EL COLEGIO DE MÉXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

LICENCIATURA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN ECONOMÍA

LA PRODUCCIÓN DE SEGURIDAD COMO PROBLEMA ECONÓMICO

RODRIGO MARTÍNEZ HERNÁNDEZ

PROMOCIÓN 2020-2024

ASESOR:

DAVID RENÉ MICHELLE CANTALÁ

CIUDAD DE MÉXICO, 2025

Resumen

En esta tesis planteamos y resolvemos una serie de problemas matemáticos inspirados en la producción de seguridad en México. Los objetivos de la tesis son formalizar mediante el uso de ecuaciones los problemas que enfrenta el estado mexicano para asignar elementos de seguridad pública con el fin de reducir la inseguridad y encontrar conclusiones sobre mejores formas de producir seguridad.

Los capítulos de esta tesis están organizados de la siguiente forma: el primer capítulo es una introducción del trabajo y el segundo capítulo es una revisión de literatura. En el capítulo 3 planteamos y resolvemos el primer modelo que estudia el problema de un estado que se enfrenta a una distribución estática de inseguridad. El cuarto capítulo generaliza el modelo del capítulo anterior a un planteamiento con rendimientos a escala. En el quinto capítulo generamos un par de juegos con tal de dejar el supuesto de una distribución estática de inseguridad y otorgarle agencia a la delincuencia. El primer juego es un juego en el que ambos jugadores internalizan la conducta del otro como un costo fijo y el segundo juego modela a ambos jugadores cuando internalizan la conducta ajena como un costo variable. Finalmente, el capítulo 6 concluye.

En cada capítulo incluimos al menos una sección de resultados dedicada a explicar la estática comparativa y la comparación de resultados entre modelos y juegos.

En el capítulo 3 para el problema base encontramos la primera conclusión intuitiva: conviene que el estado asigne más elementos a los espacios con mayor inseguridad. También encontramos que no hay una forma única de asignar los elementos para reducir la inseguridad al mismo nivel.

En el cuarto capítulo encontramos que los resultados del capítulo anterior son

generalizables a un modelo con dos ciudades, dos especies distintas de elementos de seguridad y rendimientos a escala modelados con una función de tipo Cobb-Douglas (con exponentes estandarizados a 1). Otra conclusión igual de importante es que se puede mejorar el nivel de seguridad sin necesidad de más elementos si se puede mejorar los rendimientos de los elementos, es decir, mejorando los rendimientos a escala en la producción de seguridad podemos reducir la inseguridad significativamente.

En el capítulo 5 las asignaciones en el equilibrio de Nash del juego de costos fijos describen la posibilidad de un conflicto en el que ambas partes se enfrentan sin tomar en cuenta la respuesta de la otra parte. Como las decisiones de ambas partes no repercuten sobre el otro jugador las ciudades donde hay mayor conflicto son aquellas donde la efectividad de los elementos es menor. El beneficio económico de la delincuencia, al margen de los costos de operación habituales de cualquier empresa, depende únicamente de la cantidad de elementos de seguridad de los que dispone el estado. El juego de costos variables arroja un equilibrio de Nash en el que el espacio donde se da el mayor conflicto es indeterminado en casi todos los casos. Esto se debe a que es posible que una ciudad sea particularmente efectiva al combatir el crimen por lo que no es necesario asignar tantos elementos a ésta por lo que el conflicto disminuye. El beneficio económico de la delincuencia también es indeterminado y sucede algo similar al conflicto: es posible que la delincuencia genere mayor beneficio en las ciudades en la que tiene menor presencia si los elementos de seguridad del estado son particularmente ineficientes.

En suma, la contribución de este trabajo es generar conclusiones novedosas a propósito del conflicto entre estado y delincuencia fundamentadas en una teoría formal de la producción de seguridad, particularmente para el caso de México.

Índice

1. Introducción

Este trabajo tiene por propósito ampliar el entendimiento que tenemos de la producción de seguridad mediante el uso de modelos matemáticos y definiciones económicas. La investigación en esta materia es pertinente pues al menos desde el cambio de siglo y hasta el día de hoy se vive una de las peores crisis de inseguridad en México. Los distintos gobiernos locales y federales han sido incapaces de garantizar tranquilidad en distintas partes del país por lo que se ha recurrido a una estrategia de pacificación del país mediante el uso de elementos militares no adiestrados para tareas policiacas, (véase Gil (2020) para un recuento detallado de los sustanciales incrementos en la cantidad de homicidios hasta 2018 en México).

Dicha estrategia de pacificación y sus consecuencias son controversiales. El reemplazo de cargos civiles por militares así como el despliegue de tropas en distintas partes del país pueden ser las medidas necesarias para finalmente reducir los niveles de inseguridad o los detonantes de un conflicto aún mayor. Por ello, el estudio del despliegue de soldados en los estados para disminuir la inseguridad es un tema de gran importancia.

Tratamos en particular la cuestión de cómo un estado debería asignar cualquier tipo de elemento de seguridad (policías o elementos castrenses) entre distintas zonas de conflicto (que aquí llamaremos ciudades) con tal de disminuir la inseguridad. Elaboramos un par de modelos de optimización y un par de juegos relacionados con el conflicto entre el crimen organizado y el gobierno.

El primer modelo es el modelo base. En éste un agente debe minimizar la inseguridad presente en cada una de sus localidades eligiendo una asignación de elementos de seguridad para cada ciudad. El modelo base formaliza el concepto de un gobierno que debe resolver un problema de violencia en varias de sus comunidades y con recursos limitados. Presentamos un caso particular y uno general. El resultado principal es inmediato: a mayor inseguridad, debe haber mayor presencia del estado para disminuirla y por lo tanto mayor conflicto.

El segundo modelo generaliza el primero añadiendo la posibilidad de dos tipos de elementos de seguridad distintos que sirven al mismo propósito que en el modelo base: reducir el crimen, aunque cada uno lo hace en distinta medida. Llamamos a este modelo de rendimientos a escala porque permite ilustrar el concepto de producir seguridad con distintos rendimientos a escala. Presentamos este modelo para el caso particular de dos ciudades. Encontramos que la conclusión del primer modelo se mantiene y que la localidad con menor inseguridad puede tan sólo llevarse elementos de baja productividad. Además, la posibilidad de que la combinación de elementos sea particularmente productiva introduce la posibilidad de producir la misma cantidad de seguridad que sin rendimientos a escala, pero con menor cantidad de policías o soldados.

Hasta este punto habremos caracterizado a la delincuencia como una distribución pasiva, un agente que no responde al esfuerzo del estado por erradicarla, lo cual está bastante alejado de la realidad. Por ello, nuestro siguiente paso es plantear y resolver un juego que caracteriza la interacción estratégica y confrontativa de un estado idéntico al del modelo base y un agente delincuencial que pretende maximizar su beneficio económico y como subproducto de su actividad económica genera inseguridad. Llamamos a este juego de costos fijos porque ambas partes interiorizan su interacción con el otro jugador como un costo fijo y resolvemos este juego encontrando un equilibrio de Nash. Presentamos tanto un caso particular como general. El resultado principal es que debido a que las partes interiorizan la conducta de su contrincante como un costo fijo, la estrategia del contrincante no aparece en su función de mejor respuesta y en realidad no emerge interacción estratégica.

Finalmente, desarrollamos un modelo que generaliza el juego de costos fijos cambiando las funciones de beneficio de los jugadores haciendo que internalicen las decisiones del otro como costos variables. Esta modificación permite que la interacción estratégica aparezca en sus respectivas funciones de mejor respuesta. Resolvemos un caso particular y uno general. Encontramos que el crimen organizado necesita una cantidad mínima de elementos para poder jugar (en estrategias puras) e introducimos otra forma de elevar la seguridad sin necesidad de incrementar la cantidad de elementos policiacos asignados a una ciudad: mediante la mejora en la efectividad de producción de seguridad de los elementos por ciudad (notemos que esto es una cosa distinta a los rendimientos a escala).

En cada modelo obtenemos una respuesta sencilla a la cuestión enfrentada por el gobierno sobre la localización de sus elementos: allí donde la inseguridad sea mayor, sin embargo hay una dimensión de profundidad más grande conforme avanzamos en los modelos. La mejor forma de producir seguridad no es única. Siempre hay una forma de combinar los elementos de seguridad entre comunidades o si se dispone de un par de tipos de elementos es posible combinar entre ciudades y entre elementos. Más aún, cuando interactúan la delincuencia y el gobierno es importante entender cómo interiorizan sus conductas los jugadores ya que ello presenta distintas distribuciones óptimas para resolver el mismo conflicto.

La construcción de modelos en los que se teorizan el conflicto entre partes y sus repercusiones sobre el bienestar social son parte del cuerpo de literatura de economía del conflicto. Contribuimos a dicha literatura mediante la elaboración de modelos de optimización inspirados en circunstancias reales del problema de inseguridad en el México moderno.

Finalmente, hay una serie de extensiones sobre los modelos aquí presentados que restan por hacerse. El modelo de rendimientos a escala puede extenderse a S ciudades. También es posible cambiar la forma de las funciones de beneficio por ciudad y comparar esa asignación con los de este trabajo. En los problemas de minimización es posible cambiar la forma de la función objetivo. Los juegos pueden ser comparados con un agente interiorizando al otro como costo fijo mientras que el otro juegue con su función de costo variable. Esta lista de extensiones no es exhaustiva y sólo es una exhibición del trabajo que aún resta por hacer.

2. Revisión de Literatura

2.1. Contexto: inseguridad en México

El problema de inseguridad en México está bien documentado. El gran despliegue de elementos de seguridad está directamente relacionado con el problema de las drogas en México, que es un gran productor de drogas como opioides, marihuana y anfetaminas (UNODC, 2024). Aunque el mercado de drogas mexicano no es pequeño, es eclipsado por el gigante mercado de drogas presente en Estados Unidos. Por ello, México es un país productor de drogas, pero el objetivo de los traficantes es venderlas en el lucrativo mercado de Estados Unidos UNODC (2024). Incluso para las drogas para las que México no es un productor importante (como cocaína) la cercanía de México al mercado estadounidense lo convierte en un país de tránsito importante para toda clase de tráfico de drogas UNODC (2024). La producción de estas drogas y su comercialización es una actividad ilícita a distinto grado tanto en Estados Unidos como en México, y en consecuencia los traficantes de drogas operan fuera de la ley. Las consecuencias de este fenómeno económico son el fuerte aumento de los niveles de inseguridad en distintas partes del país (Gil, 2020).

Un recuento de dicha lastimosa situación de seguridad pública en el país está presente en el trabajo de Serrano Carreto (2019). Se explica la justificación del porqué las decisiones del despliegue de elementos están centralizadas en el poder ejecutivo y cómo la creación de la Guardia Nacional se da en un contexto de falta de elementos suficientes en cantidad para garantizar un nivel ínfimo de seguridad pública. También se enfatiza la ausencia de elementos confiables (nótese que se percibe que los elementos policiacos sufren de corrupción y poca preparación).

El proceso de militarización de la seguridad pública está documentado en Gaussens y Jasso Gónzales (2023) y se puede explicar como que los poderes civiles obedecen cada vez más a dinámicas militares (protocolo, jerarquías, procedimiento de enfrentamiento) ya sea porque militares o exmilitares lideran espacios civiles de importancia en la seguridad pública (ejemplo: Secretaría de Seguridad y Protección Ciudadana liderada por un exgeneral) o por inercia del *crowding out* del reemplazo del personal civil al militar.

A propósito de esta centralización en la Estrategia de Seguridad Pública Federal (2018) lo siguiente: el despliegue de los elementos de militares ya no sólo se limita a las guarniciones de las 48 zonas militares extendidas sobre todo el territorio mexicano, sino que desde 2006 el gobierno federal ha llevado a cabo despliegues de tropas en partes conflictivas del territorio mexicano (se establecieron 266 municipios por pacificar). A su vez, los estados pueden solicitar apoyo de la federación, las cuales son correspondidas con más despliegues de tropas. Todas estas decisiones son tomadas desde el ejecutivo (durante los distintos sexenios esta tarea ha correspondido a distintas secretarías).

En suma, el despliegue de efectivos en México ha estado cada vez más centralizado y militarizado. Además, se sufre de una insuficiencia de elementos y de una falta de confianza en el cuerpo existente lo que incentiva a desplegar a una cantidad de elementos militares para realizar tareas policiacas (el gobierno percibe a los militares como elementos más confiables que los policiacos de acuerdo a la justificación presentada en la Estrategia de Seguridad Pública Federal (2018)). Finalmente, por esta insuficiencia de elementos el despliegue de efectivos ha sido reactivo, es decir, se asignan elementos a los estados donde se presentan los niveles altos de inseguridad reaccionando a la actividad delictiva. Todas estas observaciones servirán de base para construir los modelos de este trabajo.

2.2. Economía del conflicto

El tema aquí trabajado es parte de un cuerpo de literatura en torno a la economía del conflicto. Dicha literatura estudia las consecuencias materiales del conflicto, la formación de instituciones a causa de la disputa entre agentes, los incentivos que tienen las personas al estar enfrentadas violentamente y en esencia, se pretende entender los fenómenos de conflicto mediante el uso de los conceptos económicos. Algunos modelos notables en la literatura de economía del conflicto son son los modelos basados en el planteamiento de Haavelmo (1954) (también llamados armas *versus* mantequilla), en donde los jugadores deben maximizar su consumo y dividir sus recursos entre producir para su consumo o producir armas para apropiarse del consumo de su contrincante. Si bien estos modelos han sido usados para responder preguntas referentes a los incentivos de los agentes para formar coaliciones delincuenciales o encontrar las condiciones para generar conflicto donde no lo había, no permite responder a la pregunta de cómo distribuir elementos de seguridad entre varias regiones en conflicto.

Para fundamentar los modelos aquí creados tomamos una serie de observaciones de la literatura con respecto a la inseguridad en México. Para establecer la conducta de la delincuencia recuperamos de la tesis de Sánchez Buelna (2016) la visión económica de que el comportamiento de la delincuencia es el de una empresa *i.e.* sus beneficios son ingresos menos costos; desde esta perspectiva la inseguridad es una externalidad negativa que el estado procura reducir. Esta es tan sólo una de las contribuciones de cite Sanchez ya que en su tesis desarrolla modelos en los que el estado enfrenta con la delincuencia. A diferencia de los de Sanchez nuestros modelos no son todos juegos, además de que Sanchez está interesado en modelar la delincuencia como carteles de forma que los delincuentes individuales escogen coludirse por lo que incluye variables correspondientes a coaliciones en su modelo, de las cuales nosotros prescindimos. Tanto Sanchez como nosotros planteamos un problema de un estado centralizado, sin embargo mientras que nuestro estado asigna elementos de seguridad a ciudades, el de Sanchez escoje un nivel de inversión para romper los carteles.

Algunos resultados de los juegos de Sanchez son comparables con los nuestros. En su primer modelo encuentra que si las condiciones de mercado mejoran para la delincuencia el beneficio de los carteles aumenta, así como el tráfico de drogas, aunque no necesariamente la violencia. Nuestros modelos encuentran el mismo resultado, aunque aquí en consecuencia el estado también aumenta su presencia y hay mayor conflicto. En Sanchez esto no necesariamente ocurre.

En el estudio de la economía del conflicto, una familia de juegos cercana a nuestros planteamientos son los juegos de Colonel Blotto que fueron originalmente formulados por Borel (1921). En su forma más sencilla este juego es de dos jugadores (podemos imaginar dos generales) dotados de una cantidad de tropas que deben desplegar sobre cierto número de campos de batalla. Cada campo de batalla se gana si la asignación de uno es más grande que la del contrincante. El objetivo es maximizar la cantidad de campos de batalla ganados. Se puede observar la similitud al problema de un estado que despliega elementos para eliminar la presencia delincuencial y reducir la inseguridad.

Se han formulado diferentes variaciones para capturar aspectos distintos del conflicto. Por ejemplo en Boix-Adserà et al. (2021) se relaja el supuesto de dos jugadores y se plantea un juego con k jugadores, dotaciones simétricas y restricciones en los valores de los campos de batalla, o Roberson (2006) caracterizó los equilibrios de Nash de un juego con dos jugadores, asimetría en las dotaciones y con un valor idéntico para los campos de batalla. Entre esta literatura el más cercano a nosotros es el de Vu Quan (2021) quienes plantean un juego de Coronel Blotto con favoritismo y efectividad asimétrica. Plantea funciones de beneficio para los generales notablemente similares a las presentadas en los juegos elaborados en este trabajo para el estado; sin embargo los juegos de Blotto tienen un resultado binario por cada campo de batalla (o se gana o se pierde) mientras que en los juegos planteados aquí el resultado es un número real positivo que corresponde al nivel de inseguridad alcanzado después de la confrontación entre estado y delincuencia.

Una observación final sobre la relación de los juegos de Coronel Blotto y nuestros juegos es que ambos son similares a subastas. Sin embargo, nuestros modelos no son estocásticos, aunque comparten la premisa de ser modelos en los que los agentes desembolsan una cantidad de recursos para competir por un premio.

3. El problema base

Consideremos el siguiente problema: en un estado hay un problema de inseguridad a nivel nacional. En cada uno de las ciudades que constituyen este estado hay un nivel de inseguridad. El problema al que se enfrenta el gobierno es reducir la inseguridad al mínimo en todas las ciudades otorgando prioridad a las ciudades más afectadas y dada una cantidad de elementos de seguridad (policías, soldados, etc.).

En este capítulo elaboramos un modelo matemático que dará formalidad a este problema.

3.1. Definiciones

Hay un número S de ciudades con elemento representativo j. Cada ciudad j tiene asociada un nivel de inseguridad $\delta_j > 0$. El gobierno cuenta con un total de elementos de seguridad $|A|$. El gobierno asigna estos elementos de seguridad entre todos los estados, con el fin de minimizar el máximo nivel de inseguridad entre todos los estados. Si el numero de elementos asignados al estado j es $|A_j|$, el nivel de inseguridad después de asignar los elementos de seguridad al estado j es: $\pi_j = \delta_j - |A_j|$. El problema de optimización del gobierno es, por lo tanto:

$$\underset{a \in A}{min} \underset{k \in \{1, \cdots, S\}}{max} \pi_k \tag{1}$$

s.a.

$$\pi_j = \delta_j - |A_j| \ \forall j$$

$$\sum_{j=1}^{S} |A_j| \leqslant |A|$$

$$a = (|A_1|, \cdots, |A_S|)$$

$$\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_S)$$

En este planteamiento el estado debe escoger el número de elementos que asignará a cada ciudad. a es el vector que captura la cantidad de elementos asignados a cada ciudad (la asignación) y π es el vector que reúne los niveles de inseguridad de cada estado (el resultado de la asignación en términos del nivel de inseguridad). Notemos que la parte de *min max* modela el hecho de dar prioridad a las ciudades con mayor nivel de inseguridad. Finalmente, dado un nivel de inseguridad, asignar un elemento de seguridad reduce éste en una unidad.

Para resolver este problema el primero paso es reescribirlo como uno de Programación Lineal para poder aplicar el Teorema Fundamental de la Programación Lineal (TFPL).

Sea $H = \underset{k \in \{1, \cdots, S\}}{max} \pi_k$. Entonces $\pi_j = H$ or $\pi_j < H \ \forall j$. El podemos reescribir el problema base como:

$$\underset{a \in A}{min} \, H$$

s.a.

$$|A_j| \geqslant 0$$

$$\sum_{j=1}^{S} |A_j| \leqslant |A|$$

$$\delta_j - |A_j| \leqslant H \ \forall j$$

3.2. El caso de dos ciudades (S=2)

3.2.1. Planteamiento y resolución

Supongamos $S = 2$. Luego, el problema base se simplifica al siguiente planteamiento:

$$\min_{a \in A} H$$

s.a.

$$|A_1| \geqslant 0$$

$$|A_2| \geqslant 0$$

$$|A_1| + |A_2| \leqslant |A|$$

$$\delta_1 - |A_1| \leqslant H$$

$$\delta_2 - |A_2| \leqslant H$$

Por el TFPL basta con encontrar los puntos extremos de la región alcanzable y evaluarlos en la función objetivo. Notemos que el poliedro formado por el sistema de inecuaciones no es difícil de graficar en el espacio $(|A_1|, |A_2|)$:

Para resolver el sistema generamos nuevas variables tal que las desigualdades resulten en igualdades:

$$|A_1| - n_1 = 0$$

$$|A_2| - n_2 = 0$$

$$|A_1| + |A_2| + n_3 = |A|$$

$$\delta_1 - |A_1| + n_4 = H$$

$$\delta_2 - |A_2| + n_5 = H$$

Luego:

Espacio $(|A_1|, |A_2|)$

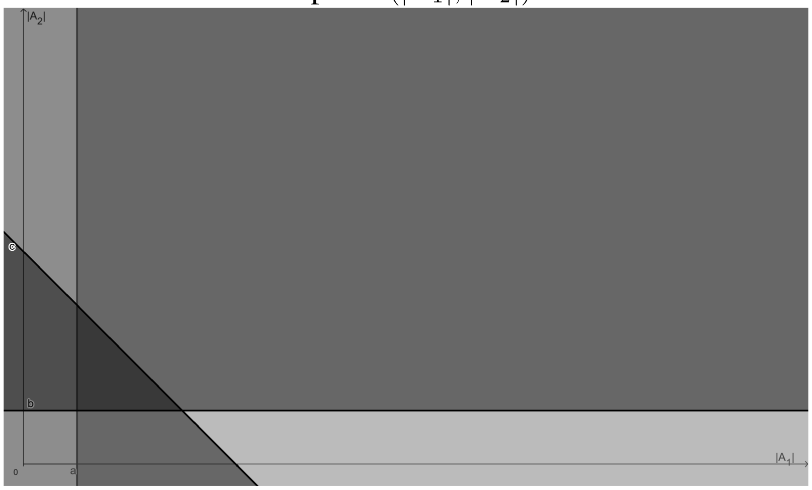

Figura 1: Región alcanzable

$$H = H \Rightarrow \delta_1 - |A_1| + n_4 = \delta_2 - |A_2| + n_5 \Rightarrow |A_2| = \delta_2 + n_5 - \delta_1 - n_4 + |A_1|$$

$$\Rightarrow |A_1| + \delta_2 + n_5 - \delta_1 - n_4 + n_3 + |A_1| = E$$

$$\Rightarrow |A_1| = \tfrac{1}{2}(E + \delta_1 - \delta_2 - n_3 + n_4 - n_5) \text{ and } |A_2| = \tfrac{1}{2}(E + \delta_2 - \delta_1 - n_3 - n_4 + n_5)$$

Proposición 1. Si $n_1 = 0$ entonces el poliedro tiene dos puntos extremos: $(0, 0)$ and $(0, |A|)$. Si $n_2 = 0$ entonces el poliedro tiene dos puntos extremos: $(0, 0)$ and $(|A|, 0)$

Demostración. Consideremos $n_1 = 0$. El conjunto formado en $(|A_1|, |A_2|)$ es tan sólo el eje $(0, |A_2|)$. Luego, basta con encontrar el valor mínimo y máximo que puede tomar $|A_2|$. Por hipótesis el valor mínimo para $|A_2|$ es cero: el punto $(0, 0)$ es un punto extremo del conjunto generado. En cuanto a $(0, |A|)$ la expresión para $|A|$: $|A_1| + |A_2| + n_3 = |A|$ con la hipótesis $n_1 = 0$ se convierte en $|A_2| = |A| - n_3$ $\therefore$ El valor máximo de $|A_2| = |A|$. El resultado es aún más evidente a partir de la desigualdad $|A_1| + |A_2| \leqslant |A|$. La demostración para $n_2 = 0$ es análoga. $\square$

No es difícil ver que al evaluar ambos puntos en la función objetivo el valor mínimo es aquel con al menos un valor positivo en alguna entrada del par ordenado. Una última observación es que la hipótesis $n_1 = 0$ y $n_2 = 0$ genera un conjunto alcanzable unitario con el elemento $(0,0)$ el cual es la única solución (o bien, el poliedro es el punto $(0,0)$). Otros conjuntos más interesantes resultan de suponer n_1 y n_2 positivos, es decir, suponer una solución interior.

Proposición 2. Si el problema tiene solución interior entonces el poliedro tiene 3 puntos extremos: $((|\bar{A}_1|, |\underline{A}_2|), (|\underline{A}_1|, |\underline{A}_2|), (|\underline{A}_1|, |\bar{A}_2|))$ donde la barra superior indica el valor máximo que puede tomar esa variable condicionado al valor de la otra variable y la barra inferior indica de forma análoga el mínimo.

Demostración. Comencemos estudiando las tres ecuaciones que generan el conjunto alcanzable:

$$|A_1| + |A_2| + n_3 = |A|$$

$$\delta_1 - |A_1| + n_4 = H$$

$$\delta_2 - |A_2| + n_5 = H$$

En el espacio $(|A_1|, |A_2|)$ es evidente que la primer ecuación es una ecuación lineal con pendiente -1 y ordenada al origen $|A| - n_3$. Las últimas dos ecuaciones son constantes al nivel $d_j - H + n_k$. Esto evidencia que el poliedro formado es un triángulo rectángulo (puede ser degenerado) por lo que hay 3 puntos extremos en esta figura.

Igual que antes, observemos cuál es el valor mínimo que pueden alcanzar $|A_1|$ y $|A_2|$. Esto está dado por el sistema de ecuaciones de arriba cuyas soluciones ya conocemos:

$|A_1| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_1 - \delta_2 - n_3 + n_4 - n_5)$ and $|A_2| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_2 - \delta_1 - n_3 - n_4 + n_5)$

Para que $|A_1|$ alcance su mínimo basta con reducir n_4 a cero y análogamente, para que $|A_2|$ alcance su mínimo hay que establecer $n_5 = 0$. Luego, el par ordenado contempla ambas condiciones al mismo tiempo el valor mínimo al que se puede acceder como par ordenado es

$$|A_1| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_1 - \delta_2 - n_3) \text{ and } |A_2| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_2 - \delta_1 - n_3) \tag{2}$$

Para encontrar el resto de los puntos extremos tenemos que encontrar el máximo valor que puede tomar $|A_2|$ dada la cantidad mínima de $|A_1|$. Conocemos que para minimizar $|A_1|$ hay que establecer $n_4 = 0$ y para maximizar $|A_2|$ tan sólo hay que darse cuenta que debe de ser el caso que $n_3 = n_4 = 0$ por lo que el valor específico es

$$|A_1| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_1 - \delta_2 - n_5) \text{ and } |A_2| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_2 - \delta_1 + n_5) \tag{3}$$

El último punto es un resultado análogo partiendo de $|A_2|$ y encontrado $|A_1|$:

$$|A_1| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_1 - \delta_2 + n_4) \text{ and } |A_2| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_2 - \delta_1 - n_4) \tag{4}$$

$\therefore$ nuestros puntos extremos son los descritos aquí. $\square$

Al evaluar cada punto en la función objetivo la siguiente observación resulta evidente:

Observación 1. Si el problema tiene solución interior la cantidad de soluciones depende de la relación entre n_3, n_4 y n_5.

Por definición $H = \delta_1 - |A_1| + n_4$. Tómese $|A_1| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_1 - \delta_2 - n_3)$ junto con la hipótesis asociada a este valor, es decir, $n_4 = n_5 = 0$ Luego $H = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 + n_3 - |A|)$. Similarmente, para los otros dos casos se obtiene $H' = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 + n_5 - |A|)$ y $H'' = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 + n_4 - |A|)$. Evidentemente, al comparar H *versus* H' *versus* H. Lo único que interesa es la jerarquía entre n_3 *versus* n_4 *versus* n_5.

El siguiente resultado establece que los 3 puntos son solución al problema base para 2 ciudades.

Teorema 3.1. En el óptimo $n_3 = n_4 = n_5$

Demostración. Partiendo de que el poliedro es un triángulo rectángulo con vertices en los puntos extremos encontrados más arriba debe de ser el caso que la distancia cartesiana entre vértices es la misma que la distancia sobre un solo eje. Por ejemplo, la distancia cartesiana del vértice que se encuentra en el ángulo de 90 grados hacia el punto por encima de éste es igual a la diferencia entre las entradas de ambos puntos en el eje $|A_2|$: Distancia del punto 1 al punto 2: $[(\frac{1}{2}(n_3 - n_5))^2 + (n_3 + n_5))^2]^{\frac{1}{2}}$ y la diferencia entre $|A_2| = \frac{1}{2}(E + \delta_2 - \delta_1 - n_3)$ y $|A_2| = \frac{1}{2}(E + \delta_2 - \delta_1 + n_5)$ es igual a $\frac{1}{2}(n_3 + n_5)$. Para que $[(\frac{1}{2}(n_3 - n_5))^2 + (n_3 + n_5))^2]^{\frac{1}{2}}$ y $\frac{1}{2}(n_3 + n_5)$ sean iguales debe ser el caso que $n_3 = n_5$. Un razonamiento análogo para la distancia entre el punto 1 y 3 resulta en que $n_3 = n_4$ y por lo tanto $n_3 = n_4 = n_5$. □

Luego, cada uno de estos tres puntos es solución del problema base.

3.2.2. Resultados

Hay tres asignaciones que resuelven el problema del estado. A saber,

$$|A_1| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_1 - \delta_2 - n) \text{ and } |A_2| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_2 - \delta_1 - n)$$

$$|A_1| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_1 - \delta_2 - n) \text{ and } |A_2| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_2 - \delta_1 + n)$$

$$|A_1| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_1 - \delta_2 + n) \text{ and } |A_2| = \frac{1}{2}(|A| + \delta_2 - \delta_1 - n)$$

Todas ellas están caracterizadas por aumentar en valor cuando la cantidad de elementos disponibles, $|A|$, aumenta. También aumenta la cantidad de elementos asignados al estado con mayor nivel de inseguridad lo cual es intuitivo. Finalmente, existe la posibilidad de que las asignaciones sean iguales en ambos estados, aunque de no ser así la asignación a un estado es simétrica a la del otro estado (la simetría es caracterizada por n en las ecuaciones).

El beneficio en cada equilibrio es

$$\pi_1 = \delta_1 - \frac{1}{2}(|A| + \delta_1 - \delta_2 + n) = \frac{1}{2}\delta_1 - \frac{1}{2}(|A| - \delta_2 + n) \text{ and } \pi_2 = \frac{1}{2}\delta_2 - \frac{1}{2}(|A| - \delta_1 + n)$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\delta_1 - \frac{1}{2}(|A| - \delta_2 - n) \text{ and } \pi_2 = \frac{1}{2}\delta_2 - \frac{1}{2}(|A| - \delta_1 + n)$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\delta_1 - \frac{1}{2}(|A| - \delta_2 + n) \text{ and } \pi_2 = \frac{1}{2}\delta_2 - \frac{1}{2}(|A| - \delta_1 - n)$$

Claramente, el beneficio del estado es menor cuando aumenta la inseguridad por ciudad y es mayor siempre que aumente la cantidad de elementos disponibles. En este punto podemos hacer una primera comparación con el juego de Vu Quan (2021). Ellos estudian un juego de Blotto, por lo que en su caso la delincuencia interactuaría con el estado, sin embargo su modelo contempla que pueden exisitr *pre-allocations*, es decir, una cantidad de elementos existentes en cada campo de batalla (aquí son ciudades) que reduce su espacio estratégico (mientras más elementos usa la delincuencia como pre alocación, menos le quedan para de hecho jugar). Vu Quan (2021) encuentran que dada una manera de distribuir sus elementos entre campos de batalla, mientras más elementos asigna como *pre-allocation*, menor es su beneficio. Claramente, sucede que llegaría a ser un problema similar al presentado aquí donde la delincuencia se queda sin espacio estratégico y a merced de la mejor respuesta del estado, cuya estrategia será una maximización como la presentada aquí: sin interacción estratégica.

Otro punto importante es cómo debería de distribuir su *pre-allocation* la delincuencia, concentrandose en una sola ciudad o dispersandola entre campos de batalla. Vu Quan (2021) encuentran que conviene concentrar su pre alocación. Esto claramente es consistente con nuestros resultados en el sentido de que, dada una cantidad de elementos de seguridad disponibles $|A|$, si la delincuencia pudiese concentrar su δ en un sólo lugar podría seguir operando en la otra ciudad si su presencia es lo suficientemente pequeña relativa a la presente en la ciudad en la que se concentra.

3.3. Primera generalización: S ciudades

3.3.1. Planteamiento y resolución

Habiendo encontrado las asignaciones óptimas para el caso de 2 ciudades, se puede utilizar esta intuición para resolver el problema general para S ciudades. Considérese una vez más el problema 1.

Es evidente que con respecto a cuando hay soluciones de esquina el resultado es el mismo que con $N = \{1, 2\}$: Sólo es posible escoger entre dos puntos extremos y aquel que tenga un valor positivo en alguna de sus entradas siempre minimiza la función objetivo. Por ello se considerarán sólo regiones alcanzables con al menos dos entradas del vector de a con valor positivo, *i.e.* soluciones interiores.

Para resolver este problema se siguen esencialmente los mismos pasos que arriba. Primero, genérese nuevas variables para convertir las inecuaciones en ecuaciones:

$$\delta_j - |A_j| + n_j = H$$
$$|A_j| - n_{S+j} = 0$$
$$\sum_{j=1}^{S} |A_j| + n_{2S+1} = |A| \ \forall j$$

Ahora, aprovechando el hecho de que todas las restricciones asociadas a H son iguales se parte de $\delta_j - |A_j| + n_j = \delta_k - |A_k| + n_k \Rightarrow |A_j| = \delta_j + n_j - \delta_k + |A_k| - n_k$. Reemplazando en la tercer restricción $\sum_{j=1}^{S} |A_j| + n_{2S+1} = |A|$ obtenemos $\sum_{j=1}^{S}(\delta_j + n_j - \delta_k + |A_k| - n_k) + n_{2S+1} = |A|$ lo cual puede simplificarse a $\delta + n - S\delta_k + S|A_k| - Sn_k + n_{2S+1} = |A|$ donde $\delta = \sum \delta_j \wedge n = \sum n_j$. Finalmente, al despejar $|A_k| = \frac{1}{S}(|A| - \delta_{-k} - n_{-k} + (S-1)\delta_k + (S-1)n_k - n_{2S+1})$ donde $\delta_{-k} = \sum \delta_j$ excepto k y $n_{-k} = \sum n_j$ excepto k. He aquí la solución al sistema de ecuaciones.

A propósito del poliedro formado por las $2S + 1$ ecuaciones del problema considérese la siguiente proposición:

Proposición 3. Si el problema tiene solución interior hay $S + 1$ puntos extremos. Todos son construidos a partir del valor mínimo que puede tomar a de forma que cada punto extremo es

- El valor mínimo que puede tomar a, o

- Un vector con $S-1$ entradas en su mínimo y una entrada en su máximo sujeto al valor de las demás entradas.

Antes de realizar la demostración comencemos por estudiar la región alcanzable. El resultado del sistema de desigualdades es un poliedro *i.e.* es un conjunto de combinaciones lineales no negativas generado por un sistema de inecuaciones lineales resoluble. El conjunto objetivo está delimitado por arriba *i.e.* existe un valor máximo (distinto de $|A|$ por el supuesto de solución interior) que cada entrada del vector a puede asumir. Más aún, también existe un valor mínimo (distinto de cero por el supuesto de solución interior) que cada entrada del vector a puede asumir. Luego, nuestro poliedro es un conjunto acotado en cada dimensión lo que implica que es un conjunto convexo. En particular es el conjunto convexo formado por las ecuaciones en las restricciones del problema (estas forman las caras del poliedro). Por lo tanto nuestro poliedro es un politopo. Ello implica que la región objetivo puede ser descrito por la combinación convexa de sus puntos extremos lo que implica que el conjunto de puntos extremos forma una base de la región objetivo. Como la dimensión del conjunto objetivo es S en realidad sólo se necesitan S puntos extremos para formar una base.

La dimensión del poliedro está dictada por la cantidad de ecuaciones linealmente independientes en las restricciones del problema. No es difícil observar que hay $S+1$ ecuaciones linealmente independientes. Por ello, hay $S+1$ puntos extremos.

Para caracterizar los puntos extremos considérese el valor mínimo de la región alcanzable:

$$a = (|A_1|, \cdots, |A_S|) \text{ con } |A_j| = \frac{1}{S}(|A| - \delta + S\delta_j - n_{2S+1}) \ \forall j$$

Este punto evidentemente es alcanzable y extremo. Es imposible reconstruir algún $|A_j|$ como combinación convexa de las demás entradas del vector porque ninguno tiene n_j. Para encontrar el resto de puntos extremos se parte de este punto extremo y se dejan S deltas en cero y una se impone con valor positivo. De esta forma de obtienen:

$$
\begin{aligned}
a = (|A_1|, \cdots, |A_S|) \text{ con } |A_j| &= \frac{1}{S}(|A| - \delta + S\delta_j - n_{2S+1}) \ \forall j \\
a = (|A_1|, \cdots, |A_S|) \text{ con } |A_j| &= \frac{1}{S}(|A| - \delta_{-k} + (S-1)\delta_j - n_1) \ \forall j \neq 1 \\
\text{and } |A_1| &= \frac{1}{S}(|A| - \delta_{-k} + (S-1)\delta_1 + (S-1)n_1) \\
&\vdots \\
a = (|A_1|, \cdots, |A_S|) \text{ con } |A_j| &= \frac{1}{S}(|A| - \delta_{-k} + (S-1)\delta_j - n_j) \ \forall j \neq S \\
\text{and } |A_S| &= \frac{1}{S}(|A| - \delta_{-k} + (S-1)\delta_S + (S-1)n_S)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

De esta forma obtenemos los $S+1$ puntos extremos que delimitan el conjunto alcanzable. No es difícil probar que todos estos puntos son extremos y la prueba de la proposición 3 no es más que notar que no por construcción no es posible reconstruir cualquier punto por virtud de que la n particular que se impone como cero en el punto por reconstruir es irrecuperable.

Demostración. Ya que todos son idénticos excepto por la n particular que se impone positiva es imposible reconstruir cualquiera de estos puntos a partir de cualquier combinación lineal de elementos en el conjunto.

□

Ahora bien, al evaluar cada uno de los puntos extremos para minimizar H se obtiene el siguiente resultado análogo al caso de $n = 2$:

$$\delta_j - |A_j| + n_j = H$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 - |A_1| + n_1 &= \delta_1 - \frac{1}{S}(|A| - \delta + S\delta_1 - n_{2S+1}) + n_1 = \frac{1}{S}(\delta + n_{2S+1} - |A|) \\
\delta_1 - |A_1| + n_1 &= \delta_1 - \frac{1}{S}(|A| - \delta_{-k} + (S-1)\delta_1 + (S-1)n_1) + n_1 = \frac{1}{S}(\delta - n_1 - |A|) \\
&\vdots \\
\delta_1 - |A_1| + n_1 &= \delta_1 - \frac{1}{S}(|A| - \delta_{-k} + (S-1)\delta_1 - n_1) = \frac{1}{S}(\delta - n_1 - |A|)
\end{aligned}$$

No es difícil probar, como en el caso de $n = 2$, que todos los puntos extremos son solución al problema base y que esto es consecuencia de que $H = H \Rightarrow n_j = n_{j'} \ \forall j$.

3.3.2. Resultados

En el caso de S ciudades obtenemos $S + 1$ asignaciones óptimas. Cada una de ellas está caracterizada por los mismos resultados al caso de dos ciudades en la estática comparativa, es decir, siempre que aumenta la cantidad de elementos de seguridad disponibles, aumentan todas la asignación en cada ciudad, la ciudades con mayor nivel de inseguridad relativo al resto de ciudades se llevan la mayor parte de los elementos, es posible que haya una asignación en la que todas las ciudades se lleven la misma cantidad de elementos y de no ser así, las asignaciones son simétricas. También se mantiene el resultado de que a mayor disponibilidad de elementos de seguridad aumenta el beneficio del estado y a mayor inseguridad disminuye. Esta es la razón por la que resolvimos el modelo para $S = 2$: como la generalización es directa, los resultados también lo son.

4. Rendimientos a escala

Hasta ahora hemos supuesto que los elementos producen seguridad con rendimientos constantes a escala. En este capítulo relajamos este supuesto y consideramos la posibilidad de que haya rendimientos decrecientes a escala.

4.1. Definiciones

Comencemos por construir una nueva función de producción de seguridad con la posibilidad de rendimientos (de)crecientes a escala:

$$\pi_j(a_j) = \delta_j - \Pi_{h=1}^{N}(\sum_{e_h \in A_j} e_h)^{\alpha_h}$$

Con $\sum_{h=1}^{N} \alpha_h = 1$.

Esta función está caracterizada por haber N tipos de elementos de seguridad distintos (producen distintas cantidades de seguridad), su productividad está afectada por un exponente correspondiente a cada suma de tipos α_h y es necesaria una cantidad positiva de los N elementos para comenzar a reducir la seguridad. De esta forma podemos pensar que la producción de seguridad es resultado de la asignación de dotaciones de elementos que actúan en conjunto para reducirla.

Para simplificar la ecuación convendrá hacer algunos supuestos análogos al problema base trabajado arriba y otros más.

Sea E el conjunto de elementos de seguridad. Supongamos dos tipos de elementos de seguridad e_1 y e_2 o bien $N = 2$. Luego, podemos escribir E como la unión de dos conjunto disjuntos E_1 y E_2 tal que ambos conjuntos contienen a todos los elementos respectivos: $E_h = \{e_h \in E \mid e_h \neq e_k\}\ \forall h \neq k$, es decir, $E = E_1 \cup E_2$. Análogamente, A_j será el conjunto de elementos de seguridad asignados al estado j y puede escribirse como la unión de dos conjuntos disjuntos A_{j1} y A_{j2} tal que ambos conjuntos contienen a todos los elementos respectivos asignados al estado j: $A_{jh} = \{e_h \in A_j \mid e_h \neq e_k\} \; \forall j \neq k$. Luego, $A_j = A_{j1} \cup A_{j2}$. Además, consideremos el caso de 2 estados, es decir, $S = 2$.

En consecuencia, la suma de los elementos de tipo h asignados al estado j es tan sólo la cardinalidad del conjunto correspondiente A_{jh} multiplicado por el valor que tiene cada elemento de seguridad individualmente al reducir la inseguridad: $\sum_{e_h \in A_j} e_h = e_h \cdot |A_{jh}|$. Supongamos que $e_1 = 1$ y $e_2 = 2$. Reemplazando en la función de producción de seguridad:

$$\pi_j(a_j) = \delta_j - \Pi_{h=1}^{2}(e_h \cdot |A_{jh}|)^{\alpha_h}$$

Tomando todos estos elementos el problema se ve de la siguiente forma:

$$\begin{gathered} \underset{a \in A}{min} \; \underset{k \in \{1,\cdots,S\}}{max} \pi_k \\ \text{s.a.} \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} \pi &= (\pi_1, \pi_2) \\ a &= (|A_1|, |A_2|) \\ \pi_j &= \delta_j - \Pi_{h=1}^{2}(e_h \cdot |A_{jh}|)^{\alpha_h} \\ \sum_{j=1}^{2} |A_{j1}| &\leqslant E_1 \\ \sum_{j=1}^{2} |A_{j2}| &\leqslant E_2 \end{aligned}$$

4.2. Planteamiento y resolución

Para resolverlo primero definamos H como $H = \underset{k \in \{1,\cdots,S\}}{max} \pi_k$. Luego, $\pi_j \leqslant H \; \forall j$ igual que en el capítulo anterior. El problema base se puede reescribir en términos de H:

$$\max_{a \in A} H$$

s.a.

$$|A_{jh}| \geqslant 0$$
$$\sum_{j=1}^{2} |A_{j1}| \leqslant E_1$$
$$\sum_{j=1}^{2} |A_{j2}| \leqslant E_2$$
$$\delta_j - \Pi_{h=1}^{2} (e_h \cdot |A_{jh}|)^{\alpha_h} \leqslant H \ \forall\ j$$

Inspeccionando este problema se puede observar que este problema ya no es de programación lineal. Tanto la función objetivo como una restricción no son lineales. En consecuencia, hay que aplicar otro método para resolver este problema. Es posible estudiar la solución a este problema si se contemplan los 3 casos de la función objetivo por separado: $H = \pi_1$ ó $H = \pi_2$ ó $H = \pi_1 = \pi_2$. De esta forma la función objetivo es lineal y resta tan sólo dar cuenta de la restricción no lineal de H.

Si escribimos el Lagrangiano general (sin hacer supuestos sobre H) resulta lo siguiente:

$L(|A_{jk}|, \lambda_n)) = H - \lambda_1(\delta_1 - (|A_{11}|)^{\alpha_1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2} - H) - \lambda_2(\delta_2 - (|A_{21}|)^{\alpha_1}(2|A_{22}|)^{\alpha_2} - H) - \lambda_3(|A_{11}| + |A_{22}| - E_1) - \lambda_4(|A_{21}| + |A_{22}| - E_2)$

$= H - \lambda_1(\pi_1 - H) - \lambda_2(\pi_2 - H) - \lambda_3(|A_{11}| + |A_{22}| - E_1) - \lambda_4(|A_{21}| + |A_{22}| - E_2)$

Por inspección, el Lagrangiano es una función convexa en sus argumentos $|A_{jh}|$.

Para $H = \pi_1$ las derivadas parciales son las siguientes:

$\frac{\partial L}{\partial |A_{11}|} = -\alpha_1 |A_{11}|^{\alpha_1 - 1}(2 \cdot |A_{12})^{\alpha_2} - \alpha_1 \lambda_2 |A_{11}|^{\alpha_1 - 1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2} - \lambda_3$
$\frac{\partial L}{\partial |A_{12}|} = -2\alpha_2 |A_{11}|^{\alpha_1}(2 \cdot |A_{12})^{\alpha_2 - 1} - 2\alpha_2 \lambda_2 |A_{11}|^{\alpha_1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2 - 1} - \lambda_4$
$\frac{\partial L}{\partial |A_{21}|} = \alpha_1 \lambda_2 |A_{21}|^{\alpha_1 - 1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2} - \lambda_3$
$\frac{\partial L}{\partial |A_{22}|} = 2\alpha_2 \lambda_2 |A_{21}|^{\alpha_1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2 - 1} - \lambda_4$

Con restricciones de la siguiente forma:

$$(\lambda_2 = 0 \text{ and } \pi_2 - H \geqslant 0) \text{ or } (\lambda_2 \geqslant \text{ and } \pi_2 - H = 0)$$
$$(\lambda_3 = 0 \text{ and } \sum_{h=1}^{2} |A_{1h}| - E_1 \geqslant 0) \text{ or } (\lambda_3 \geqslant 0 \text{ and } \sum_{h=1}^{2} |A_{1h}| - E_1 = 0)$$
$$(\lambda_4 = 0 \text{ and } \sum_{h=1}^{2} |A_{2h}| - E_2 \geqslant 0) \text{ or } (\lambda_4 \geqslant 0 \text{ and } \sum_{h=1}^{2} |A_{2h}| - E_2 = 0)$$

Para $H = \pi_2$:

$\frac{\partial L}{\partial |A_{11}|} = \alpha_1 \lambda_1 |A_{11}|^{\alpha_1 - 1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2} - \lambda_3$
$\frac{\partial L}{\partial |A_{12}|} = 2\alpha_2 \lambda_1 |A_{11}|^{\alpha_1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2 - 1} - \lambda_4$
$\frac{\partial L}{\partial |A_{21}|} = -\alpha_1 (|A_{21}|^{\alpha_1 - 1}(2|A_{22}|)^{\alpha_2} - \alpha_1 \lambda_1 |A_{21}|^{\alpha_1 - 1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2} - \lambda_3$
$\frac{\partial L}{\partial |A_{22}|} = -2\alpha_2 (|A_{21}|^{\alpha_1}(2|A_{22}|)^{\alpha_2 - 1} - 2\alpha_2 \lambda_1 |A_{21}|^{\alpha_1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2 - 1} - \lambda_4$

Con restricciones de la siguiente forma:

$$(\lambda_1 = 0 \text{ and } \pi_1 - H \geqslant 0) \text{ or } (\lambda_1 \geqslant \text{ and } \pi_1 - H = 0)$$
$$(\lambda_3 = 0 \text{ and } \sum_{h=1}^{2} |A_{1h}| - E_1 \geqslant 0) \text{ or } (\lambda_3 \geqslant 0 \text{ and } \sum_{h=1}^{2} |A_{1h}| - E_1 = 0)$$
$$(\lambda_4 = 0 \text{ and } \sum_{h=1}^{2} |A_{2h}| - E_2 \geqslant 0) \text{ or } (\lambda_4 \geqslant 0 \text{ and } \sum_{h=1}^{2} |A_{2h}| - E_2 = 0)$$

Y para $H = \pi_1 = \pi_2$:

$\frac{\partial L}{\partial |A_{11}|} = -\alpha_1 |A_{11}|^{\alpha_1 - 1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2} - \lambda_3$
$\frac{\partial L}{\partial |A_{12}|} = -2\alpha_2 |A_{11}|^{\alpha_1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2 - 1} - \lambda_4$
$\frac{\partial L}{\partial |A_{21}|} = -\alpha_1 |A_{21}|^{\alpha_1 - 1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2} - \lambda_3$
$\frac{\partial L}{\partial |A_{22}|} = -2\alpha_2 |A_{21}|^{\alpha_1}(2|A_{12}|)^{\alpha_2 - 1} - \lambda_4$

Con restricciones:

$$(\lambda_3 = 0 \text{ and } \sum_{h=1}^{2} |A_{1h}| - E_1 \geqslant 0) \text{ or } (\lambda_3 \geqslant 0 \text{ and } \sum_{h=1}^{2} |A_{1h}| - E_1 = 0)$$
$$(\lambda_4 = 0 \text{ and } \sum_{h=1}^{2} |A_{2h}| - E_2 \geqslant 0) \text{ or } (\lambda_4 \geqslant 0 \text{ and } \sum_{h=1}^{2} |A_{2h}| - E_2 = 0)$$

Lema 1. El único sistema de ecuaciones consistente de este problema es con todas las restricciones apretando *i.e.* $\lambda_n \geqslant 0 \; \forall n$.

Demostración. Para observar este hecho basta con inspeccionar cada uno de los sistemas de ecuaciones y caer en cuenta que para que cualquier sistema sea consistente ningún A_{jh} puede ser negativo. Luego, es necesario que ningún multiplicador de lagrange sea cero. De esta forma la única forma en que los sistemas sean consistentes es suponer que se dan todas las (in)ecuaciones de la parte derecha. □

Al ser el Lagragiano una función convexa con un sistema de ecuaciones asociada Karush-Kuhn-Tucker consistente este problema tiene una solución única.

4.3. Resultados

Teorema 4.1. Las asignaciones que satisfacen el problema de minimización del estado son las siguientes:

(todas las entradas están multiplicadas por $\frac{1}{2}$)

La prueba es el desarrollo del Lagragiano de la sección anterior.

Finalizaremos por hacer un ejercicio de estática comparativa:

Cuadro 1: Resultados para rendimientos a escala

	$H=\pi_1$	$H=\pi_2$	$H=\pi_1=\pi_2$
$\lvert A_{11}\rvert$	$E_1+\frac{\delta_1-\delta_2}{2^{\alpha_2}}(\frac{E_1}{E_2})^{\alpha_2}$	$E_1+\frac{\delta_1-\delta_2}{2^{\alpha_2}}(\frac{E_1}{E_2})^{\alpha_2}$	$E_1+\frac{\delta_2-\delta_1}{2^{\alpha_2}}(\frac{E_2}{E_1})^{\alpha_2}$
$\lvert A_{12}\rvert$	$E_2+\frac{\delta_1-\delta_2}{2^{\alpha_2}}(\frac{E_2}{E_1})^{\alpha_1}$	$E_2+\frac{\delta_1-\delta_2}{2^{\alpha_2}}(\frac{E_2}{E_1})^{\alpha_1}$	$E_2+\frac{\delta_2-\delta_1}{2^{\alpha_2}}(\frac{E_1}{E_2})^{\alpha_1}$
$\lvert A_{21}\rvert$	$E_1+\frac{\delta_2-\delta_1}{2^{\alpha_2}}(\frac{E_1}{E_2})^{\alpha_2}$	$E_1+\frac{\delta_2-\delta_1}{2^{\alpha_2}}(\frac{E_1}{E_2})^{\alpha_2}$	$E_1+\frac{\delta_1-\delta_2}{2^{\alpha_2}}(\frac{E_2}{E_1})^{\alpha_2}$
$\lvert A_{22}\rvert$	$E_2+\frac{\delta_2-\delta_1}{2^{\alpha_2}}(\frac{E_2}{E_1})^{\alpha_1}$	$E_2+\frac{\delta_2-\delta_1}{2^{\alpha_2}}(\frac{E_2}{E_1})^{\alpha_1}$	$E_2+\frac{\delta_1-\delta_2}{2^{\alpha_2}}(\frac{E_1}{E_2})^{\alpha_1}$

Proposición 4. Si $\delta_j > \delta_{j'} \Rightarrow |A_{jh}| > |A_{j'h}|\ \forall j \neq j'$. Si $\delta_j = \delta_{j'} \Rightarrow |A_{jh}| = |A_{j'h}|\ \forall j$.

Demostración. La demostración se sigue del hecho que $H = \pi_j \iff \delta_j \geqslant \delta_{j'}\ \forall j \neq j'$. Si $\delta_j = \delta_{j'}$ la proposición es inmediata. $\square$

Una observación importante es que la única forma en que alguna $|A_{jh}|$ sea igual a cero es si $H = \pi_j$ and $|A_{j'h}| = 0 \iff j \neq j'$- Por ejemplo, es posible que cuando $H = \pi_1$ entonces $|A_{21}| = 0$ or $|A_{22}| = 0$, pero no es posible que $|A_{11}| = 0$ or $|A_{12}| = 0$. Debido a la restricción de que cada $|A_{jh}| > 0$ y el hecho de arriba: $H = \pi_j \iff \delta_j \geqslant \delta_{j'}\ \forall j \neq j'$.

La interpretación de la proposición 4 es que es posible que si $\delta_1 \neq \delta_2$ entonces la ciudad con mayor inseguridad puede obtener cualquier combinación de ambos tipos de elementos, pero es posible que la ciudad con menor inseguridad obtenga una asignación compuesta únicamente por elementos menos efectivos. Esto se debe al orden de prioridad del estado: darle prioridad a la ciudad con mayor inseguridad.

Finalmente, las funciones de beneficio para $H = \pi_1$ y $H = \pi_2$ (las primeras dos columnas de la tabla de resultados) le reportan un beneficio al estado de

$$\pi_1 = \delta_1 - (\tfrac{1}{2} \cdot (E_1 + \tfrac{\delta_1 - \delta_2}{2^{\alpha_2}}(\tfrac{E_1}{E_2})^{\alpha_2}))^{\alpha_1}(E_2 + \tfrac{\delta_1 - \delta_2}{2^{\alpha_2}}(\tfrac{E_2}{E_1})^{\alpha_1})^{\alpha_2}$$

$$\pi_2 = \delta_2 - (\tfrac{1}{2} \cdot (E_1 + \tfrac{\delta_2 - \delta_1}{2^{\alpha_2}}(\tfrac{E_1}{E_2})^{\alpha_2}))^{\alpha_1}(E_2 + \tfrac{\delta_2 - \delta_1}{2^{\alpha_2}}(\tfrac{E_2}{E_1})^{\alpha_1})^{\alpha_2}$$

Y cuando $H = \pi_1 = \pi_2$

$$\pi_1 = \delta_1 - (\tfrac{1}{2} \cdot (E_1 + \tfrac{\delta_2 - \delta_1}{2^{\alpha_2}}(\tfrac{E_2}{E_1})^{\alpha_2}))^{\alpha_1}(E_2 + \tfrac{\delta_2 - \delta_1}{2^{\alpha_2}}(\tfrac{E_1}{E_2})^{\alpha_1})^{\alpha_2}$$

$$\pi_2 = \delta_2 - (\tfrac{1}{2} \cdot (E_1 + \tfrac{\delta_1 - \delta_2}{2^{\alpha_2}}(\tfrac{E_2}{E_1})^{\alpha_2}))^{\alpha_1}(E_2 + \tfrac{\delta_1 - \delta_2}{2^{\alpha_2}}(\tfrac{E_1}{E_2})^{\alpha_1})^{\alpha_2}$$

Inspeccionando estos valores para las funciones de beneficio y recordando que el objetivo del estado es minimizarlas podemos concluir que los resultados del modelo base (sin rendimientos a escala) son generalizables para funciones de producción de forma Cobb-Douglas con exponentes estandarizados a 1 en el caso de 2 estados y 2 tipos de elementos de seguridad *i.e.* $\sum_{h=1}^{2} \alpha_h = 1$. El estado aún asigna más elementos a la ciudad con mayor inseguridad. Además, siempre que aumente la cantidad de cada elemento se asignarán más elementos y aumenta el beneficio del estado. El estado se lleva un beneficio más alto en la ciudad en la que la inseguridad inical era más baja y, evidentemente, se lleva el mismo beneficio en ambos estados si la inseguridad inicial es la misma en ambas ciudades. También es importante notar que mientras mejores sean los rendimientos a escala de los elemenentos de seguridad, mayor será la asignación efectiva por ciudad y mayor será el beneficio del estado. Una exhibición de la improtancia de que el problema de inseguridad en este modelo no sólo depende de la cantidad de elementos de los que el estado dispone, sino de su efectividad relativa.

5. Juegos

5.1. El juego de costos fijos

Hasta ahora hemos considerado el crimen como una dotación asignada a cada estado. En este capítulo generalizamos nuestro modelo a un juego entre el estado y el crimen organizado en el que compiten por ciudades de tal forma que el estado busque reducir la inseguridad y el crimen organizado maximice sus beneficios económicos mientras produce inseguridad.

5.1.1. Definiciones

Hay dos jugadores: el estado y la delincuencia. Estos dos jugadores se enfrentan en S ciudades (igual que antes, el índice de las ciudades es j). La forma de sus estrategias es un vector con S entradas, una para cada ciudad y ambos jugadores tienen por espacio estratégico los números reales positivos. En notación $|A_j|$ and $L_j \in \mathbb{R}_+$ donde $|A_j|$ sigue siendo la estrategia del estado y L_j será la estrategia de la delincuencia. Los vectores de estrategias tienen la forma $a = (|A_1|, \cdots, |A_S|)$ y $b = (L_1, \cdots, L_S)$.

El estado trabaja con una función de beneficio por ciudad similar a la de los problemas de maximización anteriores:

$$\pi_j(|A_j|) = L_j - a_j|A_j|$$

Las restricción se mantiene idéntica, es decir,

$$\sum_{j=1}^{S} |A_j| \leqslant |A|$$

Esta función de beneficio por estado se diferencia de las funciones de los problemas de maximización de los capítulos anteriores en dos variables. L_j es la inseguridad producida en el estado j en forma de trabajo demandado por la delincuencia. Mientras más trabajo demande la delincuencia, más inseguridad se produce. Esta variable reemplaza a la distribución estática δ_j de los problemas anteriores $\delta_j = L_j$. La nueva variable a_j caracteriza la efectividad de los elementos al ser desplegados en el estado j y evidentemente mientras mayor sea a_j más efectivos serán los elementos asignados. Claramente, en los problemas de las secciones anteriores a_j se supuso igual a 1. Una vez más, $|A_j|$ es la cantidad de elementos de seguridad que el estado asigna a la ciudad j.

En esta sección la función objetivo del estado será la misma que en los problemas de las secciones de arriba, es decir, será de la forma:

$$\underset{a \in A}{min} \underset{k \in \{1,\cdots,S\}}{max} \pi_k(|A_1|, \cdots, |A_S|)$$

En cuanto a la delincuencia consideremos a ϕ_j el beneficio de la delincuencia en la ciudad j como sigue:

$$\phi_j(L_j) = p \cdot L_j^{\alpha} - wL_j - |A_j|$$

Donde p es el precio de la mercancía ilegal producida por la delincuencia y es una variable exógena, $L_j^{\alpha} = q_j$ es la cantidad producida en términos de su costo laboral, L_j es la cantidad de trabajo demandado y $wL_j + |A_j| = c(L_j)$ es la función de costos con w el salario pagado por trabajador, que también es exógeno y los esfuerzos del estado por restringir la inseguridad como costos fijos. Hay una restricción análoga a la restricción del estado:

$$\sum_j^S L_j = L$$

Es decir, hay un número limitado de personas en el mercado laboral.

El objetivo de la delincuencia es maximizar su beneficio económico a través de todas las ciudades. Luego, la función de beneficio de la delincuencia es:

$$\underset{L_j}{max} \sum_j^S \phi_j(L_j).$$

Notemos que la delincuencia tiene monopolio en este modelo y que dependiendo de α se pueden inferir los rendimientos a escala de la producción. La forma de la ecuación de beneficio también implica que la delincuencia se enfrenta a un sólo mercado con un precio único, pero debe distribuir su producción entre distintas ciudades. Lo planteamos de esta forma para capturar la idea de un mercado de exportación similar a la situación a la que se enfrentan los carteles mexicanos que exportan la mayor parte de su producto a Estados Unidos.

5.1.2. Funciones de mejor respuesta y equilibrio de Nash

El concepto de solución que se utilizará es el equilibrio de Nash. Un perfil estratégico es un equilibrio de Nash si, para cada jugador el beneficio de jugar la estrategia indicada por el perfil estratégico es mayor o igual a jugar cualquier otra estrategia dada la estrategia de equilibrio del oponente. Podemos encontrar un equilibrio de Nash si resolvemos el sistema de ecuaciones derivado de las funciones de mejor respuesta de cada jugador, es decir, si encontramos la forma de sus estrategias cuando ambos jugadores están jugando su mejor respuesta. Comencemos por encontrar las funciones de mejor respuesta de la delincuencia.

Las S condiciones de primer orden en cada ciudad son:

$$\alpha p L_j^{\alpha-1} - w = 0 \;\forall j$$

Establecemos que todas las L_j serán iguales. Esto se debe a que la ecuación de beneficio, $\phi_j(L_j)$, es la misma en cada estado. Al maximizar la suma de todas ellas y encontrar la cantidad $L_j(|A_j|)$ óptima no hay interacción entre la cantidad de trabajo demandado entre estados. Más importante aún para nuestros modelos, la seguridad producida por el estado entra en la función de beneficio de la delincuencia como un costo fijo, por lo que no figura en sus condiciones marginales y en consecuencia tampoco es parte de sus funciones de mejor respuesta:

$$L_j(|A_j|) = (\tfrac{w}{\alpha p})^{\frac{1}{\alpha-1}} \ \forall j$$

Una situación similar sucede al encontrar la mejor respuesta del estado. Como modelamos la inseguridad como un costo fijo, la decisión de la delincuencia no forma parte de la decisión marginal del estado al asignar elementos de seguridad en el equilibrio de Nash.

A continuación se encuentra la función de mejor respuesta del estado. Comencemos a resolver este problema con una definición que nos será de utilidad. Primero, separemos a los elementos del conjunto $\{\pi_j\}_j^S$ que están en el máximo. Llámsele $M = \{\pi_k\}_k^K \subseteq \{\pi_j\}_j^S$ al conjunto con elementos en el máximo.

Proposición 5. Sean $\pi_j, \pi_{j'} \in M$. $\pi_j = \pi_{j'} \ \forall j \neq j'$ en el óptimo.

Demostración. Por reducción al absurdo. Supongamos que existe alguna asignación de elementos en el óptimo tal que $\pi_{j'} \in M$ y $\pi_{j'} < \pi_j \ \forall \pi_j \in M$. Luego, esta distribución cumple con la condición min max $\{\pi_j\}_j^S =$ min M. Por continuidad, es posible quitar una cantidad ϵ a $\pi_{j'}$ y repartirla el resto de elementos en M lo que en consecuencia reduciría aún más el valor de todas las $\pi_j \neq \pi_{j'}$, por lo que la distribución no minimiza M. El argumento para $\pi_{j'} > \pi_j$ es análogo. $\square$

Sabiendo esto tomemos una de las funciones en M: $\pi_{j'}$. Sabemos que es igual a todas las demás funciones en M en el óptimo: $\pi_{j'} = \pi_j \ \forall \pi_j \in M$. Luego,

$$L_{j'} - a_{j'}|A_{j'}| = L_j - a_j|A_j| \; \forall j \neq j' \rightarrow |A_j| = \frac{L_j - L_{j'} + a_{j'}|A_{j'}|}{a_j}$$

Considerando la restricción $\sum |A_j| = |A|$. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{S} \frac{L_j - L_{j'} + a_{j'}|A_{j'}|}{a_j} = |A| \rightarrow |A_{j'}| = \frac{|A| - \sum \frac{L_j}{a_j} + \sum \frac{L_{j'}}{a_j}}{a_{j'} \sum \frac{1}{a_j}}$$

Esta es la mejor respuesta del estado, y podemos observar que de hecho depende de la estrategia de la delincuencia, pero también sabemos que la mejor respuesta de la delincuencia implica que $L_j = L_{j'} \; \forall j$. Por lo tanto, en el equilibrio de Nash

$$|A_j| = \frac{|A|}{a_j \sum \frac{1}{a_j}} \forall j$$

Notablemente, las cantidades $|A_j|$ difieren sólo por la variable a_j.

5.1.3. Resultados

Hemos probado que

Proposición 6. El equilibrio de Nash tiene la forma

$$L_j^* = \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$
$$|A_j^*| = \frac{|A|}{a_j \sum \frac{1}{a_j}} \forall j$$

Aunque el estado toma en cuenta las decisiones de la delincuencia para elaborar su estrategia, en el equilibrio, ninguna de las dos partes afecta a la otra en su toma de decisiones. Esto es consecuencia de que ambas partes visualizan a la otra como un costo fijo.

El modelo predice que a mayores dotaciones de $|A|$ el estado puede otorgar más elementos a todas las ciudades. La ciudad dónde se da la mayor parte del

Espacio $(|A|, L)$

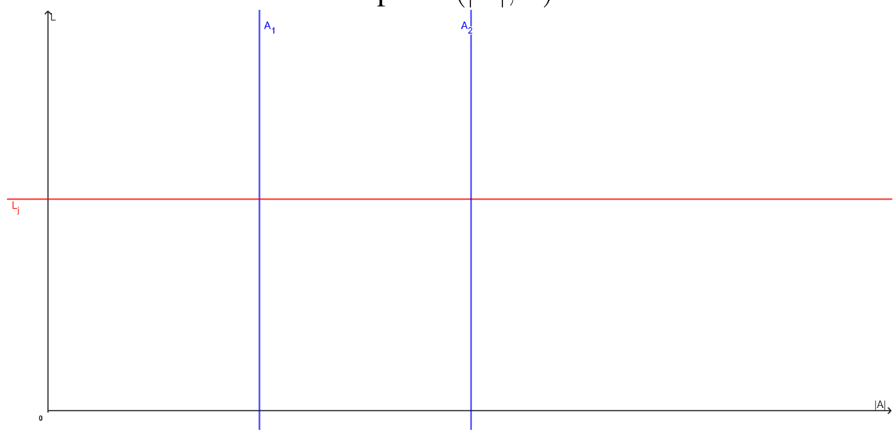

Figura 2: Equilibrio de Nash S=2

conflicto, es decir donde se encuentra la mayor presencia de la delincuencia y del estado, es aquella donde la efectividad de los elementos es menor. Esto se debe a que la demanda de trabajo delincuencial es la misma en ambos estados y para reducir la inseguridad al mismo nivel que el resto de los estados es necesario asignar una mayor cantidad de elementos de seguridad a la ciudad con menor efectividad de elementos de seguridad.

Notablemente, la delincuencia no toma en cuenta su restricción para asignar su estrategia. La demanda de trabajo de la delincuencia es mayor si aumentan los rendimientos por trabajador (α), aumenta el precio del bien demandado (p) o si disminuye el salario por trabajador (w).

Como sabemos, el estado se lleva el mismo beneficio en ambas ciudades

$$\pi_j(|A_1|, \cdots, |A_S|) = (\tfrac{w}{\alpha p})^{\frac{1}{\alpha - 1}} - \frac{|A|}{\sum \frac{1}{a_j}} \forall j$$

Su beneficio aumenta con la cantidad de elementos disponibles $|A|$, el salario de los delincuentes w y con el rendimiento de los elementos por ciudad a_j, y disminuye con los rendimientos de la delincuencia α y el precio del bien ilegal p.

Finalmente, la delincuencia se lleva los beneficios

$$\phi_j(L_1, \cdots, L_S)_{=} p \cdot (\frac{w}{\alpha p})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - w(\frac{w}{\alpha p})^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{|A|}{a_j \sum \frac{1}{a_j}}$$

Su beneficio económico será mayor en la ciudad en las que la efectividad de los elementos a_j sea menor. El beneficio de la delincuencia lo reduce el salario de sus empelados w y la cantidad de elementos de seguridad disponibles para el estado $|A|$. Su beneficio aumenta con el precio del bien p y con los rendimientos de sus empleados α.

5.2. El juego de costos variables

Al igual que arriba consideremos un juego entre delincuencia y estado, pero ahora cambiaremos las definiciones de sus funciones de beneficio por ciudad.

5.2.1. Definiciones

Trabajamos con los mismos dos jugadores que en el juego anterior, así como los mismos espacios estratégicos y a través de las mismas S ciudades. La notación para las estrategias de ambos jugadores es la misma: $a = (|A_1|, \cdots, |A_S|)$ y $b = (L_1, \cdots, L_S)$. Igual que antes, el estado minimiza el máximo de sus funciones de beneficio y la delincuencia maximiza la suma de sus beneficios entre ciudades. Las restricciones son idénticas. Veamos en qué se diferencia este juego del anterior.

El estado trabaja con una función de beneficio por ciudad de la forma

$$\pi_j(|A_j|) = \begin{cases} a_j(1+L_j)(\frac{1}{|A_j|}) & |A_j| > 0 \\ a_j(1+L_j) & |A_j| = 0 \\ 0 & L_j = 0 \end{cases}$$

La delincuencia opera con

$$\phi_j(L_j) = p(L_j)^{\alpha} - wL_j|A_j|$$

A propósito de estas nuevas definiciones, la nueva función de beneficio del estado sigue cumpliendo la propiedad de que a mayor cantidad de elementos asignados al estado j, se reduce la inseguridad, así como aumenta cuando la delincuencia demanda trabajo en el mismo estado. Esta nueva función elimina la posibilidad de soluciones de la forma, $|A_j| = 0$ and $|A_{j'}| > 0$ y de la forma $L_j = 0$ and $L_{j'} > 0$ para algún $j \neq j'$ [1] e incluye el término a_j del juego anterior para modelar la efectividad de los elementos de seguridad por estado, aunque ahora mientras mayor sea a_j menor será la efectividad de los elementos en la ciudad j. En cuanto a la delincuencia, su función de beneficio ahora incluye la cantidad de elementos de seguridad como costo variable. Ello pude interpretarse como una prima sobre el salario a pagar por cada trabajador demandado debido a la ilegalidad en el giro del negocio. Estas nuevas funciones permiten a un tiempo elaborar un modelo con mayor interacción estratégica y preservar el comportamiento de ambas partes establecida en el juego anterior.

[1] Para la prueba de este hecho véase el anexo.

5.2.2. El caso de dos ciudades (S=2)

Funciones de mejor respuesta y equilibrio de Nash

Consideremos que hay sólo dos ciudades en disputa. Una vez más utilizaremos el concepto de solución de equilibrio de Nash cuya forma es la siguiente:

Proposición 7. Si $L < 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ entonces el equilibrio de Nash es que todos los jugadores jueguen 0 en cada ciudad, si $L = 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ entonces $L_1^* = L_2^* = [\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ y $|A_j^*| = \frac{a_j}{a_1+a_2}$ y si $L > 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ entonces hay dos estrategias simétricas para la delincuencia y el estado en el equilibrio de Nash (sus formas detalladas están mas adelante).

Comencemos encontrando las funciones de mejor respuesta. El problema de la delincuencia es

$$\underset{L_j}{max}\ (\textstyle\sum_{j=1}^{2} p(L_j)^{\alpha} - wL_j|A_j|)$$

Las condiciones de primer orden son

$$\alpha p(L_j)^{\alpha-1} - w|A_j| = 0\ \forall j \in \{1,2\}$$

Por lo que cada L_j se ve de la siguiente forma:

$$L_j(|A_j|) = \begin{cases} (\frac{w|A_j|}{\alpha p})^{\frac{1}{\alpha-1}}\ \forall j \in \{1,2\} & \text{si } L \geqslant 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \\ 0 & \text{si } L < 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \end{cases}$$

Notemos que la primera parte es una función casi idéntica a la función del primer juego, con la única diferencia de que ahora también depende de la estrategia del estado. No necesariamente sucede que todas las L_j sean iguales. La segunda parte hace referencia a que es posible que el estado disponga de suficientes elementos para generar beneficios negativos en ambas ciudades para la delincuencia. En este caso, la mejor respuesta de la delincuencia sera no jugar *i.e.* jugar 0 en ambas ciudades. El valor $L = 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ se encontrara mas adelante.

Por otra parte, el problema del estado es más complejo, pero se resuelve similarmente al del primer juego. Como en este juego también se cumple la Proposición 6. Podemos seguir el mismo procedimiento del problema de costos fijos para encontrar las mejores respuestas del estado

$$a_1(1+L_1)(\tfrac{1}{|A_1|}) = a_2(1+L_2)(\tfrac{1}{|A_2|}) \text{ entonces } |A_1|(L_1,L_2) = \tfrac{a_1(1+L_1)}{a_2(1+L_2)}|A_2|$$

Reemplazamos en la restricción de dotación y despejamos para $|A_2|$:

$$|A_2|(L_1,L_2) = \begin{cases} \frac{a_2(1+L_2)}{a_1(1+L_1)+a_2(1+L_2)}|A| & \text{si } L \geqslant 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \\ 0 & \text{si } L < 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \end{cases}$$

Análogamente,

$$|A_1|(L_1,L_2) = \begin{cases} \frac{a_1(1+L_1)}{a_1(1+L_1)+a_2(1+L_2)}|A| & \text{si } L \geqslant 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \\ 0 & \text{si } L < 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \end{cases}$$

La explicación para le presencia del 0 va de la mano con la mejor respuesta de la delincuencia. Si la delincuencia juega 0 porque el estado dispone de suficientes elementos para negarle beneficios positivos entonces su mejor respuesta es jugar 0 en ambas ciudades por lo que la mejor respuesta del estado es corresponderle con 0 en ambas ciudades. Estos equilibrios donde ambos jugadores juegan 0 son nuestros equilibrios de esquina y la explicación de su existencia consiste en la intuición de una parte de la prueba de la primera parte de la proposición 7. Resta por encontrar la razon por la que L debe de tomar ese valor en particular.

Para encontrar la forma de los equilibrios de Nash interiores hay que resolver este sistema de 4×4 ecuaciones. Nótese que es un sistema no lineal.

Reemplazando las A_j en las L_j obtenemos un sistema de 2×2 ecuaciones de la siguiente forma:

$$L_1(|A_1|, |A_2|) = (\tfrac{w}{\alpha p}\tfrac{a_1(1+L_1)}{a_1(1+L_1)+a_2(1+L_2)}|A|)^{\frac{1}{\alpha-1}} \text{ entonces } L_2 = \tfrac{|A|wa_1}{\alpha pa_2}L_1^{1-\alpha}(1+L_1) - \tfrac{a_1}{a_2}(1+L_1) - 1$$

$$L_2(|A_1|, |A_2|) = (\tfrac{w}{\alpha p}\tfrac{a_2(1+L_2)}{a_1(1+L_1)+a_2(1+L_2)}|A|)^{\frac{1}{\alpha-1}} \text{ entonces } L_1 = \tfrac{|A|wa_2}{\alpha pa_1}L_2^{1-\alpha}(1+L_2) - \tfrac{a_2}{a_1}(1+L_2) - 1$$

Sustituyendo la una en la otra a conveniencia obtenemos la siguiente condición:

$$L_1^{1-\alpha} + L_2^{1-\alpha} = \tfrac{|A|w}{\alpha p}(L_1L_2)^{1-\alpha}$$

De esta expresión se puede despejar una variable en términos de otra como sigue:

$$L_1(L_2, |A_1|, |A_2|) = \frac{L_2}{(\frac{|A|w}{\alpha p}L_2^{1-\alpha} - 1)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

En suma, el sistema de 4×4 arroja esta expresión como la función que captura todos las estrategias que son equilibrios de Nash en estrategias puras. Al inspeccionarla en el espacio (L_1, L_2) podemos observar que esta ecuación se comporta como una hipérbola, es asintótica en $L_j = (\frac{\alpha p}{|A|w})^{\frac{1}{1-\alpha}}$ y toda su parte positiva está circunscrita al primer cuadrante. Si incluimos las dos restricciones en el plano (L_1, L_2) podemos observar todos los equilibrios de Nash interiores. Todos los puntos por debajo de la curva de equilibrios de Nash terminan en el punto $(0, 0)$.

Espacio (L_1, L_2)

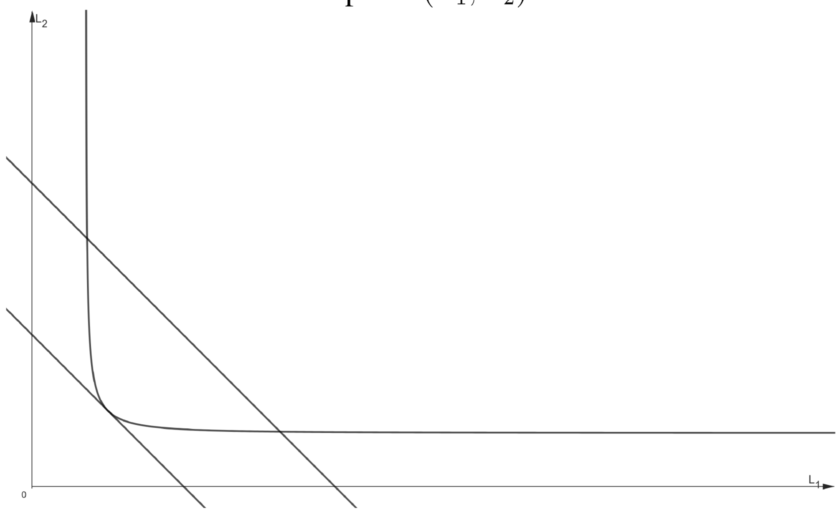

Figura 3: Equilibrio de Nash con restricción

Nótese que hasta ahora no se ha hecho uso de las restricciones del problema. Se pude llegar a una expresión en términos de variables exógenas si las usamos.

Primero, consideremos en qué caso $L_1 = L_2$. Supongamos que $L_1 = c \in \mathbb{R}$. Si reemplazamos en nuestra expresión de equilibrio de Nash obtenemos

$$c = \frac{L_2}{(\frac{|A|w}{\alpha p}L_2^{1-\alpha}-1)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \text{ entonces } L_2 = [\frac{1}{c^{1-\alpha}(\frac{|A|w}{\alpha p}-1)}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Para que $L_1 = L_2$ es necesario que $c = [\frac{1}{c^{1-\alpha}(\frac{|A|w}{\alpha p}-1)}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ entonces $c = [\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$.

En consecuencia hemos demostrado

Proposición 8. $L = 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ entonces $L_1 = L_2$.

He aquí la expresión para L que aparece en las funciones de mejor respuesta de los jugadores y la segunda parte de la proposición 7. Una primer observación es que la estrategia de la delincuencia no depende de los rendimientos de los elementos de seguridad por estado a_1 and a_2. Ademas, hay un valor mínimo de L para que exista un equilibrio de Nash interior. Esto se debe a que es posible que la delincuencia obtenga beneficios negativos si la cantidad de elementos de seguridad es lo suficientemente alta. Para encontrar este valor mínimo consideremos la estrategia $L_1 = L_2$. La mejor respuesta del estado de acuerdo a su función de mejor respuesta es $\frac{a_1}{a_1+a_2}$. Reemplazando en ϕ_1 obtenemos

$$\phi_1 = p(L_1)^\alpha - wL_1|A_1| \text{ entonces } L_1(pL_1^{\alpha-1} - w\frac{a_1|A|}{a_1+a_2}) = 0 \text{ entonces } L_1 = (\frac{w}{p}\frac{a_1|A|}{a_1+a_2})^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

La implicación es que si la delincuencia juega $L_1 = L_2$ y su restricción L es menor al valor $L = 2(\frac{w}{p}\frac{a_1|A|}{a_1+a_2})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ entonces la mejor respuesta del estado siempre deja a la delincuencia con rendimientos negativos por lo que desea salir del juego. Observemos que incluso si la delincuencia escoge una estrategia $L_1 \neq L_2$ el estado puede dejar a la delincuencia con rendimientos negativos asignando a la ciudad con mayor presencia delincuencial un mayor peso. Luego, cualquier estrategia pura de la delincuencia puede ser correspondida por el estado tal que siempre se obtendrán beneficios negativos para la delincuencia.

Notemos que el valor mínimo para jugar y el valor mínimo para encontrar un equilibrio de Nash son diferentes.

$$L = 2(\frac{w}{p}\frac{a_1|A|}{a_1+a_2})^{\frac{1}{\alpha-1}} \neq 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$$

Lo que sucede es que la expresión $L = 2(\frac{w}{p}\frac{a_1|A|}{a_1+a_2})^{\frac{1}{\alpha-1}}$ es una cota inferior para que la delincuencia pueda jugar con la posibilidad de obtener rendimientos positivos mientras que $L = 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ es la expresión en la que la mejor respuesta de la delincuencia es jugar $L_1 = L_2$. La cota inferior es la razón por la que si hay una oferta de trabajo insuficiente L entonces la delincuencia obtiene un beneficio negativo, mientras que la expresión para la existencia de equilibrio de Nash interior caracteriza la situación donde la delincuencia maximiza sus beneficios y obtiene un beneficio no negativo. Para que la delincuencia escoja jugar $L_1 = L_2$ y maximice su beneficio esperado debe de ser el caso que $L = 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$. Esta explicación completa la prueba de la primera parte de la proposición 7:

Proposición 9. Si $L < 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ entonces no hay equilibrio de Nash en estrategias puras.

Notablemente, no hay una cantidad mínima de elementos que el estado debe de tener para entrar al juego. La razón es que no hay posibilidad de que el estado obtenga beneficios negativos y que el objetivo del estado es minimizar la inseguridad, no obtener beneficios positivos. Aun si la delincuencia dispone de una basta cantidad de trabajo ofertado respecto a la cantidad de elementos de seguridad el estado puede ofrecer una asignación para disminuir la inseguridad, sin embargo si el estado dispone de muchos más elementos de seguridad con respecto a la oferta laboral disponible para la delincuencia no es posible para la delincuencia obtener beneficios positivos independientemente de cómo distribuya su demanda de trabajo.

Habiendo llegado a una expresión para L en función de $|A|$ como condición para la existencia de equilibrio de Nash en estrategias puras podemos observar que cualquier valor por encima de $L = 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ genera dos estrategias en el equilibrio de Nash para la delincuencia. Por haber sólo dos estados y sabiendo que la delincuencia se lleva la misma cantidad de beneficio económico en ambos equilibrios sabemos que

Proposición 10. Si $L > 2[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ entonces hay dos estrategias simétricas de la delincuencia y el estado en el equilibrio de Nash.

A continuación encontramos la forma particular que tienen ambos equilibrios. Supongamos que nos encontramos en la estrategia en donde $L_1 > L_2$. Como sabemos en qué valor $L_1 = L_2$ podemos describir el punto $L_1 > L_2$ como

$$L_1^* = [\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} + n \text{ and } L_2^* = [\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} - n, n \in \mathbb{R}^+$$

Notemos que si $L_2 > L_1$ la forma de la estrategia en el equilibrio de Nash se puede definir simétricamente:

$$L_1^* = [\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} - n \text{ and } L_2^* = [\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} + n, n \in \mathbb{R}^+$$

Si establecemos a $n \geqslant 0$ hemos caracterizado la forma del equilibrio de Nash para la delincuencia. Reemplazando en las ecuaciones para el estado el primer equilibrio de Nash tiene las siguientes expresiones para el estado:

$$|A_1^*| = \frac{a_1(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)}{a_1(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)+a_2(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)}|A|$$

$$|A_2^*| = \frac{a_2(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)}{a_1(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)+a_2(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)}|A|$$

Y para el segundo:

$$|A_1^*| = \frac{a_1(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)}{a_1(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)+a_2(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)}|A|$$

$$|A_2^*| = \frac{a_2(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)}{a_1(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)+a_2(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)}|A|$$

5.2.3. Predicciones en el Equilibrio de Nash

Habiendo caracterizado los equilibrios de Nash estudiemos las funciones de pago y la forma de los equilibrios de Nash para encontrar las predicciones del modelo. Los pagos que recibe el estado por ciudad (en ambas estrategias) son:

$$\pi_1^* = (a_1(1 + \frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} - n) + a_2(1 + \frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} + n))(\frac{1}{|A|}) = \pi_2^*$$

Los pagos de la delincuencia por ciudad en el primer equilibrio son

$$\phi_1^* = p(\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} + n)^\alpha - \frac{wa_1(\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)}{a_1(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)+a_2(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)}|A|$$

$$\phi_2^* = p(\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} - n)^\alpha - \frac{wa_2(\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)}{a_1(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)+a_2(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)}|A|$$

En el segundo:

$$\phi_1^* = p(\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} - n)^\alpha - \frac{wa_1(\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)}{a_1(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)+a_2(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)}|A|$$

$$\phi_2^* = p(\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} + n)^\alpha - \frac{wa_2(\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)}{a_1(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}+n)+a_2(1+\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}-n)}|A|$$

Comencemos por estudiar el equilibrio de Nash en el que $L_1 = L_2$, lo cual sucede en las ecuaciones de pago de la sección anterior cuando $n = 0$. Como sabemos, la mejor respuesta del estado es $|A_1^*| = \frac{a_1}{a_1+a_2}$ and $|A_2^*| = \frac{a_2}{a_1+a_2}$. Un primer resultado es que, incluso cuando la delincuencia demanda la misma cantidad de trabajo en las dos ciudades, el estado asigna distinta cantidad de elementos (cuando $a_1 \neq a_2$). Asignará más elementos a la ciudad con menor efectividad, es decir, la mayor parte del conflicto se dará allí donde los elementos de seguridad sean menos efectivos.

En cuanto al pago del estado por ciudad, sus expresiones pueden simplificarse aún más en este caso:

$$\pi_1^* = (1 + (\frac{\alpha p}{|A|w - \alpha p})^{\frac{1}{2(1-\alpha)}})(a_1 + a_2)(\frac{1}{|A|}) = \pi_2^*$$

Como ya sabemos desde la resolución del modelo de costos fijos, el beneficio en ambas ciudades es el mismo en el óptimo. Recordemos que el objetivo del estado es minimizar estas ecuaciones por lo que cualquier cosa que las reduzca aumenta su beneficio. Inspeccionando esta ecuación vemos que el beneficio del estado crece con la cantidad disponible de elementos de seguridad $|A|$ y su efectividad por ciudad $a_1 + a_2$ (recordemos que en este modelo mientras mayor sea a_j menos efectivo es un elemento), con el salario w y decrece mientras mayores sean los rendimientos a escala de la delincuencia α y mejor sea el precio del bien ilegal comerciado, p.

En cuanto al beneficio de la delincuencia, es fácil ver que se llevará mayor beneficio en aquella ciudad donde los elementos sean menos efectivos. Más aún, en suma el beneficio total de la delincuencia es

$$\phi_1^* + \phi_2^* = 2p(\frac{\alpha p}{|A|w - \alpha p}]^{\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}}) - 2(\frac{\alpha p}{|A|w - \alpha p})^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}(w|A|)$$

El beneficio de la delincuencia decrece con el salario w, con la cantidad de elementos de seguridad disponibles para el estado $|A|$ e incrementa con el precio del bien ilegal p y con los rendimientos α.

En general, cuando $L_1 \neq L_2$ los resultados en las funciones de pago se mantienen idénticos, pero comentamos en dónde hay diferencias. Primero, no es directo decir a qué ciudad le corresponden más elementos. Para verlo, es claro que por definición de n

$$1 + L_1 = (1 + \frac{\alpha p}{|A|w - \alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} + n) \geqslant (1 + \frac{\alpha p}{|A|w - \alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} - n) = 1 + L_2$$

Estas expresiones son uno de los dos factores que determinan qué $|A_j|$ es mayor. Sabemos que el otro factor es a_j.

Si ahora suponemos que $a_2 \geqslant a_1$ entonces es posible que si a_2 es lo suficientemente grande entonces $|A_2|$ sea mayor que $|A_1|$ aun si $L_1 \geqslant L_2$:

$$a_1(1 + \frac{\alpha p}{|A|w - \alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} + n) \leqslant a_2(1 + \frac{\alpha p}{|A|w - \alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} - n)$$

Esto sucede porque si una ciudad es particularmente efectiva al combatir el crimen, no necesitará tantos elementos como la otra ciudad aún si la delincuencia genera más inseguridad en la otra ciudad. Una vez más, el conflicto se da en los espacios que son menos efectivos al combatir el crimen.

La segunda y última diferencia sucede en el beneficio económico de la delincuencia. El caso es análogo al de arriba entre inseguridad L_j y efectividad de elementos a_j, pero ahora en vez de estudiar su efecto en las expresiones para la cantidad de elementos por asignar $|A_j|$ podemos ver un efecto idéntico en las funciones de beneficio económico de la delincuencia ϕ_j. Es posible que la ciudad en la que la delincuencia demanda una menor cantidad de trabajo (y genera menos inseguridad) le genere mayor ingreso a la delincuencia que la otra ciudad si los elementos de seguridad del estado son particularmente ineficientes.

5.2.4. El caso de S ciudades

Generalicemos el modelo como hemos hecho antes. Consideremos que hay S estados en los que compiten el estado y la delincuencia con las mismas funciones de beneficio y mismas restricciones, pero ahora su estrategia deberá ser un vector de S entradas. La resolución es similar al caso de $S = 2$. Comencemos por encontrar la función de mejor respuesta de la delincuencia. El problema es

$$\underset{L_j}{max}\ (\sum p(L_j)^\alpha - wL_j|A_j|)\ \forall j$$

Las condiciones de primer orden son

$$\alpha p(L_j)^{\alpha-1} - w|A_j| = 0\ \forall j$$

Por lo que cada L_j se ve de la siguiente forma:

$$L_j(|A_j|) = (\frac{w|A_j|}{\alpha p})^{\frac{1}{\alpha-1}}\ \forall j$$

Para resolver el problema del estado consideremos algún $|A_{j'}| \in M$. Al igual que antes, sabemos que en el óptimo $\pi_{j'} = \pi_j\ \forall \pi_j \in M$. Luego,

Reemplazmos en la restricción presupeustal:

$$\sum_{j=1}^{S} \frac{a_j(1+L_j)}{aj'(1+L_{j'})}|A_{j'}| = |A| \rightarrow |A_{j'}| = \frac{|A|a_{j'}(1+L_{j'})}{\sum a_j(1+L_j)}\ \forall j \neq j'$$

Es decir, la mejor respuesta del estado es:

$$|A_j|(L_1, \cdots, L_S) = \frac{|A|a_j(1+L_j)}{\sum a_j(1+L_j)}\ \forall j$$

Resta encontrar el equilibrio de Nash de este juego. Observemos que tenemos un sistema de $2S \times 2S$, es decir $2S$ ecuaciones con $2S$ variables y al igual que antes, no es un sistema lineal.

Para resolverlo reemplazamos los valores de $|A_j|$ en las ecuaciones de L_j igual que en el problema de 2×2 para colapsar el sistema en uno de $S \times S$:

$$L_j = (\frac{w|A_j|}{\alpha p})^{\frac{1}{\alpha-1}} = (\frac{w}{\alpha p} \cdot (\frac{a_j|A|(1+L_j)}{\sum a_j(1+L_j)}))^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Al trabajar esta ecuación encontramos una expresión despejada para L_j de la forma:

$$L_j = \frac{|A|wa_{j'}}{\alpha pa_j} L_{j'}^{1-\alpha}(1+L_{j'}) - \frac{a_{j'}}{a_j}(1+L_{j'}) - 1 \ \forall j \neq j'$$

Habiendo eliminado las $|A_j|$ del problema, nos resta encontrar una expresión para L_j en términos de variables exógenas. Hasta ahora nos tenemos una expresión en términos del resto de las L_j.

Si tomamos algún $L_{j'} \in M$, reemplazamos en la expresión anterior y trabajamos la ecuación se encuentra la siguiente condición:

$$(\frac{w}{\alpha p} L_{j'}^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1)(\frac{w}{\alpha p} L_j^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1) = 1 \ \forall j \neq j'$$

Si realizamos la multiplicación podemos llegar a la expresión

$$\frac{|A|w}{\alpha p}(L_j L_{j'})^{\frac{1}{\alpha-1}} - L_{j'}^{\frac{1}{\alpha-1}} - L_j^{\frac{1}{\alpha-1}} = 0 \Rightarrow L_{j'} = \frac{L_j}{(\frac{|A|w}{\alpha p} L_j^{1-\alpha} - 1)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \ \forall j \neq j'$$

Al igual que en el problema para dos ciudades podemos encontrar un valor mínimo necesario para la existencia de equilibrio de Nash en estrategias puras:

$$c = \frac{L_j}{(\frac{|A|w}{\alpha p} L_j^{1-\alpha} - 1)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \Rightarrow L_j = [\frac{1}{c^{1-\alpha}(\frac{|A|w}{\alpha p} - 1)}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Para que $L_j = L_{j'}$ es necesario que $c = [\frac{1}{c^{1-\alpha}(\frac{|A|w}{\alpha p} - 1)}]^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow c = [\frac{\alpha p}{|A|w - \alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$.

En consecuencia, análogamente al caso de $S = 2$ hemos demostrado

Proposición 11. $L = S[\frac{\alpha p}{|A|w - \alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ entonces $L_j = L_{j'} \ \forall j$.

La razón por la que existe este valor es la misma que para el caso de $S = 2$: sólo en este caso la delincuencia puede maximizar sus beneficios y jugar $L_j = L_{j'} \ \forall j \neq j'$

En consecuencia también es cierto que si $L < S[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ entonces no hay equilibrio de Nash en estrategias puras. La diferencia está en si $L > S[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$. Debido a que hay más de 2 ciuades, es posible encontrar más de un par de asignaciones en el equilibrio de Nash que le generen el mismo beneficio agregado a la delincuencia, sin embargo podemos comentar algunas características sobre estos múltiples equilibrios de Nash.

Hay tantos equilibrios de Nash como formas de combinar el excedente de elementos $S[\frac{\alpha p}{|A|w-\alpha p}]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} + n, n \in \mathbb{R}^{+}$ entre las distintas ciudades. Por continuidad y la posibilidad de asignar una cantidad distinta y arbitraria de excedente a las distintas ciudades hay una cantidad infinita de equilibrios de Nash.

Hay simetría en estos equilibrios de Nash en un sentido particular. Si existe un equilibrio en donde ciertas ciudades son favorecidas por la delincuencia con mayor demanda de trabajo y otras son en consecuencia perjudicadas con una cierta distribución de demandas de trabajo L_j, entonces existe otro equilibrio donde las ciudades favorecidas son ahora desfavorecidas y las desfavorecidas ahora son favorecidas con la misma distribución de demanda de trabajo pero con signo opuesto. Esto es consecuencia de que, en el óptimo, el beneficio agregado de la delincuencia es igual para todos los equilibrios.

5.2.5. Resultados

Como la generalización del problema de $S = 2$ a un juego con S ciudades es directa, las predicciones del modelo $S = 2$ son idénticas a las de este modelo general. Esta es la razón por la que el desarrollo del modelo para dos ciudades es tan importante. Sabiendo esto comparemos los resultados de nuestro modelo con un juego particularmente similar en la literatura de economía del conflicto: el juego de Blotto de Vu Quan (2021).

Hay algunas conclusiones que son robustas al paso de un juego dicotomico como el de Blotto a un planteamiento continuo como el nuestro, por ejemplo Vu Quan (2021) encuentran en su artículo un equilibrio de Nash para su juego con efectividad asimétrica por campo de batalla. Este concepto es análogo al de efectividad de elementos de seguridad aquí modelados con a_j. En Vu Quan (2021) mientras mayor sea la ventaja hacia algún jugador el beneficio que se lleva es mayor lo cual es un resultado reproducido aquí también: la importancia de la efectividad de los elementos de seguridad aumenta el beneficio del estado y reduce el de la delincuencia.

También hay un elemento importante que no esta presente en el trabajo de Vu Quan (2021):como que el punto de quiebre para la existencia de equilibrio de Nash interior.

Finalmente, es notable la ausencia de la efectividad de producción de seguridad de los elementos por ciudad a_j de las funciones de mejor respuesta de la delincuencia. Consideramos que este esta es una limitación importante de nuestro modelo ya que es una conclusión poco apegada a la realidad.

6. Conclusiones

En este trabajo hemos formalizado el problema del estado que consiste en repartir elementos de seguridad entre distintas ciudades para combatir la inseguridad. Hemos encontrado que dependiendo de la conducta que tenga la delincuencia y el estado la asignación resultante y la seguridad producida pueden ser diferentes.

En el modelo base encontramos que si el crimen organizado no responde a la presencia del estado entonces el gobierno puede responder con mayor facilidad a la distribución fija de inseguridad minimizando la presencia de delincuencia en las localidades más inseguras dándoles prioridad sobre las demás. Cuando el estado tiene una cantidad insuficiente de policías o soldados, valora a todas las urbes por igual y los elementos tienen el mismo efecto sobre la seguridad en todas las ciudades entonces las asignaciones del estado son simétricas y dependen esencialmente sólo de la cantidad de policias o soldados disponibles. Un incremento en la cantidad de efectivos debería de bastar para reducir la inseguridad.

En el modelo de rendimientos a escala generalizamos los resultados del modelo base a la presencia de rendimientos crecientes a escala y pudimos concluir que la importancia de dichos rendimientos es al menos tanta como la cantidad de de elementos disponibles. Se pueden alcanzar los mismos niveles de inseguridad con una menor cantidad de policías disponibles condicionado a que la combinación de tipos de policías sea particularmente productiva.

En los juegos hallamos que la forma en la que delincuencia y estado internalizan las acciones del otro es fundamental. Notamos que la efectividad de policías y soldados por estado es una cuestión igual de importante que la cantidad de elementos o que los rendimientos a escala. Un concepto más que es útil si no existen los suficientes elementos de seguridad.

Es posible generalizar este trabajo en varias direcciones ya que ninguno de nuestros modelos se presenta en su forma más general. Una generalización inmediata es cambiando la forma de las funciones de beneficio del gobierno o su función objetivo. La comparación de los resultados de modelos similares al nuestro con esta sutil diferencia seria particularmente interesante, aunque insistimos en la importancia de plantear modelos fundamentados en situaciones reales para poder discutir temas como el de seguridad pública con mayor formalidad.

Appendices

A. Equilibrios de esquina en juego de costos variables

Recordando el problema: El estado trabaja con una función de beneficio por ciudad de la forma

$$\pi_j(|A_j|) = \begin{cases} a_j(1+L_j)(\frac{1}{|A_j|}) & |A_j| > 0 \\ a_j(1+L_j) & |A_j| = 0 \\ 0 & L_j = 0 \end{cases}$$

En esta sección la función objetivo del estado será la misma que en los problemas de las secciones de arriba, es decir, será de la forma:

$$\underset{a \in A}{min} \underset{k \in \{1,\cdots,S\}}{max} \pi_k(|A_1|, \cdots, |A_S|)$$

La delincuencia opera con

$$\phi_j(L_j) = p(L_j)^\alpha - wL_j|A_j|$$

El objetivo de la delincuencia es maximizar su beneficio económico a través de todas las ciudades. Luego, la función de beneficio de la delincuencia es:

$$\underset{L_j}{max} \sum_j^S \phi_j(L_j).$$

Consideremos $S = 2$ ¿Cómo se vería un equilibrio de Nash donde el estado juega 0 en alguna de las dos ciudades? Sin pérdida de generalidad supongamos que, en el equilibrio, el estado juega 0 en la ciudad 1. Entonces, el beneficio de la delincuencia se ve de la siguiente forma en ambas ciudades:

$$\phi_1(L_1) = p(L_1)^\alpha - wL_1|A_1| = p(L_1)^\alpha$$

$$\phi_2(L_2) = p(L_2)^\alpha - wL_2|A_2|$$

Como el objetivo de la delincuencia es maximizar la suma de los beneficios evidentemente le conviene asignar todos sus elementos a la ciudad donde el estado jugó 0, la cual es la ciudad 1, es decir, la delincuencia juega 0 en la ciudad 2. Las funciones de beneficio del estado se ven así:

$$\pi_1(|A_1|) = a_1(1 + L_1) \text{ and } \pi_2(|A_2|) = 0$$

Cualquier perfil estratégico que incluya al estado jugando 0 en la ciudad 1 y algún valor positivo en la ciudad 2 no puede estar en el equilibrio de Nash porque el estado tiene incentivos a cambiar de estrategia y asignar elementos a la ciudad 1 como respuesta a la delincuencia porque su objetivo es minimizar el máximo y evidentemente $\pi_1 > \pi_2$ jugando esta estrategia. Luego, no existe estrategia en el equilibrio de Nash donde el estado juegue 0 en alguna ciudad con $S = 2$. Para S ciudades la prueba sigue el mismo argumento.

¿Existe un equilibrio de Nash donde la delincuencia juega 0 en alguna de las dos ciudades? Sin pérdida de generalidad supongamos que, en el equilibrio, la delincuencia juega 0 en la ciudad 1. Entonces, el beneficio de la delincuencia se ve de la siguiente forma en ambas ciudades:

$$\phi_1(L_1) = p(L_1)^\alpha - wL_1|A_1| = 0$$

$$\phi_2(L_2) = p(L_2)^\alpha - wL_2|A_2|$$

Como el objetivo del estado es minimizar el máximo de la inseguridad generada por la delincuencia y la inseguridad producida en la ciudad 1 es 0 entonces el estado asignará todos sus elementos a la ciudad 2. Las funciones de beneficio del estado se verán así:

$$\pi_1(|A_1|) = 0 \text{ and } \pi_2(|A_2|) = a_2 L_2(\tfrac{1}{|A_2|})$$

Es decir, la delincuencia está operando en una sola ciudad y el estado decide asignar todos sus elementos sólo a esa misma ciudad. Evidentemente esto tampoco pude ser un equilibrio porque la delincuencia tiene incentivos a asignar elementos a la ciudad donde el estado no tiene elementos de seguridad y así elevar su beneficio agregado. Luego, no hay perfil estratégico en el equilibrio de Nash donde la delincuencia juegue 0 en la ciudad 1 y algún valor positivo en la ciudad 2. Esto para $S = 2$ ciudades, pero hacer una prueba para el caso general es directo.

Referencias

Borel, E. (1921). La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, 1304-1308.

Haavelmo, T. (1954). Strategies of 'grabbing', protection and cooperation. North-Holland.

Roberson, B. (2006). The Colonel Blotto Game. *Economic Theory*, *29*, 1-24.

Sánchez Buelna, P. (2016). *Three Essays on Conflict Economics* [Tesis doctoral, Colmex].

Federal, G. (2018). Estrategia Nacional de Seguridad Pública 2018-2024. https://infosen.senado.gob.mx/sgsp/gaceta/64/1/2019-04-10-1/assets/documentos/Estrategia_Seg_Pub.pdf

Serrano Carreto, M. d. C. (2019). La estrategia de seguridad de AMLO, ¿De la pacificación a la militarización? *IUS*.

Gil, R. Z. (2020). *Fin a la guerra: Una agenda para la paz, la justicia y los derechos humanos en México* (inf. téc.). Friederich Ebert Stiftung.

Boix-Adserà, E., Edelman, B. L., & Jayanti, S. (2021). The Multiplayer Colonel Blotto Game. *Games and Economic Behavior*, *129*, 15-31.

Vu Quan, P., Dond y Loiseau. (2021). Colonel Blotto Games with Favoritism: Competitions and Pre-allocations and Asymmetric Effectiveness. *Full paper version of 22 ACM EC conference paper*.

Gaussens, P., & Jasso Gónzales, C. (2023). Militarización de la Seguridad Pública y Derechos Humanos: Una adecuación imposible. En J. R. C. Díaz & V. Ugalde (Eds.). Colmex.

UNODC. (2024). *World Drug Report 2024* (inf. téc.). United Nations publications.

Índice de figuras

Índice de cuadros