var}(1/\sqrt{N})(\Sigma_{i=a+1,\ldots,a+N}\ \varepsilon_{it}^2)$ y suponemos que existe ψ, $0<\psi<\infty$ tal que $\psi^{a,N} \to \psi$ cuando $N \to \infty$ de manera uniforme en $\mathbf{a}$.

Teorema 3 (Connor y Korajczyck (1993)) Dadas las hipótesis del Teorema 1 y la convergencia de $\psi^{a,N}$, entonces

$$\mathrm{dlim}_{N\to\infty}(\sqrt{N})(\Delta^N) \sim N(0,2\psi I)$$

donde dlim denota convergencia en distribución y N(•,•) denota la distribución normal multivariada.

Demostración. Véase Connor y Korajczyck (1993)

Para obtener estimados válidos de dichos coeficientes, usamos series de tiempo de los estimados Δ_s^N para estimar la media y la varianza. Definiendo la media muestral y la varianza de Δ_s^N por

$$\Delta_\mu^N = (2/T)(\Sigma_{s=1,\ldots,T/2}\Delta_s^N)$$

y

$$2\psi^N = (\Sigma_{s=1,\ldots,T/2}(\Delta_s^N - \Delta_\mu^N)^2)/(T/2-1)$$

Del **Teorema 3** se desprende que cuando $N \to \infty$, la estadística de series de tiempo $\Delta_\mu^N(2\psi^N)^{-1/2}$ se distribuye asintóticamente como una **t** con T/2 grados de libertad.

3.2 Estadística de prueba con rendimientos idiosincráticos estimados.

El Teorema 3 no es aplicable aquí, ya que ε^N y ε^{*N} deben ser estimados al no poder ser observados directamente. La suposición hecha por de Connor y Korajczyck (1993), es que se tienen datos sobre un conjunto de factores especificado previamente o sobre un conjunto de estimados de los factores. Es aquí donde adquieren relevancia las técnicas discutidas en el capítulo anterior, la estadística de prueba sólo requiere consistencia de los estimados de los factores. Una forma obvia de obtener estimados de los rendimientos idiosincráticos es correr regresiones utilizando series de tiempo de los rendimientos sobre los factores y una constante. Siguiendo el procedimiento utilizado por Connor y Korajczyck (1993), estimamos para cada activo

$$\mathbf{r}_{it} = \mathbf{c}_{it} + \mathbf{B}_i\mathbf{f}_t + \varepsilon_{it}, \ \mathbf{t} = \mathbf{1,2,...,T} \qquad \textbf{(12)}$$

o

$$\mathbf{r} = [\ \mathbf{cB}\ ]\ \mathbf{F} + \varepsilon$$

donde **r** es una matriz de excesos de rendimientos de los activos de orden (NxT), **B** es la matriz de cargas de los factores, **F** es una matriz de orden (k+1)xT cuyo primer renglón es un vector de unos y cuyos renglones 2 hasta (k+1) son series de tiempo para los factores 1 hasta k, y ε es una matriz de rendimientos idiosincráticos de orden (NxT).

Podemos utilizar los residuales ordinarios de OLS

$$\varepsilon^{OLS}_{it} = \varepsilon_{i\bullet}(\ \mathbf{I}_T - \mathbf{F'}\ (\mathbf{FF'})^{-1}\mathbf{F})_{\bullet t} \qquad \textbf{(13)}$$

con $\mathbf{F'}_{\bullet t} = (\mathbf{1f'}_t)$. La misma regresión puede repetirse agregando el pseudofactor $\mathbf{f^*}_t$ a la matriz de regresores

$$\varepsilon^{*OLS}_{it} = \varepsilon^*_{i\bullet}(\ \mathbf{I}_T - \mathbf{F^{*'}}\ (\mathbf{F^*F^{*'}})^{-1}\mathbf{F^*})_{\bullet t}$$

Para cada activo, definimos al vector de residuales al cuadrado ajustados en la forma analizada en el capítulo anterior como:

$$\sigma^{A}_{it} = (\ \varepsilon^{*OLS}_{i\bullet}\ )^2 / (\ \mathbf{I}_T - \mathbf{F'}\ (\mathbf{FF'})^{-1}\mathbf{F})_{it}$$

con $(\sigma^A{}_{i\bullet})^*$ definida en la misma forma usando **F***. Esta definición toma en cuenta un ajuste por grados de libertad. Si denotamos con $\sigma^A{}_{iM}$ al vector (Tx1) cuyas componentes pares son los componentes pares de $\sigma^A{}_{ii\bullet}$. Para toda $\mathbf{x} \in \Re^T$ tal que $\mathbf{x'x=1}$, definimos $\sigma^A{}_{ix} = \mathbf{x'}\sigma^A{}_{iM}$

Para toda **x** existe $\psi^{a,N} = \mathbf{var}\ ((1/\sqrt{N}))(\Sigma_{i=a,\dots,a+N}\ \sigma^A{}_{ix})$. Suponemos que $\forall\mathbf{x}$ existe ψ_x tal que $\mathbf{lim}_{N\to\infty}\psi^{a,N} = \psi_x$ de manera uniforme en **a**. Además, que para cada **x**, existe $\gamma_x < \infty$ y $\delta_x > 2/(\lambda\text{-}2)$ tal que $\mathbf{E}[\,|\sigma^A{}_{ix}\,|^{2\delta x}] < \gamma_x$ para toda i, donde λ denota el tamaño del proceso mixing $\{\varepsilon_i\}$.

Teorema 4 Dado $\mathbf{lim}_{N\to\infty}\psi^{a,N} = \psi_x$ y que $\mathbf{E}[\,|\sigma^A{}_{ix}\,|^{2\delta x}] < \gamma_x$ y bajo las condiciones del Teorema 3, existe una matriz Γ de orden (T/2)x(T/2), tal que

$$\mathbf{dlim}_{N\to\infty}(\sqrt{N})(\Delta^N) \sim \mathbf{N}(0, \Gamma)$$

Demostración Véase Connor y Korajczyck (1993)

El ajuste propuesto por Connor y Korajczyck (1993) en el caso en el que se utilizan factores estimados en lugar de los auténticos es el siguiente

$$\sigma^\wedge{}_{it} = \varepsilon_{i\bullet}{}^2/(\ 1\text{-}(k+1)/T\text{-}k/N) \qquad \mathbf{(14)}$$

Connor y Korajczyck (1993) sugieren un procedimiento de prueba, además de suministrar evidencia de simulación para comparar el desarrollo de la distribución de muestras finitas con la distribución asintótica.

3.3 Trabajos anteriores sobre el número de factores.

Como Connor y Korajczyck (1993) y Brown (1989) señalan, las pruebas de verosimilitud (que toman V^N como diagonal), tenderán a extraer un número elevado de factores. Además, en otros trabajos como los de Dhrymes, Friend y Gultekin (1984), se determina que la probabilidad de incluir un número elevado de activos con rendimientos idiosincráticos correlacionados se incrementa. En Chamberlain y Rotschild (1983), se encuentra que cuando el número de activos se incrementa y si k es el número de factores en nuestro modelo, entonces sólo k valores propios de la matriz de covarianza se incrementan sin cota alguna, mientras que todos los restantes permanecen acotados. Trzcinka (1986), señala que el análisis de valores propios no es un problema bien condicionado cuando $N \rightarrow \infty$ para un conjunto finito de datos.

Brown (1989) y Trzcinka (1986), encuentran que $\hat{\Lambda}_1^N$, el primer valor propio de la matriz de covarianza muestral, $\hat{\Sigma}^N$ domina a los restantes valores propios cuando $N \rightarrow \infty$. Así, algunos investigadores podrían argumentar que sólo existe un factor persistente, mientras que utilizando otra métrica (valores propios crecientes), sería posible argumentar que existen de hecho varios factores.

De hecho, Brown (1989), muestra analíticamente que para una economía de k-factores, la solución de factores aproximada identifica al primer factor como el rendimiento sobre un índice de mercado igualmente ponderado, lo cual conduciría a inferir que los restantes (k-1) factores no son adecuados para poner precios usando regresiones de corte transversal. La conclusión relevante de este artículo es que el hecho de que un valor propio domine a los demás no debe tomarse como evidencia de que existe un solo factor.

Trzcinka (1986), coincide en este aspecto, al encontrar que a lo sumo un valor propio más grande que cero domina a los demás- tomando como insumo la matriz de covarianza- además, encuentra que el valor propio más grande que cero en relación a la traza converge a una constante, pero que ningún otro valor propio tiene esta característica. Como el mismo señala, esto no debe tomarse como evidencia para descartar que más de dos factores sean relevantes para poner precios a los activos en equilibrio.

IV RESULTADOS EMPÍRICOS

4.1 El número de factores para la muestra de acciones de empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores

Aplicamos la prueba propuesta por Connor y Korajczyk (1993) a una muestra de rendimientos semanales de acciones de empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores, durante el periodo de marzo de 1992 hasta julio de 1997[1].Hay 281 semanas en la muestra, que dividimos en tres bloques: uno que comienza en marzo de 1992 y termina en febrero de 1994; otro que comienza en marzo de 1994 y termina en febrero de 1996; y por ultimo uno que comienza en marzo de 1996 y termina en julio de 1997. Dicha división del total de observaciones tiene como propósito determinar si los coeficientes que se obtienen en las regresiones para determinar el número de factores son insensibles a modificaciones en el medio económico. Así pues, si los factores determinados son realmente persistentes los coeficientes asignados a los mismos no deberían sufrir cambios significativos. Para evitar las posibles dificultades asociadas con rendimientos diarios por la ausencia de observaciones, Connor y Korajczyk (1993) aconsejan utilizar rendimientos semanales en lugar de diarios; por otra parte, dividimos el período de 281 semanas en dos subperíodos de dos años completos y un último subperíodo que toma las semanas restantes. El número de acciones que registran rendimientos para estos tres subperíodos es 80. Usamos los rendimientos semanales ajustados de los Cetes a 28 días para calcular excesos de rendimientos.

Determinemos primeramente el conjunto de factores a utilizar. En este punto hay una diversidad de enfoques a seguir. Uno puede utilizar un conjunto de variables macroeconómicas como en Chen, Roll y Ross (1986), o usar factores generados estadísticamente. Seguimos el trabajo de Connor y Korajczyk (1993), esto es, usamos factores generados estadísticamente basados en la técnica de componentes principales asintóticas de Connor y Korajczyk (1988). Los k-factores estimados son iguales a los primeros k vectores propios de la matriz de orden (TxT) de productos cruzados de los

[1]En la obtención de los datos necesarios para llevar a cabo este estudio, fue invaluable la ayuda de la Act. Araceli Ortega Díaz, especialista en riesgos del S.D.Indeval.

rendimientos ajustados, $(\mathbf{R}^{N'} \mathbf{x}\ \mathbf{R}^{N})/\mathbf{N}$. Los estimados de los factores del procedimiento de componentes principales asintóticas se utilizan como $\mathbf{f}_t$ en la regresión de series de tiempo **(12).** Para cada bloque, estimamos los rendimientos idiosincráticos para un modelo de k factores a través de un conjunto de N regresiones con mínimos cuadrados ordinarios, una para cada acción en la muestra.

Corremos una regresión con el rendimiento ajustado de la acción como variable dependiente sobre una constante y los k factores. Los residuales de está regresión son los rendimientos idiosincráticos estimados de la acción. Después calculamos el rendimiento idiosincrático medio al cuadrado para cada semana como el promedio en corte transversal de estos residuales al cuadrado:

$$\mu\hat{}_{kt} = (\Sigma_{i=1,\dots,Nt}\sigma\hat{}_{it})/(N_t)$$

donde $\sigma\hat{}_{it}$ es el rendimiento residual ajustado elevado al cuadrado de la acción i en la semana t, donde $\sigma\hat{}_{it}$ es el que se menciona en **(14)**. Las series de tiempo estimadas $\mu\hat{}_{kt}{}^{(1)}$, t=1,...,104; $\mu\hat{}_{kt}{}^{(2)}$, t=1,...,105; $\mu\hat{}_{kt}{}^{(3)}$, t=1,...,73 de los tres bloques se unen para formar $\mu\hat{}_{kt}$,t=1,...,282. En la Tabla I presentamos los promedios de series de tiempo de $\mu\hat{}_{kt}$, μ^{m}_{k} , para k = 0,...,15. Como en Connor y Korajczyk (1993), mostramos como cambia μ^{m}_{k} cuando incrementamos el número de factores y el cambio en μ^{m}_{k} como una proporción de la varianza promedio de los rendimientos. Dichas estadísticas se presentan para todos los meses y para enero.

Como podemos inferir de los resultados expuestos en la Tabla I hay un gran decremento en el poder explicativo al movernos de uno a dos factores, después el decremento es mucho menos pronunciado al agregar factores adicionales. Enero se presenta como un caso especial, ya que supera en más de 60% a la varianza promedio de los rendimientos, y los factores estadísticos tienen un poder explicativo significativo, superior a los otros dos casos, tanto en términos absolutos como en términos del porcentaje de la varianza total. Este resultado ya ha sido planteado en otros estudios del APT. Como Cho y Taylor (1984), señalan, la matriz de covarianza de los rendimientos difiere en enero con respecto a otros meses.

TABLA I

Riesgo idiosincrático medio para un conjunto de 0 a 15 factores $\mu^m{}_k$
(Promedio de series de tiempo para todos los meses, enero y excepto enero)

	Todos los meses			Enero			Excepto Enero		
k	$\mu^m{}_k$ *1200	$\mu^m{}_{k-1}-\mu^m{}_k$ *1200	$(\mu^m{}_{k-1}-\mu^m{}_k)/(100^*\mu^m{}_0)$	$\mu^m{}_k$ *1200	$\mu^m{}_{k-1}-\mu^m{}_k$ *1200	$(\mu^m{}_{k-1}-\mu^m{}_k)/(100^*\mu^m{}_0)$	$\mu^m{}_k$ *1200	$\mu^m{}_{k-1}-\mu^m{}_k$ *1200	$(\mu^m{}_{k-1}-\mu^m{}_k)/(100^*\mu^m{}_0)$
0	39.15			56.54			30.03		
1	31.94	7.21	18.41	41.19	15.35	10.78	23.93	6.10	20.31
2	25.56	6.39	16.32	38.45	2.74	3.63	21.88	2.05	6.82
3	19.75	5.81	15.84	31.13	7.32	1.85	20.83	1.05	3.49
4	18.73	1.02	2.60	27.21	3.92	1.64	19.90	0.93	3.09
5	17.92	0.81	2.06	23.97	3.24	1.45	19.08	0.82	2.73
6	17.20	0.72	1.84	22.25	1.72	1.09	18.46	0.62	2.06
7	16.55	0.64	1.63	20.53	1.72	0.95	17.92	0.54	1.80
8	15.97	0.58	1.48	18.43	2.10	0.88	17.42	0.50	1.67
9	15.47	0.50	1.27	17.51	0.92	0.67	17.04	0.38	1.27
10	15.05	0.42	1.07	16.67	0.84	0.63	16.68	0.36	1.20
11	14.74	0.31	0.79	15.87	0.80	0.57	16.36	0.32	1.07
12	14.47	0.27	0.69	13.87	2.00	0.48	16.09	0.27	0.90
13	14.22	0.25	0.64	13.15	0.72	0.41	15.86	0.23	0.77
14	14.00	0.22	0.56	11.60	1.55	0.41	15.63	0.23	0.76
15	13.82	0.18	0.46	10.28	1.32	0.55	15.32	0.31	1.03

Tabla I. Riesgo idiosincrático medio al cuadrado para k=0,...,15, μ_k (Promedios de series de tiempo para todos los meses, caso enero únicamente y excluyendo enero).
La presente tabla muestra el rendimiento idiosincrático medio elevado al cuadrado para la serie de tiempo cuando k-factores han sido extraídos de los rendimientos (k=0,...,15), μ_k es la media de la serie de tiempo $\mu_t^N = (\varepsilon_{\cdot t}'\varepsilon_{\cdot t})/N_t$, donde $(\varepsilon_{\cdot t}'\varepsilon_{\cdot t})/N_t$ es el promedio en corte transversal de los residuales estimados ajustados de los rendimientos de un modelo de k-factores. Para k=0 la media muestral de la serie de tiempo de los rendimientos de cada activo es restada de sus rendimientos semanales y el número mostrado es el promedio en corte transversal de las varianzas de los activos. Los rendimientos idiosincráticos son ajustados por grados de libertad usando la corrección dada por **(13)**. Los rendimientos semanales han sido convertidos a porcentajes anualizados multiplicando por 5200. La muestra de series de tiempo difiere entre los tres conjuntos de columnas: todos los meses, enero solamente, y todos los meses excepto enero. Los datos son rendimientos semanales de acciones que cotizaron en la BMV durante el período que comprende marzo de 1992 hasta julio de 1997.

Gultekin y Gultekin (1987) y Connor y Korajczyk (1988) utilizando una muestra de corte transversal con datos de los rendimientos de 1745 empresas durante el periodo 1962-1985, encuentran que los factores más allá del primero son más importantes para poner precio en un modelo APT durante el mes de enero. De aquí que no sea sorprendente que sean más importantes para explicar la varianza del corte transversal también. Así pues, la Tabla I posee estadísticas descriptivas acerca de la estructura de factores en el contexto de un modelo de factores aproximado.

Como Connor y Korajczyk (1993) señalan, hay un patrón estacional en las varianzas idiosincráticas, por ello sugieren tratar los meses de enero y los meses distintos de enero por separado para calcular Δ_s. Siguiendo su sugerencia, definimos Δ_s para los meses de enero como las diferencias de un año con respecto al anterior para los valores de μ_k. Para los meses distintos a enero tomamos diferencias de una semana a otra semana eliminando las semanas que se traslapan durante los meses de diciembre-enero y enero-febrero.

Existen dos configuraciones (A y B) de la muestra correspondientes a las dos formas utilizadas para construir Δ (Caso A se toman las semanas impares para k y las semanas pares para (k+1) y en el Caso B se toman las semanas pares para k y las semanas impares para (k+1)). El análisis es igualmente válido usando cualquiera de las dos; llevamos a cabo dicho análisis para ambas especificaciones, si bien, como Connor y Korajczyk (1993) señalan, los resultados no son independientes de la especificación adoptada.

Resumimos en la Tabla II los resultados. Para las pruebas para los meses de enero y los meses distintos de enero, utilizamos una prueba t de mínimos cuadrados ordinarios y una prueba con el estimador robusto de Newey y West (1987), que es consistente con una especificación de posible heteroscedasticidad y correlación entre los elementos de la serie de tiempo. Como en Connor y Korajczyk (1993), los datos nos permiten asegurar que uno ó dos factores son significativos para la explicación de los rendimientos para el caso en el que se excluye del análisis al mes de enero. Para los meses de enero, encontramos hasta diez factores significativos (a un nivel de confianza del 10 por ciento), excepto quizás para k=3 en la especificación A y sólo dos factores significativos en la otra especificación (especificación B). La estadística de prueba (agregada) que pondera igualmente las pruebas para meses de enero y sin enero, nos da dos factores significativos en los dos casos, si bien pueden incluirse hasta cuatro en la configuración B si incrementamos el nivel de significancia en un 4% adicional.

TABLA II Configuración A

Riesgo idiosincrático medio al cuadrado para un conjunto de 0 a 15 factores μ^m_k

(Enero y el caso todos los meses excepto enero se consideran por separado)

	Excepto Enero				Enero				
k	$\Delta^m_{k-1,k}$ *1200	t-value	z-robusta	p-value	$\Delta^m_{k-1,k}$ *1200	t-value	z-robusta	p-value	p-value agregada
0									
1	5.32	6.12	5.32	0.00	14.86	1.34	1.40	0.09	0.00
2	0.94	2.97	2.84	0.01	1.21	1.05	1.11	0.19	0.03
3	0.10	0.42	0.38	0.32	-0.94	-0.48	-0.49	0.66	0.41
4	0.22	0.79	0.64	0.25	1.32	1.22	1.25	0.14	0.18
5	0.24	0.83	0.69	0.22	0.21	0.13	0.13	0.48	0.29
6	0.38	1.20	1.15	0.11	-1.12	-0.54	-0.55	0.70	0.35
7	0.34	1.15	1.11	0.13	0.62	0.63	0.64	0.28	0.17
8	0.60	2.13	2.24	0.02	0.63	0.64	0.65	0.27	0.12
9	0.64	2.22	2.31	0.01	0.53	0.41	0.43	0.33	0.12
10	0.57	2.09	2.20	0.02	0.17	0.11	0.11	0.47	0.16
11	0.55	2.06	2.17	0.02	0.92	0.97	0.96	0.14	0.05
12	0.61	2.15	2.26	0.02	0.94	0.99	1.00	0.12	0.04
13	0.41	1.26	1.22	0.10	1.51	1.28	1.32	0.11	0.08
14	0.49	1.64	1.76	0.04	1.53	1.32	1.36	0.10	0.06
15	0.44	1.56	1.67	0.06	1.22	1.07	1.13	0.19	0.13

Prueba para k-1 vs. K factores persistentes. (El caso de enero y meses distintos de enero se analizan por separado). Las muestras de enero y todos los meses excepto enero se analizan por separado a causa da las mayores varianzas, las cuales son evidentes en el mes de enero. $\Delta^m_{k-1,k}$ es la diferencia entre el rendimiento idiosincrático medio elevado al cuadrado promediado sobre el corte transversal con k-1 y k factores estimados en submuestras separadas (semanas impares y pares). La tercera columna (t-value) divide a los elementos de dicha columna por su error estándar estimado sobre al serie de tiempo, formando una estadística t. La cuarta columna (z-robusta) recalcula la estadística t de la columna 3 usando un estimado robusto del error estándar de la serie de tiempo como en Newey y West (1987). La quinta columna (p-value)[11] nos da el área (one-sided) de la estadística t calculada en la tercera columna. Las siguientes cuatro columnas repiten las columnas dos a cinco sobre la muestra de enero. La última columna agrega los p-values de las dos estadísticas. La primera mitad de la Tabla (Configuración A) estime el rendimiento idiosincrático medio elevado al cuadrado para k-factores usando las semanas pares de la muestra y para k-1 factores usando las semanas impares. La segunda mitad de la Tabla (Configuración B) repite el análisis usando las semanas impares para estimar el rendimiento idiosincrático medio elevado ala cuadrado para k factores y semanas pares para k-1 factores. Los datos son de rendimientos semanales de acciones (ajustados), que cotizaron en la BMV durante el período de marzo de 1992 hasta julio de 1997.

[1] El p-value es la probabilidad de obtener un valor más grande que el valor indicado cuando la hipótesis nula es cierta.

TABLA II Configuración B
Riesgo idiosincrático medio al cuadrado para un conjunto de 0 a 15 factores μ^m_k
(Enero y el caso todos los meses excepto enero se consideran por separado)

	Excepto Enero				Enero				
k	$\Delta^m_{k-1,k}$ *1200	t-value	z-robusta	p-value	$\Delta^m_{k-1,k}$ *1200	t-value	z-robusta	p-value	p-value agregada
0									
1	6.93	6.55	6.53	0.00	10.32	1.62	1.63	0.07	0.00
2	1.38	2.10	2.09	0.03	1.98	1.50	1.55	0.10	0.05
3	0.80	1.78	1.80	0.04	1.58	0.53	0.56	0.30	0.13
4	0.19	0.56	0.54	0.28	4.07	1.87	1.95	0.05	0.10
5	0.22	0.60	0.59	0.26	4.12	1.89	1.97	0.04	0.11
6	-0.13	-0.44	-0.51	0.65	1.97	1.50	1.54	0.10	0.28
7	-0.12	-0.42	-0.49	0.63	1.94	1.44	1.50	0.09	0.30
8	0.02	0.06	0.06	0.51	2.32	1.40	1.45	0.07	0.29
9	0.03	0.08	0.07	0.50	2.38	1.48	1.50	0.06	0.31
10	-0.14	-0.47	-0.53	0.65	1.99	1.51	1.55	0.10	0.47
11	-0.22	-0.86	-0.87	0.80	-0.50	-0.31	-0.32	0.62	0.73
12	-0.32	-1.32	-1.40	0.90	-0.68	-0.42	-0.42	0.65	0.82
13	-0.34	-1.35	-1.43	0.91	-0.71	-0.43	-0.43	0.70	0.84
14	-0.40	-1.49	-1.52	0.93	-0.23	-0.17	-0.17	0.55	0.72
15	-0.49	-0.99	-0.88	0.80	1.10	0.71	0.71	0.23	0.51

De está forma, nuestra prueba no requiere de una estructura de factores estricta, y es válida en cortes transversales de gran tamaño. Las estadísticas de prueba que suponen una estructura de factores estricta tenderán a identificar demasiados factores persistentes si los rendimientos de los activos siguen una estructura de factores aproximada. La teoría de strong mixing resultó ser de gran utilidad en la derivación de la prueba alternativa, y nos permitió estimar el número de factores necesarios para poner precio a una acción dentro de la muestra de acciones que cotizan en la BMV, lo cual adquiere relevancia dentro de un ambiente de decisión bajo incertidumbre, como el que aquí manejamos.

CONCLUSIONES

Los modelos de precios multifactoriales proveen una alternativa atractiva al modelo unifactorial del CAPM, ya que requieren para su cumplimiento de condiciones no tan restrictivas como las del CAPM. Para ser capaces de utilizar el APT para poner precios a activos, es necesario conocer el número de factores a ser utilizado, este número no se conoce a priori, y por ello debe ser estimado de manera confiable. El propósito de esta tesina ha sido revisar y adaptar las pruebas sugeridas por Connor y Korajczyk (1993) para el número de factores a una muestra de acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores, si el número de factores obtenido resulta ser el adecuado, se tiene un método para valuar activos de manera confiable, siendo capaces de separar las componentes de riesgo o factores así como las primas de riesgo asociadas a ellas.

Para el caso de la muestra de 80 acciones que cotizan en la BMV es posible afirmar que existe un conjunto de tres a cinco factores que resultan ser suficientes para ponerle precio a la mayoría de los activos presentes en la economía, la calidad de la aproximación está supeditada al cumplimiento de algunos supuestos planteados en Chamberlain (1983b). Los factores pueden considerarse como activos persistentes que permiten cuantificar el riesgo que es imposible evitar en una economía con muchos activos, en otro sentido se dice que estos factores generan la frontera de portafolios eficiente en media-varianza.

BIBLIOGRAFIA

Anderson, T.W., 1984, An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, 2d. Ed. (Wiley, New York).

Brown, Stephen J., 1989, The Number of factors in security returns, *Journal of Finance* 44, 1247-1262.

Chamberlain, Gary and Michael Rotschild, 1983a, Arbitrage, Factor structure, and Mean-Variance Analysis on Large Asset Markets, *Econometrica*, 51, 1281-1304.

Chamberlain, Gary and Michael Rotschild, 1983b, Arbitrage and mean variance analysis on large asset markets, *Econometrica* 51, 1281-1304.

Chen, Nai-Fu, Richard Roll and Stephen A.Ross, 1986, Economic forces and the stock market, *Journal of Business* 59, 383-403.

Cho, D.Chinhyung, and William M.Taylor, 1987, The Seasonal atability of the factor strusture of stock returns, *Journal of Finance*, 42, 1195-1211.

Connor , Gregory and Robert A.Korajczyk, 1993, A test for the number of factors in an approximate factor model, *Journal of Finance* 48, 1263-1291.

Connor , Gregory and Robert A.Korajczyk, 1988, Risk and return in an equilibrium APT: Application of a new test methodology, *Journal of Financial Economics* 21, 255-289.

Dhrymes, Phoebus J., Irwin Friend, and N.Bulent Gultekin, 1984, A critical reexamination of the empirical evidence on the arbitrage pricing theory, *Journal of Finance* 39, 323-346.

Fama, Eugene F., and James D.Macbeth, 1973, Risk, return, and equilibrium: Empirical tests, *Journal of Political Economy* 71, 1213-1224.

Gultekin, Mustafa, and N.Bulent Gultekin 1987, Stock return anomalies and tests of the APT, *Journal of Finance* 42, 1195-1211.

Huang, C., and R. Litzenberger, 1988, Foundations for Financial Economics, North Holland, New York.

Huberman, G., 1982, A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory, *Journal of Economic Theory*, 28, 183-191.

Ingersoll, Jonathan E., Jr., 1984, Some results in the theory of arbitrage pricing, *Journal of Finance 39*, 1021-1039.

Keim, Donald.B, 1983, Size-related anomalies and stock return seasonality: Further empirical evidence, *Journal of Finance*, 12, 13-32.

Lehmann, Bruce N., and David M.Modest, 1988, The empirical foundations of the arbitrage pricing theory, *Journal of Financial Economics* 21, 213-254.

Lintner, J., 1965a, Security Prices, Risk,and Maximal Gains from Diversification,, *Journal of Finance*, 20, 587-615.

Luedecke, Bernd P., 1984, An empirical investigation into arbitrage and approximate *K*-factor structure on large asset markets, Doctoral dissertation, Department of Economics, University of Wisconsin.

Newey, Whitney K., and Kenneth D.West, 1987, A simple, positive semi-definite, heteroscedaticity and autocorrelation consistent covariance matrix, *Econometrica* 55, 703.708.

Roll, Richard, and Stephen A.Ross, 1980, An empirical investigation of the Arbitrage Pricing Theory, *Journal of Finance* 35, 1073-1103.

Ross, Stephen A., 1976, The arbitrage theory of capital asset priving , *Journal of Economic Theory* 13, 341-360.

Sharpe,W., 1964, Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, Journal of Finance, 19, 425-442.

Trzcinka, Charles, 1986, On the number of the factors in the arbitrage pricing model, *Journal of Finance* 41, 347-368.

White, Halbert, 1984, Asymptotic Theory for Econometricians (Academic Press, Orlando, Fla.).