



EL COLEGIO DE MÉXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN ECONOMÍA

**ANÁLISIS NUMÉRICO DE UN MODELO
DINÁMICO DE BURBUJAS DE LIQUIDEZ**

CÉSAR GABRIEL MILLÁN DÍAZ

PROMOCIÓN 2010-2012

ASESOR:

DR. JOSÉ MIGUEL TORRES GONZÁLEZ

CIUDAD DE MÉXICO 2019

Análisis numérico de un modelo dinámico de burbujas de liquidez

Resumen

La Crisis Financiera de 2007 nos ha recordado la importancia de entender las burbujas de liquidez, definidas como el aumento del valor y los beneficios de los activos financieros derivados de un exceso de liquidez. En particular, es importante entender las condiciones que las generan, así como la influencia que tienen en la inversión y los precios de los activos. Jean Tirole es uno de los líderes en el estudio riguroso de este tema, por lo que en este trabajo partimos de su reciente artículo escrito en colaboración con Fahri (2012), en el que se plantea un sistema dinámico para analizar la evolución e interacción de la inversión y el valor del activo 'burbuja', que es aquel que aumenta su valor en un escenario de abundancia de liquidez. Los exponentes característicos de Lyapunov son una herramienta natural para estudiar sistemas dinámicos, pero la dificultad de calcularlos analíticamente plantea la necesidad de buscar métodos numéricos para obtenerlos. Implementamos el algoritmo de Eckmann y Ruelle (1985) para calcular los exponentes de Lyapunov en el modelo de Fahri y Tirole y medir cuál es la rapidez con la que el precio del activo 'burbuja' y la inversión se ajustan después del estallido de la burbuja. Hasta donde sabemos, no sólo somos los primeros en analizar numéricamente el modelo de Fahri y Tirole, sino que además nuestro trabajo constituye una de las pocas aplicaciones de los exponentes de Lyapunov en economía clásica. Dos simulaciones del modelo sugieren que puede ser muy fructífero utilizar los exponentes de Lyapunov para estudiar sistemas económicos dinámicos, pues se lograron algunas conclusiones que hubieran sido imposibles de obtener mediante las técnicas tradicionales. Por ejemplo, encontramos que la convergencia de la inversión y el valor del activo 'burbuja' hacia el equilibrio del sistema sólo dependen de las condiciones del sistema financiero, tales como el grado de colateralización y la liquidez externa existente, y no de los valores iniciales de los precios de los activos, inversión y tasa de interés.

ÍNDICE GENERAL

1	Introducción	1
2	Un modelo de burbujas de liquidez	10
2.1	Descripción del modelo	10
2.2	Equilibrio competitivo	13
2.3	Deducción de las funciones de política	14
3	Sistemas dinámicos	15
3.1	Definiciones	16
3.2	Exponentes de Lyapunov	17
	Teorema de Oseledec	21
3.3	Algoritmo para el cálculo de los exponentes	23
4	Resultados	24
4.1	Resultados teóricos del modelo	24
	El modelo en ausencia de burbuja	24
	Burbujas	27
4.2	Análisis numérico	32
	Caso I: Liquidez externa positiva	33
	Caso II: Liquidez externa negativa	38
5	Consideraciones finales	39
	Referencias	42
	Apéndice: Código del programa	45

1. INTRODUCCIÓN

La esencia de la liquidez es la capacidad de poder reunir dinero para enfrentar las necesidades de gasto urgentes o inesperadas, de forma oportuna. La liquidez de mercado, por ejemplo, es la facilidad con la que los activos pueden ser vendidos sin que sufran una pérdida significativa de su valor. Si los mercados financieros fueran completos y perfectamente líquidos, las empresas y los hogares podrían siempre obtener efectivo al poner en garantía una fracción de sus ingresos futuros. La liquidez de mercado se basa en un fondo suficientemente grande de liquidez monetaria al cual recurrir, lo que la relaciona con un segundo aspecto de la misma: la cantidad de dinero que el banco central permite circular en la economía.

Los bancos comerciales juegan un papel fundamental en proveer liquidez, al proporcionar dinero a los hogares y a las empresas, a cambio de comprometer una fracción de sus ingresos futuros, por medio de hipotecas o préstamos. Los bancos no son la única fuente de liquidez; las grandes empresas se pueden allegar fondos vendiendo bonos y acciones directamente a los ahorradores en el mercado de capitales; es más, los bancos también pueden vender paquetes de sus propios préstamos como valores. Sin embargo, la liquidez en el sistema puede colapsar cuando esos paquetes están compuestos de préstamos de alto riesgo, como ocurrió en el caso de la Crisis Financiera de 2007.

Una burbuja de liquidez surge por aumentos en el valor y los beneficios de los activos financieros, derivados de un exceso de liquidez; por lo tanto, es fundamental entender su evolución y cómo afecta al sistema financiero en su conjunto. Para tal fin, en este trabajo ampliamos el análisis de este tema expuesto por Fahri y Tirole (2012), en el que proponen un modelo dinámico de generaciones traslapadas en el que los empresarios ofrecen y demandan liquidez, y donde pueden surgir burbujas dependiendo de los niveles de liquidez externa y la colateralización de los ingresos futuros. La dificultad de realizar un estudio cuantitativo profundo del tema con las técnicas

tradicionales de sistemas dinámicos planteó la necesidad de buscar alternativas, que permitieran medir, y no sólo describir, algunas variables de interés para nuestra investigación, como la rapidez de ajuste del valor de los activos relacionados con la burbuja y el nivel de inversión, dado el colapso de la economía descrita por el modelo. La escasez de literatura en economía al respecto nos obligó a explorar otra literatura.

En la actualidad, un gran número de campos de la ciencia, incluyendo economía, hacen uso de ecuaciones diferenciales o en diferencias para modelar fenómenos del mundo real. Sin embargo, muchas veces la propia naturaleza de estos problemas hacen que los sistemas dinámicos que los representan sean no lineales, dificultando o en algunos casos imposibilitando un estudio profundo de los mismos. Para sistemas lineales es posible caracterizar y describir detalladamente sus soluciones, mientras que para sistemas no lineales sólo es posible, la mayoría de las veces, caracterizar cualitativamente su comportamiento.

Avances logrados en las últimas décadas en matemáticas, física y computación han permitido desarrollar nuevas herramientas, abriendo oportunidades de investigación y aplicación que hace unos años hubieran sido imposibles. En este trabajo exponemos uno de los conceptos más importantes de la teoría de las propiedades estadísticas del comportamiento de los sistemas dinámicos: los exponentes característicos de Lyapunov. El enfoque estadístico es relevante cuando el sistema es «excitado» en algún parámetro, de tal manera que la información geométrica precisa acerca del punto fijo o de la dinámica, en el diagrama fase, se hace imprecisa o difícil de obtener; o cuando queremos información cuantitativa global acerca del sistema, que es imposible de obtener por medio del diagrama fase y los diagramas de bifurcación.

La teoría estadística de los sistemas dinámicos es capaz de distinguir entre diferentes grados de complejidad del movimiento del sistema, así como proporcionar formas de medir distintas propiedades de los mismos. En particular, los exponentes característicos de Lyapunov miden la tasa promedio de convergencia de trayectorias

que tienen condiciones iniciales cercanas. Por lo tanto, pueden ser empleados para medir la velocidad de ajuste de un sistema dada una perturbación en el punto inicial; para caracterizar y estudiar la estabilidad de puntos fijos o conjuntos límite; y verificar la sensibilidad al cambio en las condiciones iniciales, es decir, la presencia de atractores caóticos.

En economía esto puede ser útil al tratar de conocer información que *a priori* no es posible obtener de un sistema dinámico. Por ejemplo, ¿cuál es la velocidad de convergencia hacia un equilibrio y entre equilibrios? ¿Cómo influyen los parámetros o las condiciones iniciales en dicha velocidad de convergencia? En particular, en este trabajo calcularemos numéricamente los exponentes de Lyapunov para una simulación del modelo de Fahri y Tirole, con el fin de estudiar cómo se ve afectada la velocidad de convergencia de la inversión y la burbuja ante distintos escenarios de escasez o abundancia de liquidez y de las condiciones del sistema financiero.

Un primer hallazgo interesante que no hubiéramos podido obtener de otra manera es que la velocidad de ajuste de la inversión y el valor del activo son independientes de los valores que estas variables de estado tomen inicialmente, pero que dependen completamente de las condiciones propias del sistema financiero. Además, encontramos un resultado contraintuitivo: el ajuste es más lento cuando las condiciones para financiarse son mejores. Todavía es muy temprano para decir, pero esto pudiera apuntar a la necesidad de nuevas ideas para entender la liquidez (o a limitaciones del modelo de Fahri y Tirole).

Como vamos a ver a continuación, la literatura relevante para nuestro trabajo es escasa. Por un lado, un entendimiento riguroso de la liquidez sigue eludiendo a los economistas. Por otro lado, aunque no son nuevos, los exponentes de Lyapunov no han sido muy utilizados en economía. A continuación mencionamos la literatura relevante para el tema de las burbujas de liquidez y de los sistemas dinámicos.

A pesar de su importancia, el tema de las burbujas de liquidez había sido poco

explorado con rigor en la literatura económica, hasta hace unos años. Tirole (1985) trata un modelo con interacción entre ahorro productivo y no productivo en un modelo de generaciones traslapadas con acumulación de capital y distintos tipos de rentas, en el que encuentra condiciones necesarias y suficientes para la existencia una burbuja. Más aún, discute las distintas razones que pueden dar origen a una burbuja, tales como escasez del activo que la origina, el tratamiento y la incorporación de información nueva por parte de los agentes acerca de ese activo, y las creencias comunes que se generan a partir de dicha información.

Woodford (1990) y Kocherlakota (2009) destacan la importancia de los depósitos de valor en fomentar la inversión cuando el ingreso no se puede usar como colateral completo. En sus modelos asumen que las empresas son demandantes netos de liquidez, pero que no pueden ofrecer liquidez, al no poder usar como colateral ninguno de sus ingresos futuros. Por tanto, los resultados que obtienen difieren mucho de los del modelo que tratamos, pues no capturan el efecto que tiene el apalancamiento.

La idea de que las decisiones de inversión son complementos intertemporales es similar a la de Kiyotaki y Moore (1997). En ese modelo, la inversión futura aumentará el precio de los depósitos de valor, que es usado como insumo en el proceso de producción; este aumento futuro en el precio de los depósitos de valor aumenta el valor de la empresa y así la inversión de hoy, porque aumenta el apalancamiento. Sin embargo, el enfoque de Kiyotaki y Moore es distinto al nuestro y no tiene burbujas.

Caballero y Krishnamurthy (2006) desarrollan un modelo de burbujas en mercados emergentes, que son particularmente dependientes del financiamiento externo y pueden presentar problemas de agencia mayores que otros mercados más desarrollados. Muestran que en presencia de una burbuja estocástica frágil, la economía invierte excesivamente en el activo burbuja, quedando sobrepuesta a su estallido.

Finalmente, Holmström y Tirole (2011) reúnen en su libro un estudio de las razones por las que las instituciones financieras, empresas y familias prefieren poseer

activos líquidos, que tienen menores rendimientos, y cómo pueden el gobierno y los mercados financieros internacionales compensar la escasez de activos líquidos, permitiendo a los agentes compartir el riesgo con mayor eficacia. Plantean la relación entre la liquidez interna y externa a un sector y cómo la colateralización imperfecta de la renta de las empresas conduce a una demanda y a una escasez de liquidez, con implicaciones para la fijación de precios de los activos, las decisiones de inversión y la gestión de la liquidez. Muestran cómo este enfoque teórico puede ayudar a entender algunos aspectos de la Crisis Financiera de 2007.

Una referencia obligada al tratar sistemas dinámicos en economía es sin duda el libro de Stokey y Lucas (1989). No obstante, como los propios autores mencionan en el capítulo 6, sólo tratan los métodos clásicos para verificar la estabilidad local y global de los sistemas, pero dejan de lado literatura más específica, como la relacionada con comportamientos caóticos. Posiblemente ésta sea una de las razones por las que no encontramos alguna referencia al cálculo de las velocidades de convergencia de un sistema, más allá de lo que hicieron 10 años después Barro y Sala-i-Martin (1999). Por otra parte, como notaremos más adelante, cuando el libro de Stokey y Lucas fue publicado, apenas iniciaba el auge de los métodos numéricos para calcular los exponentes en física, por lo que difícilmente hubieran podido ser aplicados a algún modelo económico en ese entonces.

Lo más cercano a lo que mostramos en este trabajo se encuentra en algunos modelos de crecimiento económico, como los de Solow y Ramsey, cuyas exposiciones de libro de texto puede ser consultadas en Barro y Sala-i-Martin (1999). Sin embargo, consideramos que el método que presentamos tiene algunas ventajas sobre los empleados en esos modelos. Por ejemplo, en el modelo de Solow se calcula explícitamente el coeficiente de convergencia para luego obtener su valor de acuerdo a distintos escenarios de crecimiento poblacional, depreciación del capital y progreso tecnológico; nuestro método también es capaz de proporcionar una forma cerrada para los coeficientes de convergencia, pero cuando no es posible también puede ser implementado

numéricamente, siendo los supuestos requeridos para realizar los cálculos relativamente sencillos. Por otra parte, en el modelo de Ramsey se calculan los coeficientes de convergencia por medio de una log-linealización alrededor del estado estacionario; la desventaja de ese método es que las linealizaciones sólo son buenas aproximaciones cerca del punto fijo, mientras que nuestro método proporciona la velocidad de convergencia para cualquier valor de una trayectoria, sin importar su cercanía al equilibrio o si la trayectoria a la que pertenece converge o diverge.

Los problemas anteriores, así como la escasez de herramientas propias dentro de la literatura económica, nos obligaron a emplear técnicas de otras áreas de la ciencia en nuestra investigación. A continuación damos una presentación, desde un punto de vista histórico, de la literatura de los exponentes de Lyapunov, para poder apreciar su complejidad y el panorama más reciente de su aplicación en diversas disciplinas.

El inicio del estudio de la estabilidad de los sistemas dinámicos se remonta a finales del siglo XIX con la tesis doctoral del físico y matemático ruso A. M. Lyapunov, '*Problème générale de la stabilité du mouvement*' (1892), en la que desarrolla distintos métodos para estudiar y clasificar la estabilidad de los sistemas dinámicos, tales como los que actualmente se conocen como 'funciones de Lyapunov' y los 'exponentes característicos de Lyapunov'.

Los avances iniciales en el tema de los exponentes característicos fueron lentos, a pesar de que el trabajo de Lyapunov llamó de inmediato la atención de físicos, matemáticos y astrónomos de todo el mundo, por el gran potencial que tenía en diversas aplicaciones. Como se notará en la sección 3, la definición de los exponentes tiene varios detalles técnicos, que sólo pudieron resolverse hasta que la teoría de la medida avanzó significativamente y, además, es lo suficientemente no trivial para que no sean fáciles de calcular de manera explícita en la mayoría de los casos.

Por las razones anteriores, cobró especial relevancia buscar métodos eficientes para calcular numéricamente los exponentes. Sin embargo, tuvieron que pasar más

de 75 años hasta que Oseledec (1968) demostró el teorema que provee el fundamento teórico del cálculo numérico de los exponentes para el caso de un sistema no lineal (una discusión de todas las consecuencias y la importancia del teorema de Oseledec en la teoría ergódica, sistemas dinámicos y otras áreas de matemáticas se puede encontrar en Jost (2005)). Oseledec muestra que bajo ciertas condiciones de integrabilidad de la ecuación de estado del sistema, los exponentes existen para casi todo punto del espacio fase, respecto a una medida invariante.

Las ideas de la demostración del teorema de Oseledec están detrás de los algoritmos que fueron desarrollados en las décadas posteriores para calcular numéricamente los exponentes. Fue con Johnson, Palmer y Sell (1984) y Eckmann y Ruelle (1985) que surgieron los primeros algoritmos exitosos, tanto por salvar algunos problemas con los errores en las estimaciones como por el costo computacional de los mismos; en Wiggins (2003) se mencionan trabajos más recientes en los que se plantean algoritmos para sistemas dinámicos con características más particulares. En ambos artículos se plantean procedimientos similares para calcular los exponentes haciendo uso de la factorización de la matriz jacobiana del sistema; también discuten las diferencias existentes en la forma de calcular los exponentes dependiendo si el sistema es continuo o discreto.

También Eckmann y Ruelle discuten cómo estimar los exponentes de Lyapunov cuando se trabaja con datos reales, como por ejemplo, en experimentos físicos; mencionan y estudian algunas de las limitaciones que se tienen en este caso y cómo resolverlas, siendo las más relevantes aquellas relacionadas con la distribución de los datos y el hecho de que su método sólo puede calcular de manera confiable los exponentes positivos. Trabajos más recientes como el de Junhai, Yushu y Zengrong (1999) resumen varios años de investigación en la búsqueda de mejores métodos para calcular los exponentes de datos experimentales en física, que posiblemente podrían ser adaptados a economía.

A raíz de que los exponentes de Lyapunov pudieron ser calculados numéri-

camente han surgido distintas aplicaciones en varios campos, principalmente física, biología y meteorología. Salceanu y Smith (2009) dan condiciones suficientes para la persistencia de un equilibrio a lo largo del tiempo y aplican su resultado a un modelo planta-herbívoro mostrando bajo qué condiciones se pueden ver afectadas sus poblaciones; también lo aplican a un caso de infecciones por hongos, en los que encuentran algunas condiciones para que estas enfermedades sean endémicas.

Majda y Branicki (2012) presentan una aplicaciones de los exponentes de Lyapunov al estudio de turbulencias atmosféricas u oceánicas y cómo pueden ayudar a entender de manera más precisa la dinámica y e interacción de distintos tipos de fluidos, de acuerdo a los cambios en la temperatura y presión atmosférica. En una línea similar, Chen, Li y Ding (2006) brindan un algoritmo para calcular los exponentes de Lyapunov locales con datos de las condiciones meteorológicas en distintas regiones del mundo y los emplean para medir la eficacia de las predicciones meteorológicas y cómo varía a lo largo del año y entre distintas regiones.

Por otra parte, Gerencsér, Rásonyi y Vágó (2003) muestran distintas aplicaciones de una variante de los exponentes de Lyapunov a problemas de optimización, finanzas y biología. Por ejemplo, plantean un modelo en el que muestran que el cambio en el valor de un portafolio de divisas a lo largo del tiempo se aproxima al mayor exponente de Lyapunov del modelo.

Trabajos como el de Wu y Yang (2009) muestran cómo pueden emplearse los exponentes de Lyapunov para estudiar la estabilidad y el ruido presente en una serie de tiempo. Su trabajo es particularmente relevante cuando se trabaja con datos reales porque exponen técnicas para evitar que el valor de los exponentes se contamine con el ruido de la serie.

Finalmente, para una amplia exposición de los métodos de la teoría estadística de sistemas dinámicos y no sólo de los exponentes de Lyapunov, se recomienda consultar Johnson, Palmer y Sell (1984) y Eckmann y Ruelle (1985). Además, una revisión

de los aspectos geométricos de los sistemas dinámicos puede encontrarse en Eckmann (1981) y en Wiggins (2003).

Nuestro trabajo de investigación se estructura como sigue. En la sección 2 damos una breve introducción del modelo dinámico de burbujas de liquidez de Fahri y Tirole y se discuten las ideas intuitivas más relevantes que incorpora el modelo.

Posteriormente, en la sección 3 se presenta la teoría matemática referente a los exponentes característicos de Lyapunov; la subsección 3.1 presenta las definiciones básicas de sistemas dinámicos, en la subsección 3.2 se definen los exponentes de Lyapunov y se enuncian algunas de sus propiedades mientras que en la subsección 3.3 se discute el algoritmo empleado en este trabajo para calcular los exponentes. Cabe mencionar que se ha hecho el esfuerzo de que esta sección sea autocontenida, de manera que sirva de referencia para quien desee conocer los fundamentos matemáticos de los exponentes, y en la que se ha tratado de evitar hasta donde ha sido posible el exceso de detalles técnicos; sin embargo, aquellos que no ha sido posible eludir se han dejado con el propósito de evitar ambigüedades para el lector que desee consultar referencias más especializadas.

En la sección 4 presentamos los resultados teóricos y numéricos del modelos de Fahri y Tirole. La subsección 4.1 presenta los resultados analíticos del modelo, retomando la exposición de los autores, mientras que en la subsección 4.2 mostramos algunos ejemplos de las simulaciones y discutimos los resultados. El software empleado para la simulación fue *Mathematica 8*, con una implementación propia del algoritmo de Eckmann y Ruelle (1985). En cada caso mostramos el comportamiento del diagrama fase con los respectivos exponentes, así como las gráficas de los exponentes como funciones de la liquidez externa, el parámetro de colateralización y cada una de las condiciones iniciales, para mostrar la sensibilidad de cada uno de los exponentes a los parámetros y a los valores iniciales de la inversión y el valor del activo burbuja.

Por último, en la sección 5 damos algunos comentarios finales a manera de

conclusión, así como algunas posibilidades de investigación de cómo podría ampliarse el análisis del modelo de Fahri y Tirole con estas técnicas.

2. UN MODELO DE BURBUJAS DE LIQUIDEZ

En esta sección exponemos el modelo de Fahri y Tirole (2012), por lo que el lector que esté familiarizado con él puede omitirlo y pasar directamente a la sección 3, donde se expone la teoría de sistemas dinámicos relacionada con los exponentes de Lyapunov. En la sección 4 se retoma la exposición del modelo y se muestran los resultados de su análisis numérico.

Abordaremos el tema de las burbujas de liquidez con un modelo de generaciones traslapadas de empresarios neutrales al riesgo, que buscan maximizar su consumo esperado y cuya población es constante. Cada empresario vive por tres periodos: cuando son jóvenes, adultos o viejos; supondremos por simplicidad que sólo consumen cuando son viejos. Cada generación está indizada por el periodo en que nacieron, que corre desde $t = 0$ al infinito; en cada tiempo t la economía está habitada por los viejos (generación $t - 2$), los adultos (generación $t - 1$) y los jóvenes (generación t).

Se ha adoptado un marco de generaciones traslapadas porque es la manera más simple de modelar que en cualquier punto del tiempo, algunos empresarios son oferentes netos de liquidez mientras que otros son demandantes netos. Otra razón para adoptar un modelo de esta naturaleza es para capturar el hecho de que las tasas de interés pueden ser menores que la tasa de crecimiento de la economía, lo que da lugar a burbujas racionales.

2.1 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Hay un solo bien en la economía. Cuando son jóvenes, los empresarios de la generación t son provistos con una dotación inicial de A unidades del bien. Cuando son adultos, invierten i_{t+1} que producirán $\rho_1 i_{t+1}$ cuando son viejos. Sin embargo, sólo una fracción $\rho_0 i_{t+1} < \rho_1 i_{t+1}$ del retorno de la inversión usar como colateral, donde

$$\rho_1 > \rho_0 > 0.$$

En cada periodo, un mercado de liquidez permite a los empresarios prestar y pedir prestado, sujetos a las restricciones de crédito impuestas por la colateralización limitada de los ingresos futuros. La tasa de interés entre el periodo t y $t+1$ es $1+r_{t+1}$. En el equilibrio se tendrá la condición que ρ_0 es estrictamente menor que $1+r_{t+1}$ porque, de lo contrario, los empresarios podrían alcanzar una escala de inversión infinita. Dado que la colateralización es limitado, las empresas solo pueden depender parcialmente del financiamiento externo en la etapa de inversión. Por otra parte, sólo se analizará el equilibrio en el que $\rho_1 > 1+r_{t+1}$, de tal manera que las oportunidades de inversión son proyectos de valor presente neto estrictamente positivo.

La asincronía entre la disponibilidad de efectivo, junto con la colateralización imperfecta de los flujos de efectivo de la inversión, dan lugar a la demanda de liquidez de los empresarios jóvenes, que compran activos en su juventud con su dotación inicial y los venden cuando son adultos y se presenta una oportunidad de inversión atractiva que sólo puede ser parcialmente financiada por el mercado. A su vez, los empresarios adultos son oferentes de liquidez, pues ofrecen activos que capitalicen los flujos de efectivo garantizables de sus proyectos de inversión.

En el modelo intervienen distintas formas de liquidez. Por una parte está la **liquidez interna**, integrada por activos producidos por empresarios adultos de la generación t cuando garantizan una fracción de retorno de sus proyectos; por otra parte, la **liquidez externa** está formada por activos que se originan en otro sector de la economía; las burbujas son parte de la liquidez externa.

Para modelar la liquidez externa, consideremos que en cada tiempo t , hay una oferta neta de l unidades de 'árboles de Lucas'¹ que pagan una unidad del bien en $t+1$ cada uno. La burbuja, en cambio, es un activo que no paga dividendos. Denotaremos por $b_t \geq 0$ el valor de la burbuja al tiempo t .

¹Lucas (1978).

Todos los activos del modelo son libres de riesgo y la imposibilidad de arbitraje requiere que todos los activos tengan la misma tasa de retorno $1 + r_{t+1}$ entre t y $t + 1$.

Los empresarios invierten toda su dotación inicial en activos y usan sus ahorros cuando son adultos como fondos para sus proyectos de inversión. En su juventud, los empresarios de la generación t deben decidir cuánto gastar en árboles A_t^l , cuántos activos burbuja adquirir A_t^b y qué proporción de la dotación A_t^i invertir en títulos emitidos por los empresarios de la generación $t - 1$. De esta manera, la dotación se reparte en cada periodo de la manera siguiente:

$$A = A_t^l + A_t^b + A_t^i.$$

Los recursos totales para invertir en $t + 1$ por parte de los empresarios de la generación t provienen de dos fuentes. La primera, de recaudar $\rho_0 i_{t+1} / (1 + r_{t+2})$ por medio de vender valores que conceden el derecho a un pago de $\rho_0 i_{t+1}$ en el periodo $t + 2$; la segunda fuente se origina de la liquidación del portafolio por un valor $(1 + r_{t+1})[A_t^l + A_t^b + A_t^i]$. Es decir,

$$i_{t+1} = \frac{\rho_0 i_{t+1}}{1 + r_{t+2}} + (1 + r_{t+1})[A_t^l + A_t^b + A_t^i],$$

o equivalentemente,

$$i_{t+1} = \frac{(1 + r_{t+1})[A_t^l + A_t^b + A_t^i]}{1 - \frac{\rho_0}{1 + r_{t+2}}}. \quad (1)$$

Como se puede notar de la expresión en (1), la inversión i_{t+1} se incrementa con el **valor neto** $(1 + r_{t+1})[A_t^l + A_t^b + A_t^i]$ del portafolio al tiempo cuando la inversión es hecha; en cambio, el **multiplicador de la inversión** $1/[1 - \frac{\rho_0}{1 + r_{t+2}}]$ es una medida del apalancamiento, que se incrementa con la fracción del ingreso que se puede emplear como colateral ρ_0 , y que disminuye con la tasa de interés $1 + r_{t+2}$ a través del decremento del valor del colateral generado por el proyecto.

2.2 EQUILIBRIO COMPETITIVO

Las proporciones de la dotación que se destinan a adquirir el portafolio son $A_t^l = l/(1 + r_{t+1})$, $A_t^b = b_t$ y $A_t^i = \rho_0 i_t/(1 + r_{t+1})$. De esta manera, la economía se puede representar recursivamente por medio de dos variables de estado: la inversión i_t y la burbuja b_t . El comportamiento de estas variables se describe por la ecuación dinámica de la burbuja y las ecuaciones para la oferta y demanda de activos.

Dinámica de la burbuja. Ante la ausencia de arbitraje, la burbuja debe crecer con la tasa de interés,

$$b_t = (1 + r_t)b_{t-1}. \quad (2)$$

Oferta de activos. La ecuación de oferta muestra cómo la inversión de la generación $(t - 1)$ está restringida por la liquidez disponible, $l + b_t + \rho_0 i_{t-1}$ y por el ingreso relacionado con la inversión garantizable, $\rho_0 i_t/(1 + r_{t+1})$,

$$i_t = \frac{\rho_0 i_t}{1 + r_{t+1}} + [l + b_t + \rho_0 i_{t-1}],$$

que se puede expresar como

$$i_t = \frac{l + b_t + \rho_0 i_{t-1}}{1 - \frac{\rho_0 i_t}{1+r_{t+1}}}. \quad (3)$$

Demanda de activos. La ecuación de demanda indica que la dotación de la generación t se gasta en comprar liquidez externa, activos burbuja y en adquirir activos generados por la inversión de la generación previa,

$$A = A_t^l + A_t^b + A_t^i = \frac{l}{1 + r_{t+1}} + b_t + \frac{\rho_0 i_t}{1 + r_{t+1}},$$

que se puede reescribir como

$$i_t = \frac{(A - b_t)(1 + r_{t+1}) - l}{\rho_0}. \quad (4)$$

Con todo lo anterior definimos un equilibrio competitivo en esta economía como sigue.

Definición 1. Se define un equilibrio competitivo como una sucesión $\{i_t, b_t, r_t\}_{t \geq 0}$, con condiciones iniciales de inversión y burbuja (i_0, b_0) que satisfacen las ecuaciones de la dinámica de la burbuja (2), de oferta (3) y de demanda de activos (4), además de que para todo $t \geq 0$, $i_t \geq 0$, $b_t \geq 0$ y $\rho_0 \leq 1 + r_t \leq \rho_1$.

2.3 DEDUCCIÓN DE LAS FUNCIONES DE POLÍTICA

Para poder describir la dinámica del modelo, calcularemos las funciones de política $i_t = \Phi^i(i_{t-1}, b_{t-1})$, $b_t = \Phi^b(i_{t-1}, b_{t-1})$ y $r_t = \Phi^r(i_{t-1}, b_{t-1})$ que describen los niveles de inversión, burbuja y tasa de interés del periodo t en términos de la inversión y la burbuja del periodo anterior.

De la ecuación (4) se despeja r_{t+1} , cuya expresión se sustituye en la ecuación (3), obteniéndose la ecuación cuadrática

$$i_t^2 - \left[A + \rho_0 i_{t-1} - l \left(\frac{1}{\rho_0} - 1 \right) \right] i_t - l \frac{l + b_t + \rho_0 i_{t-1}}{\rho_0} = 0. \quad (5)$$

Dada una solución para esta ecuación, se puede calcular la tasa de interés al despejar $1 + r_{t+1} = (\rho_0 + i_t)/(A - b_t)$ de la ecuación de demanda (4). Cuando $l \geq 0$, una condición necesaria para el equilibrio es que $b_t < A$. En cambio, cuando $l \leq 0$ puede ser posible que $b_t < A$ o $b_t \geq A$. Si suponemos que $b_t < A$, la única solución no negativa de la ecuación (5) que además satisface $1 + r_{t+1} \geq \rho_0$ es

$$\Phi^i(i_{t-1}, b_{t-1}) \equiv \frac{A + \rho_0 i_{t-1} - \left(\frac{1}{\rho_0} - 1 \right) l + \sqrt{\left[A + \rho_0 i_{t-1} - \left(\frac{1}{\rho_0} - 1 \right) l \right]^2 + 4 \frac{l}{\rho_0} (b_{t-1} + l + \rho_0 i_{t-1})}}{2}. \quad (6)$$

Usando la ecuación de demanda de activos se calcula la tasa de interés $1 + r_{t+1} = 1 + \Phi^r(i_{t-1}, b_{t-1})$, donde

$$1 + \Phi^r(i_{t-1}, b_{t-1}) \equiv \frac{A + \rho_0 i_{t-1} + \left(\frac{1}{\rho_0} + 1 \right) l + \sqrt{\left[A + \rho_0 i_{t-1} - \left(\frac{1}{\rho_0} - 1 \right) l \right]^2 + 4 \frac{l}{\rho_0} (b_{t-1} + l + \rho_0 i_{t-1})}}{2(A - b_{t-1})}. \quad (7)$$

Finalmente, con la expresión anterior para la tasa de interés podemos calcular la expresión para la burbuja sustituyendo en la ecuación (2), con lo que se obtiene

$$\Phi^b(i_{t-1}, b_{t-1}) \equiv \frac{\Lambda + \rho_0 i_{t-1} + \left(\frac{1}{\rho_0} + 1\right) l + \sqrt{\left[\Lambda + \rho_0 i_{t-1} - \left(\frac{1}{\rho_0} - 1\right) l\right]^2 + 4\frac{l}{\rho_0} (b_{t-1} + l + \rho_0 i_{t-1})}}{2(\Lambda - b_{t-1})} b_{t-1}. \quad (8)$$

Ahora consideraremos el caso cuando $l < 0$ y $b_t \geq \Lambda$. En este caso (6) también es solución a la ecuación (5), con $i_t \geq 0$ y $1 + r_{t+1} \geq \rho_0$, si y sólo si su discriminante es no negativo y $\Lambda - b_t - l/\rho_0 > b_t + l + \rho_0 i_{t-1}$. Por lo tanto, bajo estas condiciones las expresiones (6), (7) y (8) también son funciones de política para la inversión, tasa de interés y burbuja.

La ecuación dinámica a la que se le calcularán los exponentes de Lyapunov está definida por las funciones de política para la inversión (6) y para la burbuja (8), que acaban de ser deducidas:

$$f(i_{t-1}, b_{t-1}) = \begin{pmatrix} \Phi^i(i_{t-1}, b_{t-1}) \\ \Phi^b(i_{t-1}, b_{t-1}) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Esta ecuación describe en forma vectorial la evolución de la inversión y la burbuja a lo largo del tiempo. A continuación exponemos la teoría de sistemas dinámicos, para retomar el análisis del modelo de Fahri y Tirole en la sección 4.

3. SISTEMAS DINÁMICOS

En esta sección se sigue a Wiggins (2003) y Eckmann y Ruelle (1985), que son excelentes referencias tanto para sistemas continuos como discretos; sin embargo, nos enfocaremos principalmente en el caso discreto, dado que el modelo al que aplicaremos la técnica de los exponentes define un sistema de este tipo. No obstante, todas las interpretaciones que se hagan de los exponentes serán válidas para ambas clases de sistemas. Únicamente presentamos las definiciones y los enunciados de los teoremas sin demostración, por lo que se recomienda al lector que desee profundizar en el tema acudir a las fuentes citadas al inicio de la sección.

3.1 DEFINICIONES

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ define un **sistema dinámico de tiempo discreto n-dimensional** por medio de la ecuación de estado

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t \in \mathbb{N},$$

donde $x_t \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema al tiempo t y f mapea x_t al estado x_{t+1} .

Se conoce como **espacio fase** al espacio de variables dependientes del sistema, que en nuestro caso será \mathbb{R}^n . Dado un estado inicial $x_0 \in U$, repetidas aplicaciones o iteraciones de f generan la **trayectoria** u **órbita**, que es el conjunto discreto de puntos $\{f^t(x_0) | t \in \mathbb{N}\}$, donde f_t es la composición de f por t veces.

Uno de los principales propósitos de la teoría de sistemas dinámicos es el estudio del comportamiento de los estados estacionarios, que es la descripción cualitativa y cuantitativa de la evolución asintótica del sistema cuando $t \rightarrow \infty$. Para este fin, introducimos la definición de conjunto límite.

Un punto p es un **punto ω -límite** de x si existen puntos f^{t_1}, f^{t_2}, \dots en la trayectoria de x tales que $f^{t_i} \rightarrow p$ cuando $t_i \rightarrow \infty$. El **conjunto ω -límite** $\Omega(x)$ es el conjunto de todos los puntos ω -límite de x . Más aún, un conjunto Ω es un conjunto **atractor** si existe una vecindad abierta U de $\Omega(x)$ tal que $\Omega(x) = \Omega$ para todo $x \in U$. La **región de atracción** B_Ω de un conjunto atractor Ω es la unión de todas las vecindades U , es decir, B_Ω consiste de todas las condiciones iniciales que tienden hacia Ω cuando $t \rightarrow \infty$.

En las aplicaciones sólo son de interés los conjuntos atractores, ya que los conjuntos no atractores no pueden ser observados en sistemas reales y en simulaciones. Como se verá más adelante, los exponentes característicos de Lyapunov serán de ayuda para clasificar los sistemas de acuerdo a su evolución asintótica.

Un sistema dinámico puede tener uno o varios conjuntos atractores, cada uno con su correspondiente región de atracción. En cada caso, la condición inicial determina a cuál conjunto tenderá la trayectoria. Existen cuatro tipos fundamentales de

conjuntos límite:

Punto fijo atractor Un punto fijo es un punto x en el espacio fase tal que $f^t(x) = x$ para todo t .

Órbita periódica. Decimos que el conjunto $\{P_1, \dots, P_n\}$ es una órbita periódica, de periodo n , si $f(P_1) = P_2, f(P_n) = P_1$ y cada P_i es un punto fijo atractor.

Movimientos cuasi-periódicos. Una solución cuasi-periódica de un sistema dinámico es una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que puede ser representada en la forma $f(t) = H(\omega_1 t, \dots, \omega_q t)$, donde H es una función periódica en cada argumento.

Movimientos caóticos. Sin dar una definición precisa, diremos que los atractores caóticos están caracterizados por trayectorias estables acotadas con un comportamiento aleatorio, que convergen a un conjunto del espacio fase, llamado **atractor extraño** que no tiene una formas sencillas como los atractores anteriores y que presentan sensibilidad a las condiciones iniciales, por lo que trayectorias caóticas divergen localmente unas de otras y pequeños cambios en las condiciones iniciales conducen a cambios rápidos en la evolución del sistema.

3.2 EXPONENTES DE LYAPUNOV

Los exponentes de Lyapunov proveen una medida cuantitativa de la convergencia o divergencia de trayectoria inicialmente cercanas. Imaginemos una pequeña esfera de condiciones iniciales en el espacio fase; con el tiempo, después de aplicar la ecuación de estado del sistema a la esfera, ésta se alargará en las direcciones más inestables y se contraerá en las direcciones más estables, como se ilustra en la figura 1.

Definiremos los exponentes de Lyapunov para el caso unidimensional, para motivar la definición, y posteriormente lo generalizaremos. Consideremos puntos cercanos x_0 y \hat{x}_0 en $U \subset \mathbb{R}$. Denotemos por $|\cdot|$ al valor absoluto. Después de n periodos las órbitas están separadas por

$$|\hat{x}_n - x_n| = |f^n(\hat{x}_0) - f^n(x_0)| = |T(\hat{x}_0, x_0)|.$$

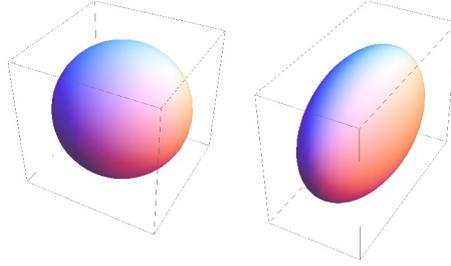


Figura 1: La primera imagen representa una pequeña esfera de condiciones iniciales ($t = 0$) en el espacio fase. Después de aplicar la ecuación de estado a cada una de las condiciones iniciales de la esfera, ésta evoluciona como se muestra en la segunda imagen, alargándose en las direcciones más inestables y estrechándose en las direcciones donde hay convergencia. Los exponentes de Lyapunov cuantifican la distorsión en cada dirección.

Tomando x_0 como constante, expandiendo $T(\hat{x}_0)$ en una serie de Taylor alrededor de $\hat{x}_0 = x_0$, reteniendo sólo el término de primer orden y por la regla de la cadena, tenemos

$$\hat{x}_n - x_n \approx \left. \frac{df^n}{dx} \right|_{\hat{x}_0=x_0} (\hat{x}_0 - x_0) = [f'(x_0)f'(x_1) \cdots f'(x_{n-1})] (\hat{x}_0 - x_0),$$

donde, recordemos, $x_i = f^i(x_0)$. Suponiendo que la derivada es diferente de cero, la aproximación puede hacerse arbitrariamente precisa tomando $|\hat{x}_0 - x_0|$ arbitrariamente pequeño. Asintóticamente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{x}_n - x_n| \approx e^{n\lambda(x_0)} |\hat{x}_0 - x_0|,$$

donde la cantidad

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |f'(x_0)f'(x_1) \cdots f'(x_{n-1})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln |f'(x_j)| \quad (10)$$

(asumiendo que el límite anterior existe²) es llamado el **exponente característico de Lyapunov**. En el caso unidimensional tenemos lo siguiente:

1. Si la trayectoria de x_0 converge a una órbita periódica (los puntos fijos son de periodo 1), entonces $\lambda(x_0) = 0$.

²Más adelante, cuando se discuta el teorema de Oseledec, se explicará bajo qué condiciones existe el límite.

2. Si la órbita de x_0 es inestable, entonces $\lambda(x_0) > 0$.
3. Si la órbita de x_0 no es periódica o asintóticamente periódica pero acotada y $\lambda(x_0) > 0$, entonces la órbita es caótica.
4. Si x_0 converge a una órbita cuasiperiódica, $\lambda(x_0) = 0$.

Consideremos el siguiente ejemplo en tiempo continuo, dado por la ecuación

$$\dot{x} = \alpha x, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde α es una constante. Esta ecuación tiene tres órbitas, $x = 0$, $x > 0$ y $x < 0$, donde la solución para cada órbita está dada por

$$X(t) = e^{\alpha t}.$$

Cada órbita tiene un solo exponente de Lyapunov que es precisamente α . Si $\alpha > 0$ el sistema se expande exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$.

En el caso multidimensional, el cálculo de los exponentes de Lyapunov puede ser hecho de manera similar, aunque un poco más compleja. Como antes, consideremos el mapeo $x_{n+1} = f(x_n)$ donde ahora $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m) \in \mathbb{R}^m$ y $f = (f_1, \dots, f_m)$ es un vector de funciones tales que $f_l : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, para $l = 1, \dots, m$. Al igual que en el caso unidimensional, consideremos las órbitas cercanas que se generan en x_0 y en \hat{x}_0 . La tasa de cambio de la distancia entre ellas (donde la distancia es medida por la norma euclidiana en \mathbb{R}^m) evoluciona bajo la acción del mapeo f de acuerdo a la razón

$$\frac{\|f^n(\hat{x}_0) - f^n(x_0)\|}{\|\hat{x}_0 - x_0\|}.$$

Como queremos conocer la evolución en el tiempo de estas órbitas cercanas, tomamos el límite cuando $\hat{x}_0 \rightarrow x_0$, y por la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{\|Df^n(x_0)w\|}{\|w\|} = \frac{\left\| \prod_{i=0}^{n-1} Df(x_i)w \right\|}{\|w\|},$$

donde $x_i = f^i(x_0)$; para cada $i = 1, \dots, n-1$, $Df(x_i)$ es la matriz ($m \times m$) cuyo elemento típico es $[\partial f_i / \partial x_i^j]$, x_i^j es el elemento j del vector x_i y w es un vector en el espacio tangente a x_0 . Análogamente al caso unidimensional, queremos conocer el valor de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\|Df^n(x_0)w\|}{\|w\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|Df^n(x_0)w\|,$$

asumiendo que dicho límite existe. Notemos que bajo la acción de la matriz $Df^n(x_0)$ el vector w puede ser alargado o acortado. Recordando que $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$, donde (\cdot, \cdot) denota el producto interno, la norma de la imagen de w bajo la acción de la matriz $Df^n(x_0)$ será

$$\begin{aligned} \|Df^n(x_0)w\| &= (Df^n(x_0)w, Df^n(x_0)w)^{1/2} \\ &= (w^T [Df^n(x_0)]^T Df^n(x_0) w)^{1/2}, \end{aligned}$$

donde la matriz $[Df^n(x_0)]^T Df^n(x_0)$ es positiva definida. La matriz $[Df^n(x_0)]^T Df^n(x_0)^{1/2}$ determina en qué medida las longitudes son expandidas o contraídas bajo la acción de $Df^n(x_0)$. La tasa promedio de contracción o expansión por cada iteración está dada por $(Df^n(x_0)w, Df^n(x_0)w)^{1/2n}$. En el límite cuando $n \rightarrow \infty$ los eigenvalores de la matriz

$$\Lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [Df^n(x_0)]^T Df^n(x_0)^{1/2n} \quad (11)$$

son llamados los **números característicos de Lyapunov** y sus logaritmos, los **exponentes característicos de Lyapunov**, que miden la tasa exponencial promedio de la contracción o expansión del vector w^3 en cada uno de los ejes coordenados. Esta interpretación de los exponentes será de utilidad para este trabajo, pues una mayor tasa de contracción en una dirección significará una mayor velocidad de convergencia.

Hay varias observaciones respecto a la definición anterior:

1. Los exponentes de Lyapunov son cantidades asintóticas. Por lo tanto, para poder calcularlos debemos saber si $f^n(x_0)$ existe para todo n . Además, únicamente nos

³En nuestro caso, sólo nos interesará el vector w que es tangente a la dirección de la órbita desde el punto inicial, dado que nos interesa conocer cómo se comporta la convergencia o divergencia a lo largo de esa trayectoria.

dan información acerca de la convergencia o divergencia de una trayectoria, pero nada acerca de la curvatura que pudiera experimentar.

2. Los exponentes son invariantes si se consideran distintos puntos como condiciones iniciales sobre la misma órbita. Es decir, $\lambda_i(x_0, w) = \lambda_i(f^n(x_0), w)$ para todo exponente i y para todo tiempo $n \in \mathbb{N}$. Esto también es consecuencia de que los exponentes son cantidades asintóticas.

Como se mencionó anteriormente, los exponentes de Lyapunov calculados para una órbita arbitraria pueden ser usados para clasificar distintos tipos de atractores:

1. Para puntos fijos asintóticamente estables de un sistema m -dimensional, discreto o continuo, tendremos m exponentes de Lyapunov negativos. Esto ocurre porque en un punto fijo estable, la distancia entre órbitas que tienen diferentes condiciones iniciales en la región de atracción tiende a decrecer cuando las órbitas se acercan al valor de equilibrio.
2. En todos los demás casos, los sistemas continuos tendrán al menos un exponente igual a cero.
3. Para órbitas periódicas o atractores cuasi-periódicos de sistemas continuos tendremos $m - n$ exponentes negativos ($n < m$) y n exponentes iguales a cero, con $n = 1$ para órbitas periódicas y $n > 1$ para dinámicas cuasi-periódicas.
4. Los atractores caóticos, tanto discretos como continuos, se asocian con la presencia de al menos un exponente positivo, lo que señala que el espacio fase diverge exponencialmente en la dirección correspondiente. También significa que los errores de observación serán amplificados por la acción del mapeo.

Teorema de Oseledec

Se ha insistido en la existencia de los límites en (10) y (11). Los elementos para demostrar que esos límites existen se encuentran en la teoría ergódica; para el caso

unidimensional el teorema de Birkhoff-Kinchine asegura que el límite (10) existe para casi todo elemento del espacio fase, respecto a una medida invariante.⁴ El teorema de Birkhoff-Kinchine no puede ser aplicado al caso multidimensional, porque $Df(x)$ no es un escalar, sino una matriz no conmutativa, por lo que su producto a lo largo de la órbita

$$Df^n(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} Df(x_i)$$

depende del orden en el que las matrices son multiplicadas. El producto de las normas sí es conmutativo pero, a causa de las propiedades de las normas

$$\|Df^n(x_0)\| \leq \prod_{i=0}^{n-1} \|Df(x_i)\|$$

y, tomando logaritmos,

$$\ln \|Df^n(x_0)\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \ln \|Df(x_i)\|,$$

que si fuera igualdad sería análoga a la expresión para el límite (10) del caso unidimensional. Sin embargo, el teorema de Oseledec (1968), uno de los más importantes en el estudio de los exponentes de Lyapunov, extiende la teoría ergódica para el caso multidimensional. Para un vector w tangente a x en el espacio fase de dimensión m y dada una función f que preserva una medida μ , este teorema demuestra que:

1. El límite

$$\lambda(x, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |Df^n(x_0)w| \tag{12}$$

existe para μ -casi todos los puntos x en el espacio fase.

2. Si μ es ergódica, los exponentes son constantes μ -casi en todas partes; es decir, no dependen de las condiciones iniciales (salvo en conjuntos de medida cero).

⁴Los detalles acerca de cómo se define esa medida y sus propiedades puede ser consultada en Wiggins (2003).

3.3 ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LOS EXPONENTES

Excepto en unos pocos casos, no podemos evaluar los exponentes de Lyapunov de mapeos no lineales de manera explícita, por lo que se recurre a calcularlos numéricamente. Existen distintos métodos, basados en diferentes propiedades de los exponentes y adaptados a sistemas con características particulares. El algoritmo que presentamos aquí, de Eckmann y Ruelle (1985), sigue de cerca el procedimiento descrito para definir los exponentes en el caso multidimensional. Recordemos que, por la regla de la cadena,

$$Df^n(x_0) = J(x_0)J(f(x_0)) \cdots J(f^{n-1}(x_0)),$$

donde $J(y) = Df(x)|_{x=y}$. En el caso del modelo de burbujas de liquidez, la función f está definida por la identidad (9), formada por las funciones de política de para la inversión y la burbuja deducidas en la subsección 2.3.

Los pasos del algoritmo son los siguientes:

1. Se define la condición inicial x_0 . En nuestro caso, la condición inicial se define por el vector de las condiciones iniciales para la inversión, i_0 , y la burbuja, b_0 .
2. Factorizamos la matriz $J(x_0) = Q_1 R_1$ por medio de la descomposición QR, donde Q_1 es una matriz ortogonal y R_1 es una matriz triangular superior.
3. Para $k = 2, 3, \dots, n$, definimos

$$J_k^* = J(f^{k-1}(x_0))Q_{k-1}$$

y descomponemos $J_k^* = Q_k R_k$. Por lo tanto, $Df^n(x_0) = Q_n R_n \cdots R_1$.

4. Se puede demostrar que los elementos $v_{ii}^{(n)}$ de la diagonal del producto de matrices triangulares $R_n \cdots R_1$ satisfacen que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln v_{ii}^{(n)} = \lambda_i$$

donde λ_i es el i -ésimo exponente de Lyapunov. Por lo tanto, en cada iteración k se calcula $\frac{1}{k} \ln v_{ii}^{(k)}$ y se repite hasta que todas estas cantidades convergen.

Ventajas:

- Su sencillez para ser implementado en la computadora, pues no se requieren operaciones complicadas para realizarlo. La factorización QR es una de las más comunes, sencillas y poderosas para descomponer matrices.
- Es el algoritmo que sigue más de cerca la deducción teórica de los exponentes.

Desventajas:

- Sólo se puede aplicar si se conoce la ecuación de estado del sistema, por lo que si se desea calcular los exponentes a partir de datos, es necesario utilizar otros métodos que permitan deducir la ecuación de estado o su derivada.
- Aún si se conoce la ecuación de estado del sistema, requerimos que $f^n(x_0)$ y $Df^n(x_0)$ existan en toda la órbita. Si esto no ocurre, también se deben buscar otros métodos que aproximen los exponentes deduciéndolos de otras medidas del sistema.

4. RESULTADOS

En esta sección presentamos el análisis numérico del modelo dinámico de Fahri y Tirole, al aplicar las técnicas de la sección 3 al modelo de la sección 2. En la subsección 4.1 retomamos el modelo original para mostrar sus consecuencias teóricas más relevantes. En la subsección 4.2 presentamos ejemplos de simulaciones, para algunos casos de interés.

4.1 RESULTADOS TEÓRICOS DEL MODELO

El modelo en ausencia de burbuja

Para poder entender la dinámica del modelo, nos centraremos en principio en el caso cuando no existe una burbuja en la economía. Este caso proporciona algunas

intuiciones que se mantienen cuando emerge la burbuja y nos permitirá entender la dinámica de la economía en este caso particular.

Como no existe una burbuja en la economía, $b_0 = 0$, lo que implica que $b_t = 0$ para todo t . Por lo tanto la economía se representa por un sistema dinámico unidimensional con variable de estado i_t .

La ecuación de oferta de activos (3) describe la inversión i_t como una función decreciente de la tasa de interés $1 + r_{t+1}$; cuando $1 + r_{t+1}$ crece de ρ_0 a infinito, la curva de oferta decrece de infinito a $(l + \rho_0 i_{t-1})$. La ecuación de demanda de activos (4) determina la inversión i_t como una función creciente de $1 + r_{t+1}$ de $A - l/\rho_0$ a infinito. La intersección de las curvas de oferta y demanda determinan los valores de $i_t > 0$ y de $1 + r_{t+1} > \rho_0$, que están dados por los valores de las funciones de política $i_t = \Phi^i(i_{t-1}, 0)$ y $r_{t+1} = \Phi^r(i_{t-1}, 0)$.

Estado estacionario

Para encontrar el equilibrio (i^*, r^*) en esta economía, imponemos las condiciones $i_{t-1} = i_t = i^*$ y $r_{t+1} = r^*$ en las ecuaciones de oferta y demanda de activos, para obtener el sistema

$$i^* = \frac{l + \rho_0 i^*}{1 - \frac{\rho_0}{1+r^*}} \quad \text{y} \quad i^* = \frac{A(1+r^*) - l}{\rho_0}. \quad (13)$$

Existe una única solución con $i^* \geq 0$ y $1 + r^* > \rho_0$. La deducción de la solución a este sistema sigue un procedimiento similar al realizado para las funciones de política de la sección 2.3 y puede ser consultado en Fahri y Tirole, al igual que la demostración de la siguiente proposición, que establece la estabilidad del equilibrio.

Proposición 1. *Sea $\{i_t, r_t\}$ un equilibrio competitivo de la economía sin burbuja. Entonces la economía converge al equilibrio sin burbuja: i_t converge de manera monótona a i^* .*

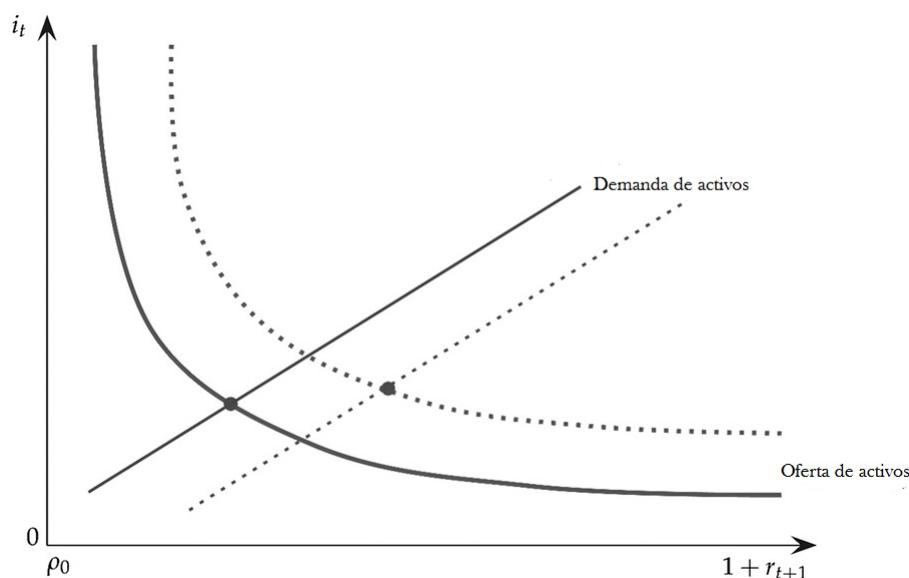


Figura 2: Curvas de oferta y demanda de activos. Las curvas punteadas representan los efectos de un incremento en l o b_t .

Efectos de la liquidez interna y externa

Ahora analizaremos cómo influyen los distintos tipos de liquidez en la oferta y demanda de activos y, por lo tanto, en su equilibrio. En primer lugar, consideremos un aumento en la liquidez i_{t-1} . Esto genera un aumento de i_t en la ecuación de oferta, lo que eleva la curva de oferta (3), pero no tiene efecto en la curva de demanda (4). El resultado es un incremento en la inversión i_t y en la tasa de interés $1 + r_{t+1}$.

Veamos el impacto de la liquidez l en la inversión i_t para un i_{t-1} dado. Un incremento en la liquidez externa l genera un desplazamiento hacia arriba en la curva de oferta de activos, pero un desplazamiento hacia abajo en la curva de demanda. La tasa de interés se incrementa, pero el efecto en la inversión i_t es ambiguo. Sin embargo, usando la ecuación de oferta de activos

$$i_t = \frac{l + \rho_0 i_{t-1}}{1 - \frac{\rho_0 i_t}{1 + r_{t+1}}}$$

podemos descomponer el impacto del aumento en la liquidez externa en dos efectos. Por una parte, el aumento en la liquidez externa l genera un aumento en el valor del

portafolio $l + \rho_0 i_{t-1}$ de los empresarios adultos al tiempo t , lo que se conoce como **efecto liquidez**. Por otra parte, como se acaba de notar, el incremento en la liquidez externa eleva la tasa de interés, lo que provoca que el multiplicador del apalancamiento

$$\frac{1}{1 - \frac{\rho_0 i_t}{1+r_{t+1}}}$$

disminuya, reflejando el hecho de que el financiamiento es más difícil cuando las tasas de interés son elevadas, conociéndose esto como **efecto apalancamiento**.

Intuitivamente, las empresas demandan liquidez, lo que hace complementos a la inversión y la liquidez externa. Sin embargo, las inversiones realizadas por el sector privado también desempeñan el papel de la liquidez interna, que entra en competencia directa con la liquidez externa, provocando que la inversión y la liquidez externa sean sustitutos. De manera intertemporal, la liquidez existente, formada por la liquidez interna i_{t-1} y por la liquidez externa l , son complementos de la inversión contemporánea. Sin embargo, la liquidez externa futura y la inversión contemporánea son sustitutos, dependiendo el valor de la tasa de interés, lo que provocaría que se prefiera uno u otro, de acuerdo al efecto apalancamiento.

El caso sin liquidez externa

El caso cuando $l = 0$ será importante para entender algunos efectos cuando existen burbujas. En este caso el equilibrio es $i^* = A/(1 - \rho_0)$ y $1 + r^* = \rho_0/(1 - \rho_0)$. Notamos que en este caso la inversión y la tasa de interés son crecientes en la proporción ρ_0 de los ingresos futuros que se pueden usar como colateral.

Burbujas

En esta subsección consideraremos la posibilidad de que haya burbujas en la economía, que en este caso se representa por un sistema dinámico bidimensional con variables de estado i_{t-1} y b_{t-1} . De manera similar al caso sin burbuja, la ecuación de oferta de activos (3) determina i_t como una función decreciente de $r_t + 1$ mientras que

la ecuación (4) determina i_t como una función creciente de la tasa de interés. La única intersección de estas curvas dan los valores de equilibrio para la inversión y la tasa de interés. A partir del valor para la tasa de interés de equilibrio se puede deducir el valor de la burbuja b_t gracias a la ecuación (2).⁵

Estado estacionario

Para hallar el equilibrio, imponemos las condiciones de que $i_{t-1} = i_t = i^{**}$, $b_{t-1} = b_t = b^{**}$ y $r^{**} = 0$ en las ecuaciones (2), (3) y (4). De esta manera, el equilibrio con burbuja está dado por

$$i^{**} = \frac{A}{1 - \rho_0}, \quad b^{**} = A \frac{1 - 2\rho_0}{1 - \rho_0} \quad \text{y} \quad r^{**} = 0.$$

Notemos que $b^{**} > 0$ sí y sólo si

$$\frac{1 - 2\rho_0}{1 - \rho_0} > \frac{l}{A}. \quad (14)$$

Es decir, la condición (14) muestra que la burbuja puede surgir cuando la liquidez interna (fomentada por ρ_0) y la liquidez externa (representada por l) son escasas, creando una alta demanda por activos. Además, el tamaño de la burbuja en el equilibrio b^{**} decrece con ρ_0 y con la liquidez externa: reordenando la expresión para b^{**} , tenemos que

$$b^{**} + l = A \frac{1 - 2\rho_0}{1 - \rho_0},$$

lo que significa que un aumento (disminución) de la liquidez externa es compensado uno a uno por una disminución (aumento) de la burbuja en el equilibrio y a su vez, esta relación se ve afectada por el parámetro de colateralización ρ_0 .

Análisis del diagrama de fase

Para describir la dinámica de la economía deduciremos el diagrama de fase correspondiente. Esto requerirá caracterizar las curvas invariantes en el diagrama de

⁵Este fue el procedimiento empleado para calcular las funciones de política de la sección (2.3).

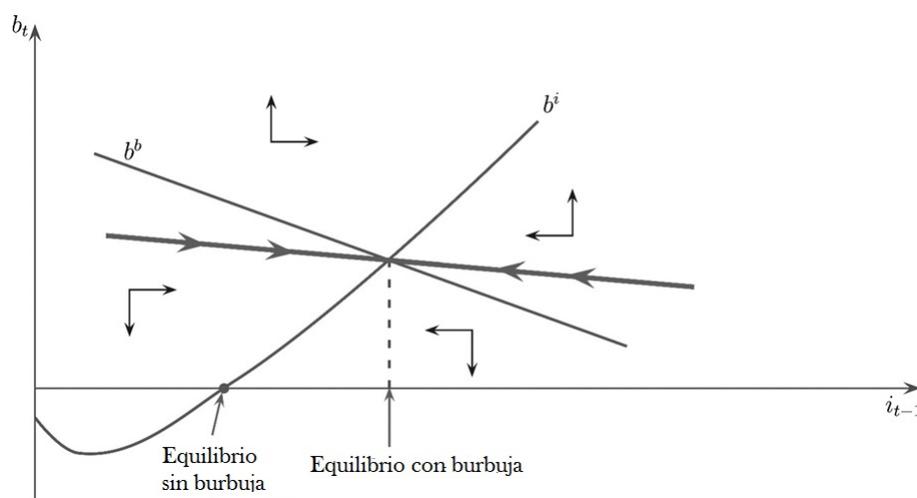


Figura 3: El diagrama de fase en el caso con burbuja y liquidez externa positiva

fase tales que $i_t = i_{t-1}$ y $b_t = b_{t-1}$.⁶ La curva en la que $i_t = i_{t-1}$ se puede describir en el diagrama fase como una función de b_t , dada por

$$b^i(i_{t-1}) = b_t = i_{t-1}^2 \frac{\rho_0(1 - \rho_0)}{l} - \rho_0 i_{t-1} \frac{A + (2 - \frac{1}{\rho_0})l}{l} - l.$$

Por otra parte, la curva donde $b_t = b_{t-1}$ consta de dos partes. Cuando $b_0 = 0$ una de esas curvas es el eje horizontal del diagrama de fase (donde $b_t = 0$); cuando $b_t > 0$ la otra curva está representada por la función

$$b^b(i_{t-1}) = -\rho_0^2 i_{t-1} + (1 - \rho_0)(A - l) - \rho_0 l.$$

La siguiente proposición, cuya demostración se encuentra en Fahri y Tirole, caracteriza el comportamiento del diagrama fase, que se encuentra representado en la figura 3. El equilibrio con burbuja genera un mayor nivel de inversión que el equilibrio sin burbuja. Notemos que si la economía empieza sobre el brazo estable eventualmente convergerá hacia el equilibrio con burbuja. En cambio, si inicia debajo del brazo estable convergerá al equilibrio sin burbuja. Si la economía inicia por arriba del brazo estable en algún momento se violará la condición de que $b_t < A$, que es necesaria para la existencia del equilibrio competitivo y que se ubicará fuera de la región de atracción del equilibrio con burbuja.

⁶Los detalles de los cálculos de estas curvas también pueden ser consultados en Fahri y Tirole (2012).

Proposición 2. *Supongamos que se tiene la condición de existencia de la burbuja (14) y que $l > 0$. Entonces $r^* < 0$ y $i^{**} > i^*$. Para cualquier i_0 existe una máxima burbuja factible $\bar{b}(i_0)$. Las trayectorias de la inversión $\{i_t\}_{t \geq 0}$ y tasa de interés $\{r_t\}_{t \geq 0}$ son crecientes en el tamaño original de la burbuja b_0 . Para $b_0 < \bar{b}(i_0)$ la economía converge asintóticamente al equilibrio sin burbuja. Para $b_0 = \bar{b}(i_0)$ la economía converge al equilibrio con burbuja. Además, la función $\bar{b}(i_0)$ es decreciente en i_0 .*

Ahora describiremos lo que ocurre cuando la burbuja estalla. Supongamos que para un $t < t_0$, la economía evoluciona como un equilibrio competitivo $\{i_t, b_t, r_t\}$, con $b_t > 0$, sobre el brazo estable, por lo que eventualmente converge al equilibrio con burbuja. Cuando la burbuja estalla en $t = t_0$ cae por debajo del brazo estable, por lo que para $t > t_0$ la economía converge hacia el equilibrio sin burbuja, por lo que tanto el valor de la burbuja como el de la inversión colapsan.

El caso sin liquidez externa

En el caso en el que $l = 0$ el único cambio es que la curva en la que $i_t = i_{t-1}$ se hace completamente vertical y la dinámica de la economía no se ve afectada por la existencia de la burbuja

$$i_t = A + \rho_0 i_{t-1}.$$

Además, de la ecuación de demanda de activos (4)

$$b_t + \frac{\rho_0 i_t}{1 + r_{t+1}} = A$$

se puede ver que hay un *crowding out* entre el valor de la burbuja y el valor de los activos producidos por la generación previa. Su único efecto es un aumento en la tasa de interés. Finalmente, como la curva en la que la inversión es invariante es vertical, el nivel de inversión es igual entre los equilibrios con burbuja o sin burbuja.

El caso con liquidez externa negativa

Ahora suponemos que la liquidez externa es negativa. La motivación que dan Fahri y Tirole para considerar este caso es modelar la situación cuando el sector no

corporativo tiene una fuerte demanda por liquidez que excede a la oferta de liquidez externa.

En este caso hay un único equilibrio sin burbuja corresponde a la intersección de $b_t = 0$ con la curva en la que $i_t = i_{t-1}$ y siempre es estable. Si la condición (14) es cierta, entonces hay dos intersecciones entre las curvas $b^i(i_{t-1})$ y $b^b(i_{t-1})$. Los correspondientes niveles de inversión son $-l(1 - \rho_0)/\rho_0$ y $A/(1 - \rho_0)$. Si se satisface que

$$-\frac{l}{A} < \frac{\rho_0}{(1 - \rho_0)^2} \quad (15)$$

entonces el menor nivel de inversión corresponde a un equilibrio inestable con burbuja, mientras que el otro corresponde a un equilibrio estable de punto silla. La condición anterior refleja que conforme más baja sea la demanda neta por liquidez externa $-l$, mayor será el nivel de ingreso garantizable ρ_0 .

La siguiente proposición compara los niveles de inversión entre los equilibrios con y sin burbuja con liquidez externa negativa.

Proposición 3. *Supongamos que se satisfacen las condiciones (14) y (15). Entonces la inversión en el estado estacionario con burbuja es menor que la inversión en el estado estacionario sin burbuja:*

$$i^{**} = \frac{A}{1 - \rho_0} < i^*.$$

Las proposiciones (2) y (3) nos permiten conocer bajo qué condiciones hay un *crowding in* o un *crowding out* entre inversión y burbuja, por medio de comparar los equilibrios en cada caso. Las burbujas siempre aumentan la tasa de interés, lo que reduce el valor de los árboles. Cuando $l > 0$, el sector no corporativo es un vendedor neto de árboles, por lo que la burbuja causa una transferencia del sector no corporativo hacia el sector corporativo, lo que incrementa la inversión; en este caso la burbuja y la inversión son complementos. Por el contrario, cuando $l < 0$ ocurre exactamente lo contrario, pues el sector no corporativo actúa como un comprador neto de árboles, reduciéndose la inversión; en este caso, la burbuja y la inversión son sustitutos.

4.2 ANÁLISIS NUMÉRICO

El análisis que hacen Fahri y Tirole de su modelo termina en la subsección anterior; en él muestran las consecuencias de su modelo por medio de las técnicas tradicionales, que son de carácter cualitativo. Sin embargo, el principal resultado de nuestro trabajo, obtenido por medio de los exponentes de Lyapunov, hubiera sido imposible de obtener por medio de un análisis ordinario, y que exponemos en la siguiente proposición:

Proposición 4. *las velocidades de convergencia de la inversión y la burbuja no dependen de sus valores iniciales, sino que dependen completamente de las condiciones del sistema financiero, tales como el grado de colateralización y la liquidez externa existente, representadas por los parámetros del modelo*

En esta subsección presentamos evidencia a favor de la proposición anterior, aplicando el algoritmo para calcular los exponentes de Lyapunov desarrollado en la sección 3. En todas las simulaciones se definió el nivel de dotación inicial en $A = 100$. La inversión inicial puede tomar valores en el intervalo $[0, 250]$; se consideran valores para la liquidez externa tales que se satisfaga la condición (14), para que la burbuja exista. En todas las simulaciones se consideran valores iniciales para la burbuja tales que las trayectorias converjan a alguno de los equilibrios.

La ecuación de estado a la que se le aplicó el algoritmo de la subsección 3.3 está definida por las funciones de política para la inversión (6) y para la burbuja (8), deducidas en la sección (2.3):

$$f(i_{t-1}, b_{t-1}) = \begin{pmatrix} \Phi^i(i_{t-1}, b_{t-1}) \\ \Phi^b(i_{t-1}, b_{t-1}) \end{pmatrix}.$$

Para graficar los exponentes en función de un parámetro se calculó cada uno de ellos variando el parámetro en cuestión a lo largo de su dominio, considerando

constantes el otro parámetro y las condiciones iniciales. Análogamente, cuando se graficaron los exponentes en función de una de las condiciones iniciales, se consideraron como constantes la otra condición inicial y los parámetros, variando la condición inicial de interés en su dominio.⁷

En todas las figuras de diagrama fase, la curva formada por círculos señala la gráfica de los puntos en los que la inversión es invariante, la curva formada por cuadrados representará la correspondiente a la burbuja, la curva continua y señalada con rombos será la gráfica de la trayectoria del sistema hacia el equilibrio, dada una condición inicial.

En las demás gráficas, donde se representan los exponentes de Lyapunov como función de los parámetros y de las condiciones iniciales, la gráfica señalada con círculos corresponde al exponente de la inversión y la gráfica señalada con cuadrados será la del exponente de la burbuja.

Caso I: Liquidez externa positiva

Para este primer caso, en el que existe una burbuja con liquidez externa positiva, se tomaron como valores para la simulación de $\rho_0 = 0,372$, $l = 28,7$, $i_0 = 7$ y $b_0 = 16,6$. Como podemos apreciar en el diagrama fase en la figura 4, este escenario es muy cercano al que describen Fahri y Tirole cuando estalla la burbuja. Inicialmente la economía se mueve sobre la trayectoria estable que converge al equilibrio con burbuja; una vez llegado a ese equilibrio, un choque cambia las condiciones de la economía, provocando que la inversión disminuya y el valor de la burbuja colapse.

El exponente de Lyapunov para la inversión es $\lambda_i = -0,195942$ y el exponente para la burbuja es $\lambda_b = -0,796187$. Los signos negativos de los exponentes corresponden con el hecho de que trayectoria definida por las condiciones iniciales converge a un punto fijo. Cada exponente, por separado, nos indica la tasa de contracción de la

⁷Todo esto se puede replicar con el código que se presenta en el apéndice y que se puede solicitar al autor.

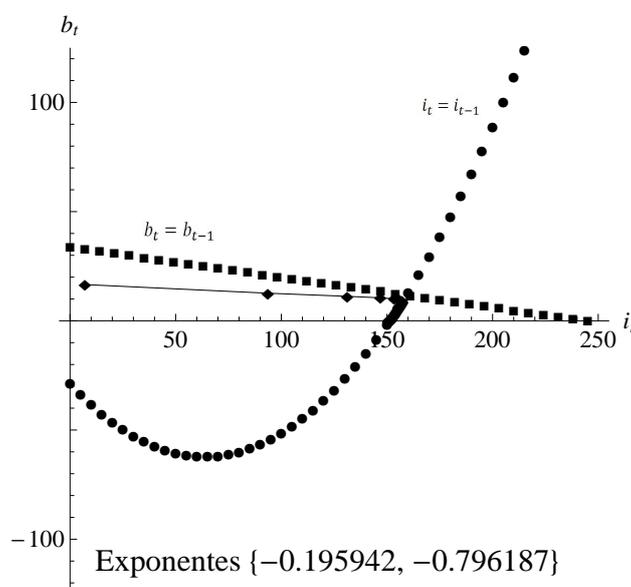


Figura 4: **Diagrama fase con liquidez externa positiva.** La línea continua representa la trayectoria de la economía sobre el brazo estable del sistema hacia el equilibrio con burbuja; una vez alcanzado éste la burbuja colapsa, convergiendo hacia el equilibrio sin burbuja. Los signos de los exponentes muestran convergencia e indican la tasa de contracción de cada variable de estado. Fuente: Elaboración propia.

variable a la que corresponden. Una vez que tenemos los exponentes, podemos realizar algunas predicciones. Por ejemplo, la vida media de la inversión (el tiempo que tarda en reducirse la inversión a la mitad) se representa por la expresión $i_0/2 = e^{\lambda_i t} i_0$, de la que, al despejar t , obtenemos, $t = -\ln 2/\lambda_i$. En esta simulación, $\lambda_i = -0,195942$, por lo que $t = 3,5375$; es decir, le tomaría poco más de tres periodos a la inversión reducir la brecha a la mitad, respecto a su valor de equilibrio. Como guía, conforme mayor sea en valor absoluto un exponente, mayor será la tasa de convergencia.

La figura 5 presenta las gráficas de los exponentes en función de cada uno de los parámetros. Como funciones del parámetro de colateralización ρ_0 , el exponente para la inversión es creciente mientras que el exponente para la burbuja es creciente en $(0, 0,43]$ y decreciente en $[0,43, 1)$. De la condición de existencia de la burbuja (14) se puede deducir que 0,43 es el valor máximo del parámetro de colateralización para el cual existe burbuja. Cuando los exponentes se grafican como función de la liquidez

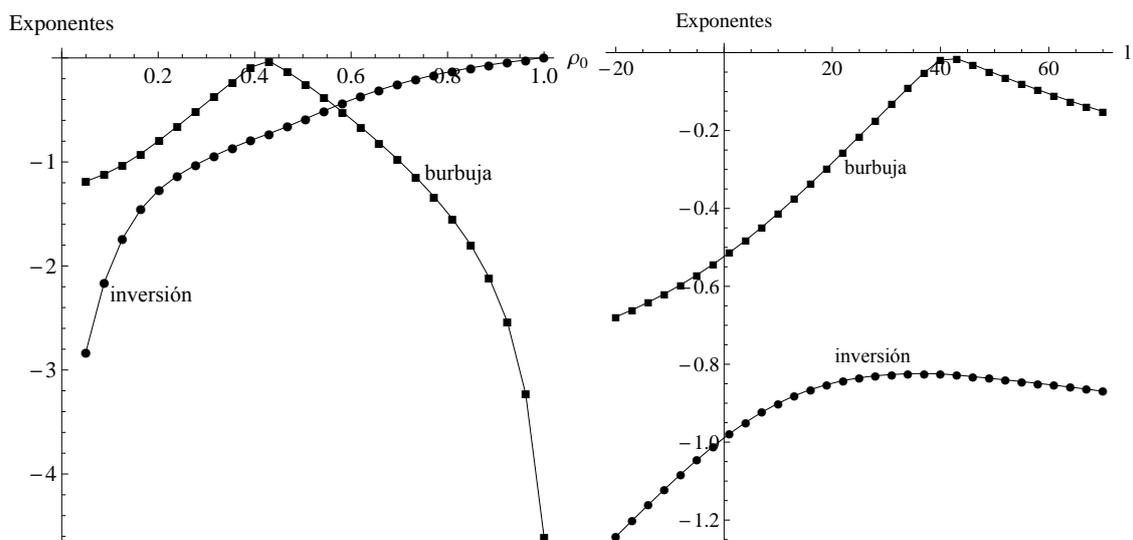


Figura 5: Liquidez externa positiva. Exponentes en función del parámetro de colateralización (ρ_0) y de la liquidez externa (l). Como funciones de ρ_0 , el exponente para la inversión es creciente, mientras que el de la burbuja alcanza un su máximo en 0,43, que es el mayor valor de ρ_0 para el que puede existir burbuja. Como función de la liquidez l , la inversión es cóncava con un máximo aproximadamente en 30; el exponente de la burbuja también es sensible a la condición de existencia de la burbuja (14), alcanzando un máximo en 40, valor para el que la tasa de convergencia de la burbuja alcanza un mínimo. Fuente: Elaboración propia.

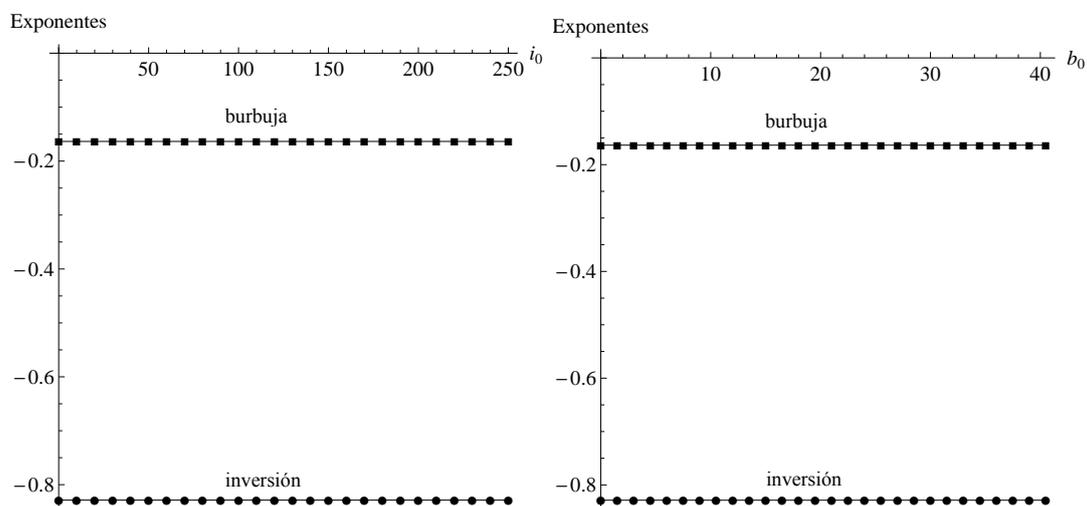


Figura 6: Liquidez externa positiva. Exponentes en función de la inversión inicial i_0 y de la condición inicial b_0 . En conjunto, las gráficas muestran que los dos exponentes son constantes como funciones de las condiciones iniciales. Es decir, las tasas de convergencia de la inversión y la burbuja se ven afectados únicamente por las condiciones del sistema financiero (representadas por los parámetros ρ_0 y l) y no por los valores iniciales de las variables de estado. Fuente: elaboración propia.

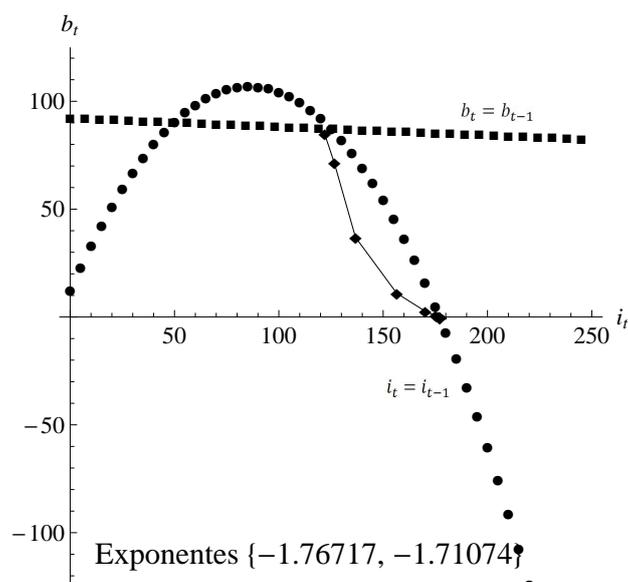


Figura 7: **Diagrama fase con liquidez externa negativa.** La trayectoria (línea continua) representa la transición de la economía desde el equilibrio con burbuja hacia el equilibrio sin burbuja; los signos de los exponentes corresponden con la convergencia y sus valores indican la tasa de contracción de cada variable de estado. Fuente: Elaboración propia.

externa, notamos un comportamiento similar para el exponente de la burbuja, que es creciente hasta 40 y decreciente en adelante. En ambos casos es el exponente de la burbuja el que se ve afectado por la condición de existencia (14). Cabe mencionar que el comportamiento de los exponentes nos parece contraintuitivo: hubiéramos esperado que conforme existieran mejores condiciones para financiarse la convergencia al equilibrio fuera más rápida, al permitir ajustar más rápidamente los valores de la inversión, cuyo multiplicador está dado por el efecto apalancamiento, que es creciente en ρ_0 .

En cuanto a las gráficas de los exponentes como función de las condiciones iniciales hay varias observaciones. Como se podrá apreciar en las gráficas de la figura 6, ambos exponentes son constantes respecto a las condiciones iniciales. Una de las conclusiones del teorema de Oseledec es que, si la función preserva una medida ergódica, entonces los exponentes son constantes casi en todo punto del espacio fase. En el contexto de nuestro modelo, esto significa que las velocidades de convergencia no dependen de los niveles iniciales de inversión y de burbuja, sino que dependen de

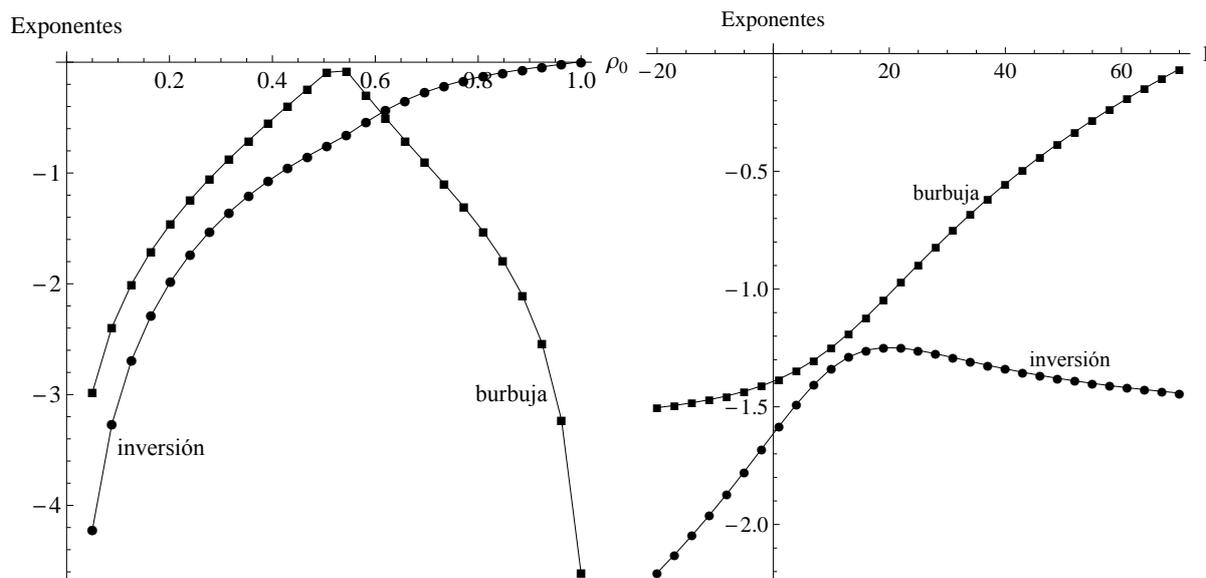


Figura 8: Liquidez externa negativa. Exponentes en función del parámetro de colateralización (ρ_0) y de la liquidez externa (l). Como funciones de ρ_0 , el exponente para la inversión es creciente, mientras que el de la burbuja alcanza un su máximo en 0,5, que es el mayor valor de ρ_0 para el que puede existir burbuja, de acuerdo a la condición (15). Como función de la liquidez l , la inversión alcanza la menor tasa de convergencia en 20; el exponente de la burbuja es creciente en l . Fuente: Elaboración propia.

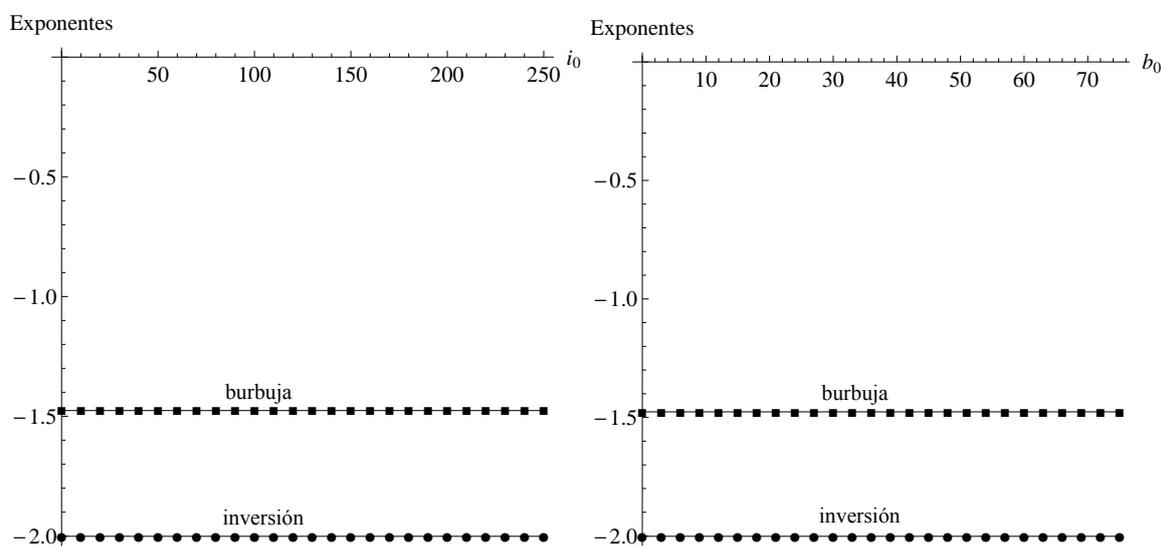


Figura 9: Liquidez externa negativa. Exponentes en función de la inversión inicial i_0 y de la condición inicial b_0 . Ambas gráficas muestran que los dos exponentes son constantes como funciones de las condiciones iniciales. Como en el caso con liquidez externa positiva, las tasas de convergencia de las variables de estado no dependen de sus valores iniciales, sino de la colateralización y la liquidez externa presente en la economía Fuente: elaboración propia.

las condiciones del sistema financiero, representadas por los parámetros. Aunque esto es sólo una simulación, bien podemos imaginar las consecuencias que tiene este tipo de información podría tener: conocer qué variables y condiciones iniciales impactan en la rapidez con la que la economía se ajusta a un choque puede servir para influir en la variable adecuada y en la proporción oportuna; en este ejemplo, de nada serviría tratar de desviar a la inversión o a la burbuja, si no se cambian las condiciones del entorno financiero.

Caso II: Liquidez externa negativa

Este caso, en el que se contempla un escenario con liquidez externa negativa (o como se mencionó en la sección anterior, por una alta demanda de liquidez por parte del sector no corporativo) fue simulado con $\rho_0 = 0,199$, $l = -12,4$, $i_0 = 122$ y $b_0 = 84,8$. Como podemos apreciar en el diagrama fase en la figura 7, en esta situación representamos la trayectoria que experimenta la economía desde el equilibrio con burbuja hacia el equilibrio sin burbuja. Mientras que la inversión aumenta hacia el equilibrio sin burbuja, el valor del activo burbuja disminuye fuertemente. Recordemos que en el caso en el que $l < 0$, existe un *crowding out* entre la inversión y la burbuja.

El exponente de Lyapunov para la inversión es $\lambda_i = -1,76717$ y el exponente para la burbuja es $\lambda_b = -1,710741$. Al igual que en el caso con liquidez positiva, los signos negativos de los exponentes corresponden con que la trayectoria converge a un punto fijo. Los exponentes se comportan de manera semejante al caso con liquidez positiva, como se puede ver en las figuras 8 y 9, a excepción del exponente de la burbuja, que en el ejemplo actual es una función creciente de la liquidez. Aún así, las conclusiones son similares a las obtenidas en la primera simulación, es decir, que la rapidez del ajuste de las variables del valor del activo burbuja y de la inversión después de una perturbación, no dependen de sus valores iniciales, sino del apalancamiento y la cantidad de liquidez externa de la economía.

Los casos con liquidez positiva y negativa muestran, en conjunto, los distintos

patrones que exhibe la convergencia de cada variable de estado del modelo. Como se ha visto, en un primer análisis han ayudado a obtener conclusiones sencillas, pero que no hubiéramos podido obtener con los métodos usuales de sistemas dinámicos.

5. CONSIDERACIONES FINALES

En el contexto de las burbujas de liquidez, pensando por un momento en una situación real y relevante, tal como la que se presentó en la Crisis Financiera de 2007, es importante saber de qué manera se verán afectados la inversión y el precio de los activos una vez que 'la fiesta ha llegado a su fin'.⁸ Más aún, conocer de manera más precisa cómo evolucionarán en el tiempo las distintas variables económicas permitiría poder planear mejor los ajustes necesarios en las decisiones de inversión, financiamiento y política.

Lo expuesto en la sección 4 es sólo una pequeña muestra de la información que pueden brindarnos los exponentes de Lyapunov. En las simulaciones se nota que la rapidez del ajuste de la inversión y el valor del activo burbuja no están influenciadas sus valores iniciales, sino por los valores que toman el parámetro de colateralización y la cantidad de liquidez externa, positiva o negativa, que existe en la economía; ésta es una conclusión sencilla, pero que no hubiera sido posible obtener por los métodos tradicionales. Además, una vez calculados los exponentes para cada variable de estado, es posible conocer cuánto tiempo tardarán en llegar al nuevo equilibrio sin burbuja. Este tipo de resultados son una razón suficiente para dar más oportunidades a esta herramienta.

Tal vez es lamentable, pero no sorpresiva, la escasez de aplicaciones de los exponentes de Lyapunov en economía, a diferencia de otras áreas, donde se han logrado importantes avances con esta técnica en la última década. Personalmente creo que los

⁸Recordando la frase que dijo Chuck Prince, en julio de 2007, cuando todavía era presidente de Citigroup: 'Cuando la música se detenga, en términos de liquidez, las cosas se complicarán. Pero mientras la música siga tocando, debes levantarte y bailar. Todavía estamos bailando.'

exponentes de Lyapunov fueron relegados de manera involuntaria; cuando pasó la moda de tratar de aplicar la teoría del caos en economía, los exponentes apenas comenzaban a madurar; por lo tanto, no tuvieron la posibilidad de demostrar su capacidad de cuantificar las propiedades dinámicas de un sistema; actualmente, dada la experiencia que en el pasado la teoría de caos falló al momento de hacer predicciones, considero poco probable una nueva oportunidad, con la consecuencia de que podríamos estar nos perdiendo los avances más recientes que pudieran tener mejores resultados en el entendimiento de los problemas económicos.

También podría existir algún sesgo en las corrientes teóricas de los artículos que publican las revistas especializadas, como le ocurrió a A. Rubinstein,⁹ a quien el editor de una prestigiosa revista, que había publicado varios artículos acerca de la teoría del descuento hiperbólico, rechazó un artículo suyo en el que la refutaba, con el argumento de que su trabajo parecía una crítica a una teoría que es cierta de distintas maneras, pero que las críticas y extensiones de la investigación existente debían ser enviadas a otras revistas más especializadas. En este sentido, un lector anónimo de nuestro trabajo, acertadamente nos advirtió que, aunque los exponentes de Lyapunov no han sido empleados en modelos clásicos de economía, su uso es común en literatura no tradicional que emplea sistemas adaptables complejos con agentes heterogéneos. (Aún más, nos refirió a Farmer y Geanakoplos (2009), para pensar en la pertinencia de utilizar un modelo basado en equilibrios competitivos para explicar una situación de crisis financiera).

Queda para una futura investigación incorporar las observaciones del lector anónimo hechas a nuestro trabajo, trabajar con datos reales, y poder explotar todo el potencial que tienen los exponentes de Lyapunov, ya sea para probar empíricamente el modelo de burbujas de liquidez, aplicarlo a alguna serie de tiempo, o investigar alguna conexión con la teoría de los ciclos económicos reales. Lo expuesto en este trabajo sugiere que vale la pena mirar a otros campos, en los que hay avances interesantes como

⁹Anécdota encontrada en Rubinstein (2006).

los que se mencionaron en la introducción, para ver qué se está haciendo y aplicarlo en economía, donde finalmente son los hechos reales los que deben ser explicados.

REFERENCIAS

- Barro, R. J. y Sala-i-Martin, X. (1999), *Economic Growth*, MIT Press.
- Bernanke, B. y Blinder, A. S. (1988), 'Credit, money and aggregate demand', *American Economic Review* **78**(2), 435–439.
- Caballero, R. y Krishnamurthy, A. (2006), 'Bubbles and capital flow volatility: causes and risk management', *Journal of Monetary Economics* **53**, 35–53.
- Chen, B., Li, J. y Ding, R. (2006), 'Nonlinear local lyapunov exponent and atmospheric predictability research', *Science in China Series D: Earth Science* **49**(10), 1111–1120.
- Eckmann, J. (1981), 'Roads to turbulence in dissipative dynamical systems', *Review of Modern Physics* **53**, 643–695.
- Eckmann, J. y Ruelle, D. (1985), 'Ergodic theory of chaos and strange attractors', *Review of Modern Physics* **57**(3), 617–656.
- Fahri, E. y Tirole, J. (2012), 'Bubbly liquidity', *Review of Economic Studies* **79**(2), 678–706.
- Farmer, D. y Geanakoplos, J. (2009), 'The virtues and vices of equilibrium and the future of financial economics', *Cowles Foundation paper 1274* .
- Gerencsér, L., Rásonyi, M. y Vágó, Z. (2003), Controlled Lyapunov exponents in optimization, finance and biology, *Proceedings of the 11th Mediterranean Conference on Control and Automation*.
- Holmström, B. y Tirole, J. (2011), *Inside and Outside Liquidity*, MIT Press.

- Johnson, R., Palmer, K. y Sell, G. (1984), 'Ergodic properties of linear dynamical systems', *Review of Ergodic Theory* **31**, 312–381.
- Jost, J. (2005), *Dynamical Systems: Examples of complex behavior*, Springer Verlag.
- Junhai, M., Yushu, C. y Zengrong, L. (1999), 'The matrix algorithm of lyapunov exponent for the experimental data obtained in dynamic analysis', *Applied Mathematics and Mechanics* **20**(9), 985–993.
- Kiyotaki, N. y Moore, J. (1997), 'Credit cycles', *Journal of Political Economy* **105**, 211–248.
- Kocherlakota, N. (2009), 'Bursting bubbles: consequences and cures', presentado en *Macroeconomic and Policy Challenges Following Financial Meltdowns Conference*. <http://www.imf.org/external/np/seminars/eng/2009/macro/pdf/nk.pdf> accedido en marzo de 2012.
- Lucas, R. E. (1978), 'Asset prices in an exchange economy', *Econometrica* **46**, 1429–1445.
- Majda, A. y Branicki, M. (2012), 'Lessons in uncertainty quantification for turbulent dynamical systems', *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series A*, *AIMS* **32**(9), 3133 – 3221.
- Oseledec, V. (1968), 'A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems', *Trans. Moscow Mathematical Society* **19**, 197–231.
- Ramsey, F. (1928), 'A mathematical theory of saving', *Economic Journal* **38**, 543–559.
- Rubinstein, A. (2006), 'Dilemmas of an economic theorist', *Econometrica* **74**(4), 865–883.
- Salceanu, P. L. y Smith, H. L. (2009), 'Lyapunov exponents and persistence in discrete dynamical systems', *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, *AIMS* **12**(1), 187–203.
- Santos, M. y Woodford, M. (1997), 'Rational asset pricing bubbles', *Econometrica* **65**, 19–58.

- Stokey, N. L. y Lucas, R. E. (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press.
- Tirole, J. (1985), 'Asset bubbles and overlapping generations', *Econometrica* **53**, 1499–1528.
- Tirole, J. (2009), *Theory of Corporate Finance*, Princeton University Press.
- Wiggins, S. (2003), *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer.
- Woodford, M. (1990), 'Public debt as private liquidity', *American Economic Review* **80**, 382–388.
- Wu, Q. y Yang, C. (2009), 'On stability analysis via lyapunov exponents calculated from a time series using nonlinear mapping', *Nonlinear Dynamics* **59**(1), 239–257.

APÉNDICE: CÓDIGO DEL PROGRAMA

El software empleado para realizar las simulaciones fue *Mathematica 8*. Si se prefiere, el archivo ejecutable también está disponible bajo solicitud por correo electrónico.

```
Manipulate[
  A = 100;
  F[{i_, b_}] := {(A + p*i - (1/p - 1)*1 +
    Sqrt[(A + p*i - (1/p - 1)*1)^2 + 4*1/p*(b + 1 + p*i)])/
    2, (p*(A + p*i + (1 + 1/p)*1 +
    Sqrt[(A + p*i - (1/p - 1)*1)^2 +
    4*1/p*(b + 1 + p*i)])/(2*(A - b)))*b};
  ci = {inv, bub};

  Lyapunov[G_, x0_] := Module[{n, x, J, xt, q, r, K, s},
    n = Length[x0];
    x = Array[a, n];
    J[y_] := D[G[x], {x}] /. Thread[x -> y];
    xt = Nest[G, N[x0], 100];
    {q, r} = QRDecomposition[J[xt]];
    K = 500;
    s = {};
    Do[
      xt = G[xt];
      {q, r} = QRDecomposition[J[xt].Transpose[q]];
      s = Append[s, Table[r[[i, i]], {i, n}]],
      {K}];
    Rest[FoldList[Plus, 0, Re[Log[s]]]/Range[K]];

  T0 = Table[Nest[F, ci, i], {i, 100}];
  T1 = Table[If[i == 0, ci, T0[[i]]], {i, 0, 100}];

  Exponentes = Lyapunov[F, ci];

  G1[p1_] := Module[{F1},
    F1[{i_,
      b_}] := {(A + p1*i - (1/p1 - 1)*1 +
      Sqrt[(A + p1*i - (1/p1 - 1)*1)^2 + 4*1/p1*(b + 1 + p1*i)])/
      2, (p1*(A + p1*i + (1 + 1/p1)*1 +
      Sqrt[(A + p1*i - (1/p1 - 1)*1)^2 +
      4*1/p1*(b + 1 + p1*i)])/(2*(A - b)))*b};
    Lyapunov[F1, ci]
  ];

  G2[l1_] := Module[{F2},
```

```

F2[{i_,
  b_}] := {(A + p*i - (1/p - 1)*l1 +
  Sqrt[(A + p*i - (1/p - 1)*l1)^2 + 4*l1/p*(b + l1 + p*i)])/
  2, (p*(A + p*i + (1 + 1/p)*l1 +
  Sqrt[(A + p*i - (1/p - 1)*l1)^2 +
  4*l1/p*(b + l1 + p*i)])/(2*(A - b)))*b};
Lyapunov[F2, ci]
];

G3[Inv1_] := Lyapunov[F, {Inv1, bub}];
G4[Bub1_] := Lyapunov[F, {inv, Bub1}];

Sol2var :=
NSolve[a^2*p/l (1 - p) - a*p/l*(A + (2 - 1/p)*l) - l - b ==
  0 && -p^2*a + (1 - p) A - l - b == 0, {a, b}];
Lim := {a, b} /. Sol2var[[2]];
InvEquilib := Lim[[1]];
BurEquilib := Lim[[2]];

LimiteL := If[p >= 0.5, 100, A (1 - 2 p)/(1 - p) - 0.1];
LimiteB := If[-p^2*inv + (1 - p) A - l > 0, BurEquilib - 2, 0];

Which[
  Opción == "Diagrama fase",
  Show[ListPlot[{Table[{x,
    x^2*p/l (1 - p) - x*p/l*(A + (2 - 1/p)*l) - l}, {x, 0, 250,
    5}], Table[{x, -p^2*x + (1 - p) A - l}, {x, 0, 250, 7}], T1},
  DataRange -> {0, 250}, Joined -> {False, False, True},
  AspectRatio -> 1,
  AxesLabel -> {"!\(\(*SubscriptBox[\(i\), \(\(t\)\)\]\)",
    "\!\(\(*SubscriptBox[\(b\), \(\(t\)\)\]\)"},
  PlotRange -> {-125, 125}, PlotStyle -> Black,
  PlotMarkers -> Automatic, LabelStyle -> Directive[14]],
  Show[Graphics[
    Text[Style["Exponentes " <> ToString[Last[Exponentes]] <> "",
    18], {12, -110}, {-1, 0}], ImageSize -> {500, 350}],

  Opción == "garantia",
  ListPlot[{ Table[{rt1, G1[rt1][[1, 1]]}, {rt1, 0.05, 1, .038}],
  Table[{rt1, G1[rt1][[1, 2]]}, {rt1, 0.05, 1, .038}],
  DataRange -> {0, 1}, AspectRatio -> 1, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"!\(\(*SubscriptBox[\(\[Rho]\), \(\(0\)\)\]\)",
    "Exponentes"}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> Black,
  PlotMarkers -> Automatic, LabelStyle -> Directive[14],
  Joined -> {True, True}],

```

```
Opción == "liquidez",
ListPlot[{ Table[{rt1, G2[rt1][[1, 1]]}, {rt1, -20, 70, 3}],
  Table[{rt1, G2[rt1][[1, 2]]}, {rt1, -20, 70, 3}],
  DataRange -> {-20, 70}, Joined -> {True, True}, AspectRatio -> 1,
  PlotRange -> All, AxesLabel -> {"1", "Exponentes"},
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> Black,
  PlotMarkers -> Automatic, LabelStyle -> Directive[14] ],
```

```
Opción == "inversión",
ListPlot[{ Table[{rt1, G3[rt1][[1, 1]]}, {rt1, 0, 250, 10}],
  Table[{rt1, G3[rt1][[1, 2]]}, {rt1, 0, 250, 10}],
  DataRange -> {-1, 250}, Joined -> {True, True}, AspectRatio -> 1,
  PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"\!\(\*SubscriptBox[\(i\), \(\(0\)\]\)\)", "Exponentes"},
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> Black,
  PlotMarkers -> Automatic, LabelStyle -> Directive[14]],
```

```
Opción == "burbuja",
ListPlot[{ Table[{rt1, G4[rt1][[1, 1]]}, {rt1, 0, LimiteL, 3}],
  Table[{rt1, G4[rt1][[1, 2]]}, {rt1, 0, LimiteL, 3}],
  DataRange -> {-1, LimiteL}, Joined -> {True, True},
  AspectRatio -> 1, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"\!\(\*SubscriptBox[\(b\), \(\(0\)\]\)\)", "Exponentes"},
  AxesOrigin -> {0, 0}, PlotStyle -> Black,
  PlotMarkers -> Automatic, LabelStyle -> Directive[14]]
],
```

```
Style["Parámetros del modelo", Bold, Large],
{{p, 0.199, "Garantía"}, .001, .49, Appearance -> "Labeled"},
{{l, -12.4, "Liquidez externa"}, -20, LimiteL,
  Appearance -> "Labeled"},
Delimiter,
Style["Condiciones iniciales", Bold, Large],
{{inv, 122, "Inversión"}, 0, 250, Appearance -> "Labeled"},
{{bub, 84.8, "Burbuja"}, 0, 100, Appearance -> "Labeled"},
Delimiter,
Style["Gráficas", Bold, Large],
{{Opción, "Diagrama fase"}, {"Diagrama fase", "garantia",
  "liquidez", "inversión", "burbuja"}},
ControlPlacement -> Left, TrackedSymbols -> Manipulate,
SynchronousUpdating -> False
]
```