El Valor en Riesgo, VaR, en la Bolsa Mexicana de Valores

Oliver Macías Pérez   Asesor: Eneas Caldiño García

Maestría en Economía

El Colegio de México

Junio, 2007

Resumen

En este trabajo se presenta el cálculo del valor en riesgo, VaR, de los rendimientos del principal índice de la Bolsa Mexicana de Valores, el IPC. Se realiza la estimación de un modelo econométrico de varianza condicional heteroscedastica AR(2)-GARCH(1,1) para el IPC con datos diarios del valor de cierre del índice de 1990 a 2006. Posteriormente para cada día de la muestra se procede a la estimación de la distribución del rendimiento pronosticado al que se encontraban expuestos los agentes para el día siguiente. Finalmente se calcula el VaR al 5 % y al 1 % y los resultados son que esta medida funcionó adecuadamente durante el periodo, constituyendo un piso para las pérdidas en el rendimiento del IPC.

Agradecimientos

A El Colegio de México.

A mi Asesor Eneas por su apoyo, dirección y comentarios.

A mis profesores por transmitirme sus conocimientos y convertirse en los guías en este nuevo andar de la economía.

A mi familia.

A Arais Reyes por su apoyo, cariño y ejemplo.

A mis amigos y compañeros de generación, especialmente a mis hermanos Edith, Sergio y José Luis por las incontables jornadas de discusión y estrés.

A mis hermanos de la infancia Iván, Carlos, Jorge y los internacionales Galo y Manuel.

A mis colegas becarios Hugo, Carlos, Alberto y Mary.

A mis colegas actuarios Pedro, Raymundo y Victor.

A todos los que me faltan.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

De manera cotidiana se entiende por riesgo a la posibilidad de sufrir un daño, o a la posibilidad de encarar una situación potencial de daño. El concepto de riesgo está relacionado con la posibilidad de que ocurra un evento que se traduzca en pérdidas para los participantes en los mercados financieros. El riesgo es producto de la incertidumbre que existe sobre el valor de los activos financieros, ante movimientos adversos de los factores que determinan su precio; a mayor incertidumbre mayor riesgo.

Este trabajo se centra en cuantificar el riesgo que se encuentra dentro del mercado accionario mexicano, la Bolsa Mexicana de Valores. Reconociendo el papel que esta representa en la economía como fuente de financiamiento para la actividad productiva de las empresas a partir del ahorro de los inversionistas. El contar con medidas de riesgo que resulten precisas y confiables resulta de importancia para la adecuada toma de deciones de los agentes económicos.

El intento por determinar el riesgo presente en la BMV se realiza a través de su principal indicador, el Índice de Precios y Cotizaciones, IPC.

El VaR, que se ha convertido en la medida de riesgo más empleada por su sencillez de interpretación, indica bajo un cierto nivel de confianza dado, cual es la peor pérdida esperada en un horizonte temporal previamente determinado, bajo condiciones normales de mercado.

Por tanto, en este trabajo se calculan los valores en riesgo diarios, es decir, se calculan las peores pérdidas esperadas en los rendimientos del IPC durante el periodo de 1990 a 2006 y se contrasta con los rendimientos observados para así verificar si el VaR constituyó una adecuada medida del riesgo dentro de la BMV.

La estructura de la tesis es la siguiente. En el capítulo 2, se detallan las definiciones, se analiza a detalle el modelo a emplear, y se hace una revisión de los modelos de varianza condicional heteroscedástica que se usan para el ajuste de los datos. Tales modelos se utilizan para la estimación de las distribuciones de probabilidad de las cuales el VaR es un cuantil. En el capítulo 3 se realiza la estimación del modelo ARCH-GARCH para las 4190 observaciones de los valores del IPC y se analiza su ajuste. Posteriormente se realiza el cálculo del VaR al 5 % y al 1 % de confianza en el capítulo 4 y los resultados son que esta medida funcionó adecuadamente durante el periodo de muestra, constituyendo un piso para las pérdidas en el rendimiento del IPC. Finalmente se presentan conclusiones.

Capítulo 2

Riesgo y Volatilidad

En este capítulo se revisan las distintas medidas de riesgo utilizadas convencionalmente en la literatura, entre ellas el valor en riesgo VaR, objetivo final de este trabajo. De igual manera se estudian los modelos de varianza condicional heteroscedástica (modelos ARCH-GARCH) necesarios para la estimación del VaR.

2.1. Definición de Riesgo

Formalmente, se dice que un riesgo en un momento determinado t es una variable aleatoria R_t definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega_F, \Im, P)$ que mapea estados futuros del mundo a valores que representan pérdidas o ganancias.

$$R_t : \Omega_F \to \mathcal{R}$$

Los objetos básicos de nuestro estudio serán entonces las variables aleatorias del conjunto de estados de la naturaleza (o del mundo) en una fecha futura, interpretados como posibles valores futuros de las posiciones o portafolios que se tienen actualmente. Si además se desea conocer el riesgo no únicamente en un momento t, sino en un conjunto de momentos t, $t+1$, $t+2$, ... $t+n$, se tendrá entonces una familia de variables aleatorias R_t, es decir, se estará hablando de un proceso estocástico.

Estos riesgos, es decir, las variables aleatorias que determinan el proceso estocástico, pueden considerarse de manera individual o como parte de otro proceso estocástico en el que los riesgos actuales dependen de los riesgos previos.

Lo que se busca conocer es la forma, comportamiento y características del riesgo, lo cual se traduce en conocer todo lo relevante de las variables aleatorias asociadas. De esta forma cuando se habla de analizar riesgos, lo que se implica es analizar las variables aleatorias, conocer su distribución de probabilidad para así poder responder preguntas relacionadas con el riesgo, por ejemplo, la factibilidad de valores extremos.

El problema en estimar a la distribución de probabilidad F asociada a la medida P radica en que no es observable, sino que únicamente se dispone de realizaciones previas de tal distribución (i.e. riesgos similares) que proveen de información parcial[1].

Convencionalmente la primera aproximación a la noción de una métrica asociada al riesgo es pensar en una medida que intente resumir en un sólo valor la distribución de la variable aleatoria riesgo.

2.2. Medidas Usuales de Riesgo

Una vez que se le ha atribuído al riesgo un caracter estocástico, se procede a cuantificarlo, esto es, a determinar la característica o momento de la distribución que refleje en mejor medida a la variable aleatoria en su conjunto.

2.2.1. Varianza

La primera medida a considerar se debe a Markovitz (1952) quien propuso a la *variabilidad* de los rendimientos de los activos financieros, como medida de riesgo. Así, la *varianza* de los rendimientos de los activos, se mantuvo como la medida de riesgo universalmente aceptada hasta finales de la década de los ochentas y principio de los noventas. Coincidente con las grandes crisis financieras ocurridas precisamente en este periodo, se vió la necesidad de que la medida de riesgo tenía que expresarse en términos de pérdidas potenciales, con una cierta probabilidad de ocurrencia.

[1] Resulta no trivial pasar de realizaciones u observaciones al concepto de proceso estocastico, es decir, ¿cuándo es posible determinar si un conjunto de valores observados proviene de un proceso estocástico? Esto lo proveé el teorema de extensión de Kolmogorov, veáse Brockwell [2].

2.2.2. Valor en Riesgo (VaR)

Actualmente, la medida más aceptada de riesgo es la denominada *Valor en Riesgo*. El VaR intenta dar una idea sobre la pérdida en que se puede incurrir en un cierto periodo de tiempo pero, al ser inciertas las pérdidas y ganancias, es necesario asociar probabilidades a las diferentes pérdidas potenciales. El VaR resume la pérdida máxima esperada (o peor pérdida) a lo largo de un horizonte de tiempo objetivo dentro de un intervalo de confianza dado (Jorion 2002).

Así, el VaR es un nivel de pérdidas (del activo en cuestión) tal que la probabilidad $1-\alpha$ de que la pérdida exceda esta cantidad en un periodo de tiempo dado, corresponde a un cierto nivel de confianza α escogido por el analista.

Por tanto, el analista fija de antemano el nivel de confianza con el que quiere trabajar y el periodo de tiempo en el que puede ocurrir la pérdida de rendimiento de los activos financieros a los que se les quiera medir su riesgo. A partir de estos dos parámetros, el VaR corresponde al cuantil asociado al nivel de confianza α, de la distribución F de la variable aleatoria R_t en un horizonte de tiempo dado, dadas las condiciones de incertidumbre que prevalecen en ese momento en el mercado.

Formalmente dado un nivel de confianza α con

$$1-\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

el VaR asociado es el cuantil del soporte de pérdidas o ganancias, tal que

$$VaR_\alpha = F^{-1}(\alpha)$$

donde

$$F^{-1}(t) = \inf \{x \in \mathcal{R} : F(x) \geq t\}$$

De esta forma el VaR como medida de riesgo constituye un piso a las pérdidas potenciales esperadas para un cierto nivel de confianza. Es esta medida de riesgo la que se calcula en este trabajo para la Bolsa Mexicana de Valores.

2.2.3. Volatilidad

En la actualidad el concepto de volatilidad ha adquirido una gran importancia en los mercados financieros, siendo para la mayoría un sinónimo de riesgo, pero para los operadores financieros el término adquiere diferente significado, *entendiéndose a la volatilidad como una medida de riesgo que se deriva de los cambios en la rentabilidad de los activos financieros,* debido a su sensibilidad a informes o rumores de índole política, económica, de política gubernamental, monetarias y fiscales, entre otros factores. Es decir, se asume que la llegada de nueva información tienen implicaciones en las oscilaciones de los rendimientos de los activos y es capturada por esta medida de riesgo.

2.3. Valor en Riesgo y Volatilidad

Para la medición del VaR se necesita en primera instancia la distribución de probabilidad de los rendimientos, y una vez conocida o estimada, encontrar altos cuantiles es tarea sencilla. Sin embargo, el problema radica justamente en la estimación de la distribución F. Para tales fines se utiliza la aproximación econométrica debida a Engle (1982), cuyo trabajo da lugar a una familia de modelos denominados *Conditional Heteroscedastic Models (ARCH-GARCH models).*

Los modelos ARCH-GARCH permiten modelar el comportamiento encontrado en muchas series económicas y financieras, específicamente donde interviene la volatilidad, que presenta características de persistencia, reversión a la media y clusters. Este comportamiento se introduce en los modelos de series de tiempo estacionarias con varianza incondicional constante (de largo plazo) y varianza condicionada por la información disponible (de corto plazo) cambiante a lo largo del tiempo y caracterizada por seguir su propia especificación.

Bajo estas características se mejoran los pronósticos y ajustes de los datos pues el considerar el arribo de nueva información permite una mejor aproximación a la serie. Típicamente, el modelo ARCH-GARCH supone una distribución normal para los rendimientos condicionados y modela la serie a través de sus momentos condicionales, esto es, mediante la media condicional más un componente de ruido que incorpora el efecto de la varianza condicional cambiante en el tiempo, de ahí que permita un mejor pronóstico.

Así, una vez que se ajuste el modelo ARCH-GARCH apropiado, ya se tiene la estimación de la distribución de los rendimientos, lo que permitirá la estimación del VaR.

2.3.1. Modelos ARCH-GARH

Los modelos propuestos por Engle (1982) y Bollersllev (1986) consideran la distribución de los rendimientos condicionales $R_t|\,\mathcal{F}_{t-1}$ y sus momentos media y varianza

$$\mu_t = E\left[R_t|\,\mathcal{F}_{t-1}\right] \qquad \text{y} \qquad h_t = Varianza\left[R_t|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]$$

donde $\mathcal{F}_{t-1}$ representa la información disponible hasta el momento $t-1$, y suponen que es posible considerar la evolución de los rendimientos mediante

$$R_t|\,\mathcal{F}_{t-1} = \mu_t + a_t \tag{2.1}$$

donde al término a_t se le denomina *perturbación de corrección a la media condicional,* y satisface

$$a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

donde ε_t es ruido blanco y además $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, y por lo tanto

$$Varianza\left[a_t|\,\mathcal{F}_{t-1}\right] = h_t$$

siendo esta varianza condicional h_t la volatilidad la cual siguendo a Engle (2001) presenta características estables y se le considera estacionaria. Luego puede modelarse como promedios móviles MA(q)

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i a_{t-i}^2 \tag{2.2}$$

ó también puede asumirse

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{Q} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{P} \beta_i h_{t-i} \tag{2.3}$$

en cuyo caso la volatilidad sigue un proceso ARMA(p,q).

Por lo tanto la especificación final a emplear en un modelo ARCH-GARCH es la siguiente:

$$R_t|\,\mathcal{F}_{t-1} \sim N(\mu_t, h_t) \tag{2.4}$$

donde

$$R_t = ARMA(p,q) + a_t; \quad \text{con} \quad a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

y a su vez

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{Q} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{P} \beta_i h_{t-i} \tag{2.5}$$

con

$$\begin{aligned} P &\geq 0,\ Q \geq 0 \\ \alpha_0 &> 0,\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, ...Q \\ \beta_i &\geq 0,\ i = 1, ...P \end{aligned}$$

Así, de la combinacion de un modelo estacionario para $h_t \sim AR(p)$ y (2.2) se tiene el modelo ARCH de Engle (1982), mientras que si se utiliza $h_t \sim ARMA(P, Q)$ se tiene el modelo GARCH de Bollerslev (1986).

Es importante señalar que dentro de estos modelos ARCH-GARCH a la serie del rendimiento R_t se le considera estacionaria cuando se visualiza no condicionada por los posibles conjuntos de información, no obstante, cuando se condiciona por la información disponible, presenta momentos dependientes del tiempo.

Capítulo 3

Análisis Econométrico

En este trabajo se busca calcular el riesgo al que se enfrentan los participantes de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), mediante el cálculo del VaR asociado a alguna variable que sea representativa de la BMV en su conjunto. Tal variable es su principal índice, el Indice de Precios y Cotizaciones (IPC).

Por tanto, en este capítulo se ponen en práctica los modelos de volatilidad heteroscedástica vistos en la sección (2.3.1) para así en un primer paso estimar la función de distribución necesaria para el cálculo del VaR de los rendimientos del IPC, que se realiza en el capítulo 4.

Se usan los valores del IPC diarios y de cierre del periodo comprendido del 19 de marzo de 1990 al 31 de diciembre de 2006, lo cual genera una serie de 4190 observaciones que fueron obtenidos en la página de internet del Banco de México.

El primer paso en el análisis es la descripción de los datos. En la Figura 3.1 se presentan los valores del índice en niveles, donde es evidente la presencia de una tendencia creciente.

Es claro que la serie del índice del IPC, ó mejor dicho, la realización del proceso que generan los valores del IPC, no es estacionario, lo cual se confirma mediante las pruebas de raíces unitarias de Dickey-Fuller[1], Dickey Fuller Aumentada[2] y la prueba de Phillips-Perron[3].

Por tanto, resulta necesario encontrar una serie de tiempo relacionada con los valores del IPC, que sea estacionaria y con la cual se realice el análisis

[1] La prueba de raíz unitaria en el IPC en niveles con tendencia resulta un estadístico de 1.52 vs. valor crítico al 1 % de -3.48

[2] La prueba de raíz unitaria en el IPC en niveles con tendencia resulta un p-value de 1

[3] *idem.*

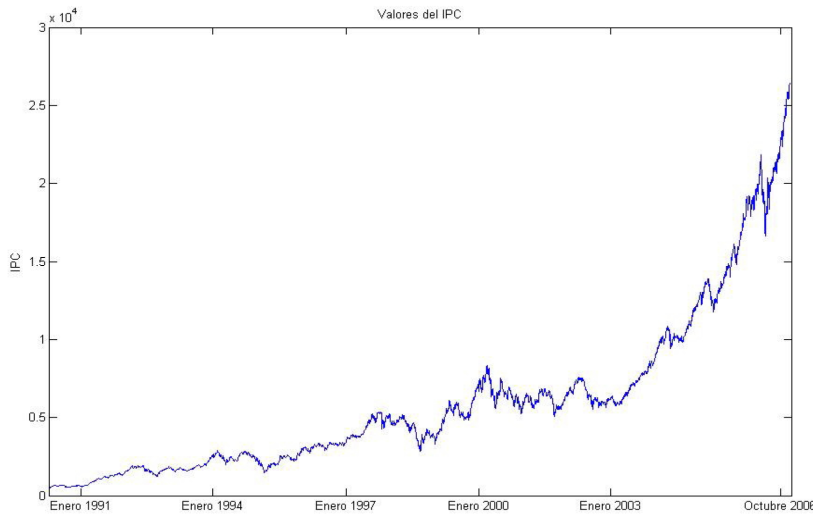

Figura 3.1: Valores del IPC

del riesgo dentro de la BMV.

Para estos fines se analiza la realización de los rendimientos del IPC, R_t, dado por

$$R_t = \ln(IPC_t) - \ln(IPC_{t-1})$$

cuya gráfica se presenta en la Figura 3.2

El siguiente paso es verificar si la serie R_t resulta estacionaria. Para ello se le aplican las pruebas de raices unitarias de Dickey Fuller[4], Dickey Fuller Aumentada[5] y Phillips Perron[6], donde la hipótesis nula es que R_t posee una raíz unitaria.

Dado que se rechaza la presencia de raíz unitaria en R_t, se le puede considerar estacionaria, esto es, que no presenta correlacion serial, y que los momentos incondicionales no dependen del tiempo. Sin embargo, estas características dificilmente se mantienen cuando se analiza la serie de los

[4] la prueba de raíz unitaria en el IPC en niveles con intercepto resulta un estadístico de -55.26 vs. valor crítico al 1 % de -2.56

[5] la prueba de raíz unitaria en el IPC en niveles con tendencia resulta un p-value de 0.0001

[6] *idem.*

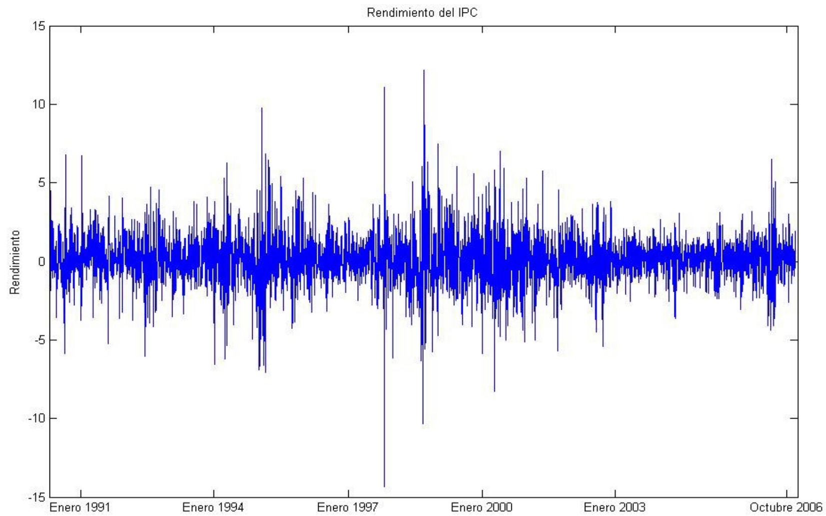

Figura 3.2: Rendimiento del IPC

rendimientos en un momento especifico t[7], esto es, el conocimiento de alguna informacion en t debe ayudar a realizar un mejor pronóstico del desarrollo de la serie, y es en este sentido en que se tiene dependencia del momento en el cual llega nueva información. Los modelos que capturan estas propiedades son los modelos de varianza condicional heteroscedástica (*ARCH models*) desarrollados en la seccion (2.3.1)

Previo a determinar la especificación de un modelo ARCH ó GARCH se describe a los rendimientos de la serie, a través de la estadística descriptiva[8] en la Tabla 1:

Media	0.093
Varianza	2.59
Asimetria	-0.006
Kurtosis	8.429

Tabla 1

El rendimiento diario durante 17 años que se ha presentado en la Bolsa Mexicana de Valores, representado por su índice principal ha sido en prome-

[7] Engle 1982.

[8] los valores se encuentran en porcentajes

dio 0.093 % y por tanto se tiene un rendimiento promedio anual de 23.5 %[9].

La varianza diaria resultó de 2.59 %, implicando una varianza anualizada promedio de 41.2 % indicando grandes oscilaciones anuales. Por otro lado la negatividad en el valor de la asimetria refleja que la distribución de los rendimientos es parcialmente asimétrica negativa, característica generalmente observada en los rendimientos accionarios.

Finalmente el valor de la kurtosis es mayor a 3 por lo que suponer normalidad de la distribución de los rendimientos del IPC no es plausible, implicando que esta serie presentan colas más gruesas que las de una distribución gaussiana. A pesar de este hecho, cuando se asume que la distribución condicional presenta distribución gaussiana, como en el supuesto (2.4), se esta respetando esta característica, dado que suponer distribución condicional gaussiana implica necesariamente que la densidad no condicional tendrá un exceso de kurtosis debido a la mezcla de densidades normales con diferentes volatilidades dependientes del tiempo[10].

3.1. Análisis de la media condicional de los rendimientos $\mathbf{R}_t$ del IPC

Siguiendo la especificación (2.1) el primer paso es tratar de ajustar un modelo adecuado para la media condicional de la serie R_t. Para ello se comienza observando el comportamiento de la función de autocorrelación para detectar el orden q de MA(q) y de la función de autocorrelación parcial de los rendimientos del IPC, para asi determinar el orden p de AR(p), para el modelo ARMA(p,q) a emplear.

En las Figuras 3.3 y 3.4 se presentan las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial respectivamente. Resulta evidente la dependencia serial de los rendimientos, sin embargo, no es posible identificar los valores de p y q. De la dependencia persistente en la media de la serie se necesita ajustar un modelo ARMA(p,q) para la media condicional de los rendimientos del IPC.

Para ello se hace uso de los criterios de selección de orden de Akaike y Schwartz[11] para determinar el mejor modelo para $\mu_t \sim ARMA(p,q)$, con

[9] Suponiendo un periodo anual de 252 dias de operación.

[10] Ver Engle [6].

[11] El cálculo de los valores de la Informacion de Akaike y Schwartz se realizaron mediante

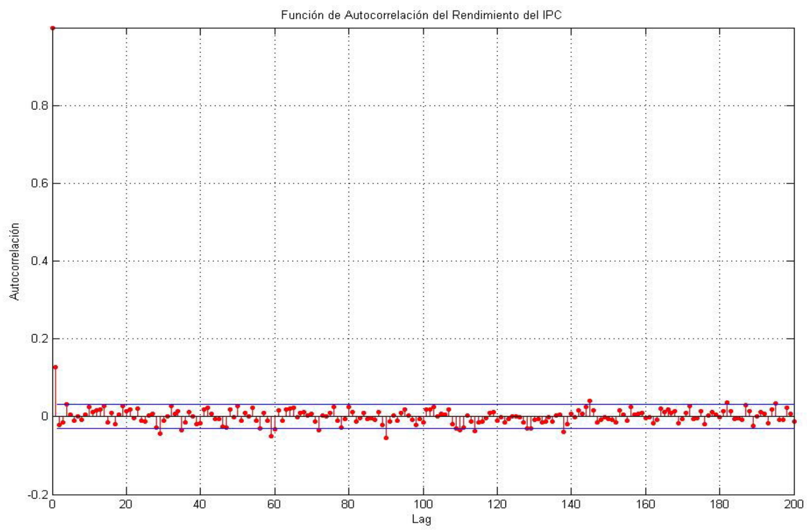

Figura 3.3: Función de Autocorrelación del Rendimiento del IPC.

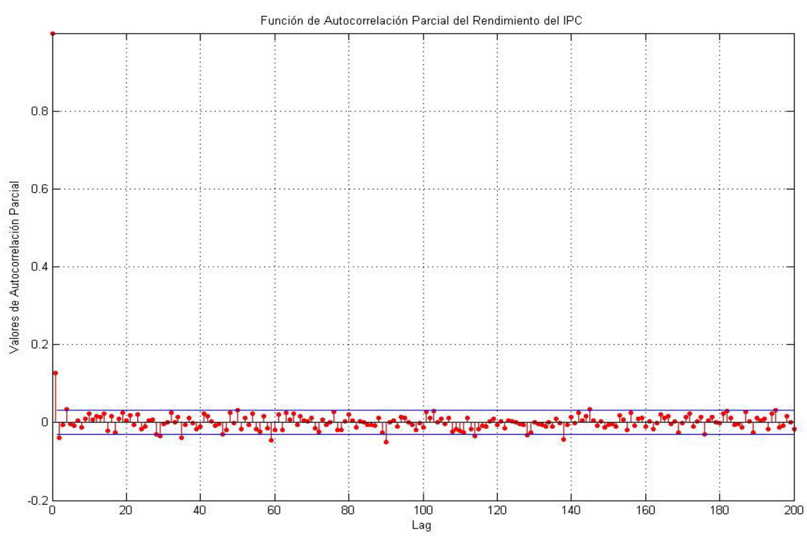

Figura 3.4: Función Autocorrelación Parcial del Rendimiento del IPC.

$p, q = 0, 1, ., 5$.

Según el criterio de Akaike el mejor modelo resulta con $p = 4$, y $q = 0$, es decir se propone modelar a la media condicional con un modelo AR(4). Por su parte, el criterio de información de Schwartz indica $p = 0$ y $q = 1$, implicando que se modele a la media condicional como un MA(1). Se prefiere el criterio de Akaike[12] y se procede a estimar los valores del AR(4) para la media condicional de los rendimientos del IPC.

La estimación se realiza por el método de máxima verosimilitud[13] asumiendo normalidad[14] en la expresión (2.4). En la Tabla 2 se muestran los coeficientes estimados.

Parámetro[15]	Valor	Error Estándar	Estadístico T
C	0.0824	0.0255	3.2270
AR(1)	0.1313	0.0088	14.9130
AR(2)	-0.03613	0.0114	-3.1473
AR(3)	-0.01131	0.0105	-1.0746
AR(4)	0.0338	0.0132	2.5573

Tabla 2

Como puede verse, salvo el coeficiente del tercer rezago, los términos resultan significativos, y con esta especificación se procede a determinar si se ha capturado toda la correlacion serial que existía previamente y se realizan pruebas de Ljung-Box Q, cuya hipótesis nula es que los residuales, a través de la funcion de autocorrelación, se comportan como ruido blanco.

Los valores de la prueba para el rezago 21 arrojan un valor del estadístico Q de 19.371 y un valor crítico de 38.9322, por lo que los residuales a_t de la expresión

$$a_t = R_t - \mu_t \quad \text{con } \mu_t \sim AR(4)$$

programas en el software MATLAB

[12] Además por el teorema de descomposición de Wald, implica que toda serie estacionaria se puede modelar como AR(∞)

[13] la estimación por máxima verosimilitud se realizó mediante la construcción de programas en el software MATLAB.

[14] Bollerslev y Wooldridge (1992) muestran que los estimados de máxima verosimilitud asumiendo normalidad son consistentes aún si la verdadera distribución de las innovaciones no es Gaussiana.

[15] donde C representa la constante estimada, y AR(i) es la estimación del coeficiente asociado al rezagoi (i=1,...,4) en un modelo AR(4).

no están correlacionados, lo cual tambien se vislumbra en el correlograma presentado en la Figura 3.5.

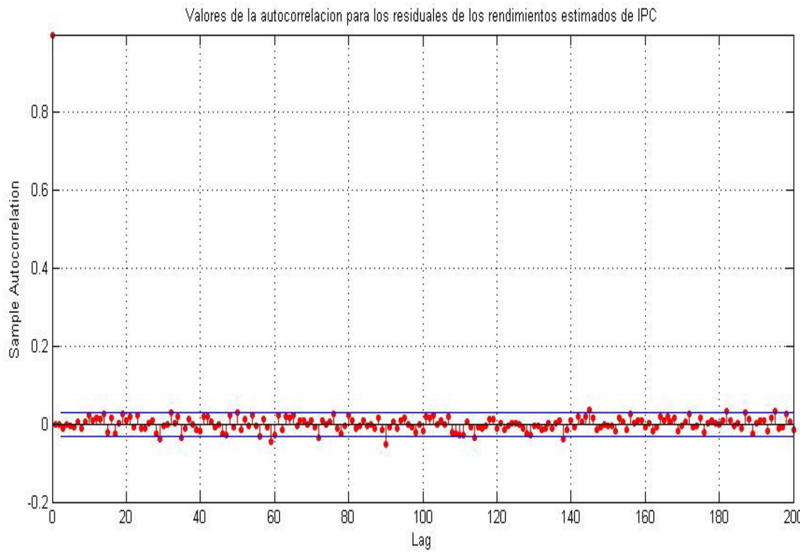

Figura 3.5: Correlograma de los residuales del rendimiento estimados del IPC.

3.1.1. Efectos ARCH en los rendimientos del IPC

Siguiendo a Engle (1982), el que no se tenga autocorrelación serial de los rendimientos no indica total independencia, sino únicamente que los rendimientos en promedio no están correlacionados, o en otras palabras, lo único que se concluye es que no existe una relación lineal en los residuales. No obstante, puede suceder que sí exista tal dependencia en órdenes superiores al lineal. Por lo que se calcula la autocorrelación de los valores de los rendimientos al cuadrado, cuyo correlograma se muestra en la Figura 3.6.

Resulta evidente la dependencia de los rendimientos al cuadrado, dando cuenta de que la distribución de los rendimientos no presenta una varianza condicional constante, y entonces se necesita un modelo para los rendimientos del IPC que incorpore tal característica. Además se realiza la prueba de hipótesis de presencia de efectos ARCH[16] de Engle, cuyo estadístico al 1 %

[16] Tambien es denominada prueba LM cuya hipótesis nula es $Ho : \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$

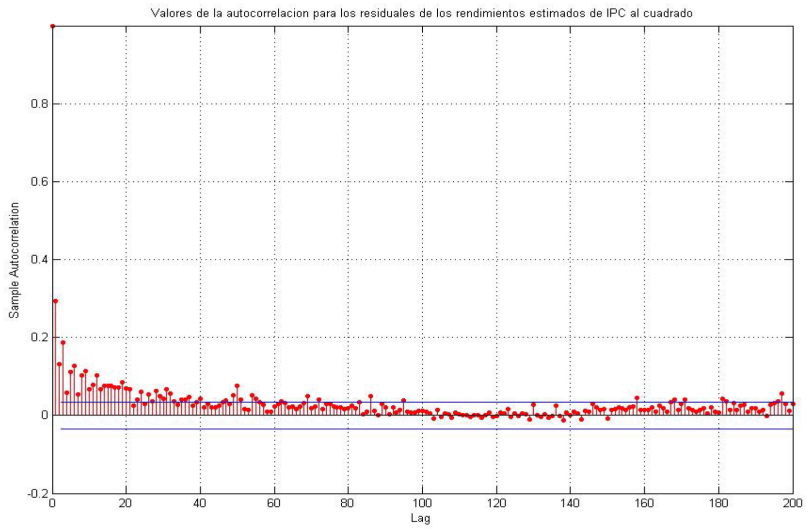

Figura 3.6: Correlograma de los residuales del rendimiento estimado al cuadrado.

de significancia es 786.0823 y el valor crítico 38.9322 con un valor de p=21, que confirma la presencia de volatilidad dependiente del tiempo.

3.1.2. Modelos de Volatilidad no constante

Por lo señalado en la seccion anterior, para modelar el comportamiento del IPC es necesario utilizar un modelo de la familia de los denominados *Autoregresive Conditional Heteroscedasticity Models* o modelos ARCH propuestos por Engle (1982).

Aplicando de nueva cuenta el criterio de Información de Akaike y Schwartz para encontrar la especificación más adecuada de un modelo GARCH(P,Q) considerando a la media condicional como un AR(4) arroja los siguientes resultados,

Criterio	P	Q
Akaike	4	2
Schwartz	1	1

Tabla 3

para la especificación $a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + ... + \alpha_p a_{t-p}^2$.

Dado que el tener un menor número de parámetros a estimar resulta conveniente, se elijió el modelo para los rendimientos del IPC del criterio de Schwartz dado por $\mu_t \sim AR(4)$ y $h_t \sim GARCH(1,1)$ es decir

$$\begin{aligned} R_t &= [c + \gamma_1 R_{t-1} + \gamma_2 R_{t-2} + \gamma_3 R_{t-3} + \gamma_4 R_{t-4}] + a_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \end{aligned}$$

La estimación de los coeficientes por máxima verosimilitud se presenta en la Tabla 4.

Parámetro	Valor	Error Estándar	Estadístico t
$\widehat{c}$	0.1379	0.0202	6.8163
$\widehat{\gamma_1}$	0.1675	0.0168	9.9709
$\widehat{\gamma_2}$	-0.0406	0.0168	-2.4110
$\widehat{\gamma_3}$	0.0065	0.0164	0.3982
$\widehat{\gamma_4}$	0.0061	0.0165	0.3736
$\widehat{\alpha_0}$	0.0861	0.0105	8.1955
$\widehat{\alpha_1}$	0.8313	0.0091	91.1618
$\widehat{\beta_1}$	0.1393	0.0075	18.3794

Tabla 4

Como puede observarse los valores del estadístico t indican que los rezagos 3 y 4 de la media condicional son no significativos por lo que se estimó nuevamente el modelo considerando que la media condicional es un AR(2). En esta última especificación todas las variables resultan significativas, como puede verse en la Tabla 5.

Parámetro	Valor	Error Estándar	Estadístico t
$\widehat{c}$	0.1398	0.0201	6.9344
$\widehat{\gamma_1}$	0.1671	0.0167	9.9861
$\widehat{\gamma_2}$	-0.0395	0.0163	-2.4209
$\widehat{\alpha_0}$	0.0859	0.0104	8.2095
$\widehat{\alpha_1}$	0.8315	0.0090	91.6969
$\widehat{\beta_1}$	0.1392	0.0075	18.4828

Tabla 5

El siguiente paso es verificar sí con este modelo se capturan los efectos ARCH que presentan los rendimientos del IPC. En la Tabla 6 se presentan los resultados de las pruebas Ljung-Box Q para los residuales estándarizados[17] y estándarizados al cuadrado.

Prueba Ljung-Box Q [18]	Estadistico Q	Valor Crítico
Residuales Estandarizados	23.4875	38.9322
Residuales Estandarizados al cuadrado	30.4206	38.9322

Tabla 6

De la prueba Ljung-Box se concluye que los residuales hasta orden 2 se comportan como ruido blanco, así los residuales estandarizados al cuadrado no están serialmente correlacionados.

Para confirmar lo anterior se realizó de nueva cuenta la prueba de efectos ARCH de Engle para los residuales estandarizados, y considerando hasta el rezago 21 se obtiene un estadístico de 30.6 contra el valor crítico 38.9322, por lo que no se puede rechazar la hipótesis de que los coeficientes rezagados de los residuales estándarizados[19] sean cero, es decir, no quedan efectos ARCH.

3.2. Características de la volatilidad

Una vez que se tiene la estimación del modelo para los rendimientos del IPC, es posible analizar sus implicaciones, en lo relacionado al comportamiento de la volatilidad específicamente en lo que se refiere a la persistencia y reversión a la media.

3.2.1. Persistencia

Existe concenso en la literatura acerca del comportamiento de la volatilidad de las series económicas y financieras señalando que una de sus características en la presencia de agrupamientos o *clusters*, es decir, cambios en el precio de un activo se siguen de otros cambios de similar magnitud. Este comportamiento implica que los movimientos en la volatilidad el día de hoy necesariamente tienen impacto en las expectativas de la volatilidad en periodos futuros.

[17] Los residuales estandarizados son $\varepsilon_t = \frac{a_t}{h_t}$ que se asumen ruido blanco con distribución normal estándar.

[18] La prueba se realiza para el rezago 21 al 1 % de significancia.

[19] La prueba es hacia la especificacion $\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2$ donde $Ho : \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$ con p=21

Considere la expectativa de la varianza en el periodo t de los rendimientos en k periodos futuros condicionada a la información contemporánea, es decir

$$h_{t+k|t} \equiv E_t\left[r_{t+k} - E_t\left[r_{t+k}\right]\right]^2$$

Así, el pronóstico de la volatilidad futura dependerá de la información de los rendimientos del día. Bajo estas condiciones, se dice que la volatilidad presenta persistencia al rendimiento del día de hoy si éste tiene un impacto considerable en la varianza pronosticada para periodos futuros.

La medida clásica de persistencia empleada en la literatura es la denominada *vida media de la volatilidad,* la cual se define como el tiempo τ necesario, a partir de un momento t, para que la volatilidad después de desviarse de su valor incondicional regrese la mitad de la distancia que se alejó de ella.

Formalmente, la vida media τ es el tiempo necesario para que se cumpla la siguiente condición

$$\left|h_{t+\tau|t} - \sigma^2\right| = \frac{1}{2}\left|h_{t+1|t} - \sigma^2\right|$$

3.2.2. Reversión a la Media

El que la volatilidad presente clusters, implica que a un periodo con niveles altos de volatilidad le seguirá un periodo con niveles más normales, y equivalentemente cuando se tengan volatilidades pequeñas se esperaría que posteriormente se eleve.

En otras palabras, se asume que existe un nivel "normal"de volatilidad sobre el cual oscila. Este concepto es denominado comportamiento de reversión a la media. En términos del modelo esto implica que pronósticos de largo plazo deben converger a la varianza incondicional σ^2:

$$\lim_{k\to\infty} Persistencia_{t+k|t} = \sigma^2 < \infty,\ \forall\ t$$

Nótese que este concepto está relacionado con la estacionariedad incondicional supuesta en los modelos de varianza condicional heteroscedástica. Bollerslev (1986) demuestra que un proceso GARCH(P,Q) es estacionario cuando la suma de los coeficientes de la especificación de la varianza condicional es menor a la unidad[20].

[20] El proceso GARCH(P,Q) definido en (2.4) y (2.3) es estacionario con $E(\varepsilon_t) = 0$, $var(\varepsilon_t) = \alpha_0\left[1 - A(1) - B(1)\right]^{-1}$ y $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, para $s \neq t \in \mathcal{N}$ si y solo si $A(1) + B(1) < 1$, donde $A(1) + B(1) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i$.

Empíricamente, el resultado anterior se lee de la siguiente manera: si la suma de los coeficientes es menor a la unidad entonces la volatilidad presenta reversión a la media, mientras que dependiendo de que tan cercano se encuentre a la unidad se interpreta como una persistencia mayor.

De esta forma, los resultados del modelo para los rendimientos del índice del IPC no son "tan"persistentes, pues de la Tabla 5 se obtiene que la suma de los coeficientes $\widehat{\alpha_1}+\widehat{\beta_1}$ es 0.97084 relativamente cercano a la unidad, implicando que la volatilidad tiene una vida media de 25 días, esto es, movimientos en la volatilidad perderán la mitad de su efecto después de 25 días.

La varianza incondicional diaria se estima como

$$\widehat{\sigma_{diaria}} = \frac{\widehat{\alpha_0}}{1-(\widehat{\alpha_1}+\widehat{\beta_1})} = 2{,}93\,\% \tag{3.1}$$

que es relativamente cercana a la obtenida en la Tabla 1.

En la Figura 3.7 se gráfica el comportamiento de la volatilidad diaria estimada (azul), asi como la comparación con respecto al valor de la varianza incondicional (rojo), para el periodo de muestra analizado. En la misma figura también se incorpora el comportamiento de la volatilidad condicional pronosticada.[21]

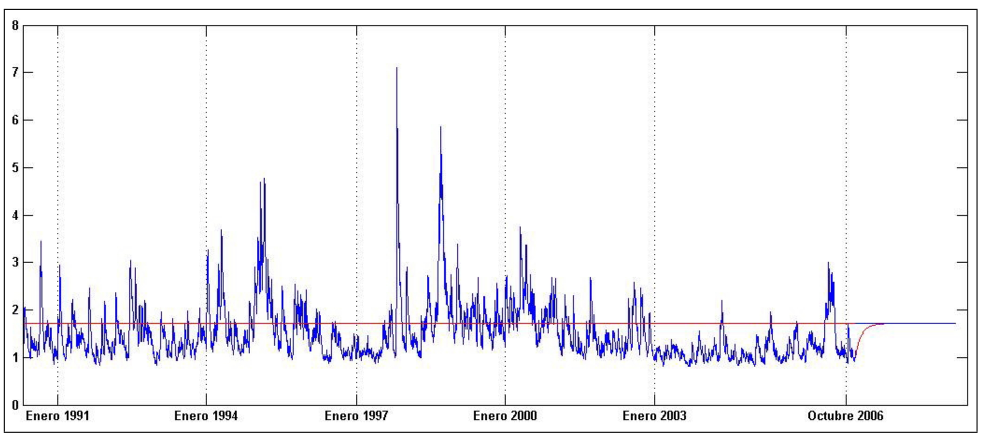

Figura 3.7: Desviaciones Estándar de las Volatilidades Condicional e Incondicional

De acuerdo con las estimaciones del modelo se tiene que prácticamente todo el tiempo la volatilidad se ha encontrado lejos de su valor límite, del

[21] Ver siguiente sección para el pronóstico

valor de la varianza no condicional, sin embargo, el prónostico del modelo implica que convergerá a dicho valor.

3.3. Pronóstico del IPC

Una vez que se tiene el modelo a emplear para la estimación de los rendimientos del IPC, resulta natural hacer comparaciones respecto a lo que pronostica el modelo y la realidad referente a los valores del rendimiento para el IPC. Se consideró un horizonte de 1 año para el pronóstico, es decir, se pronostican los valores para el año 2007.

Los resultados se presentan en la Figura 3.8, donde la linea sólida representan los valores observados del rendimiento, mientras que los puntos son los valores estimados del modelo en el periodo de muestra, y finalmente la línea solida en rojo representa el valor pronosticado.

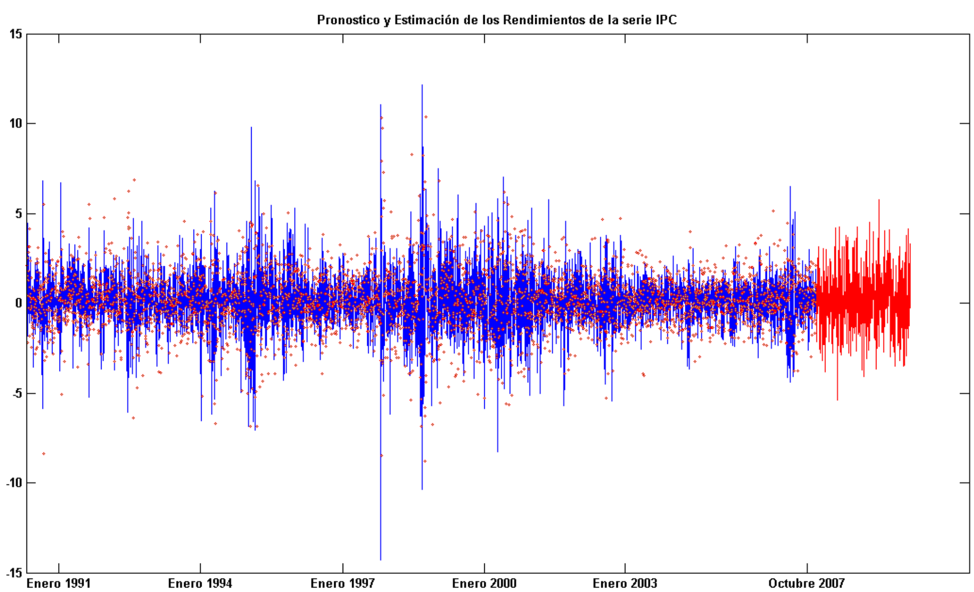

Figura 3.8: Rendimiento del IPC estimado

Como puede apreciarse los valores estimados se encuentran bastante cercanos a los reales, e incluso en los momentos de mayores oscilaciones en los valores del rendimiento pueden verse los beneficios de este tipo de modelos de varianza condicional heteroscedástica, ya que los valores que se estiman presentan las mismas oscilaciones.

También se realizó el ejercicio de pronosticar el valor del nivel del IPC, donde el precio pronosticado del siguiente periodo se estimó con el modelo AR(2)-GARCH(1,1) de la Tabla 5. Los resultados se presentan en la Figura 3.9.

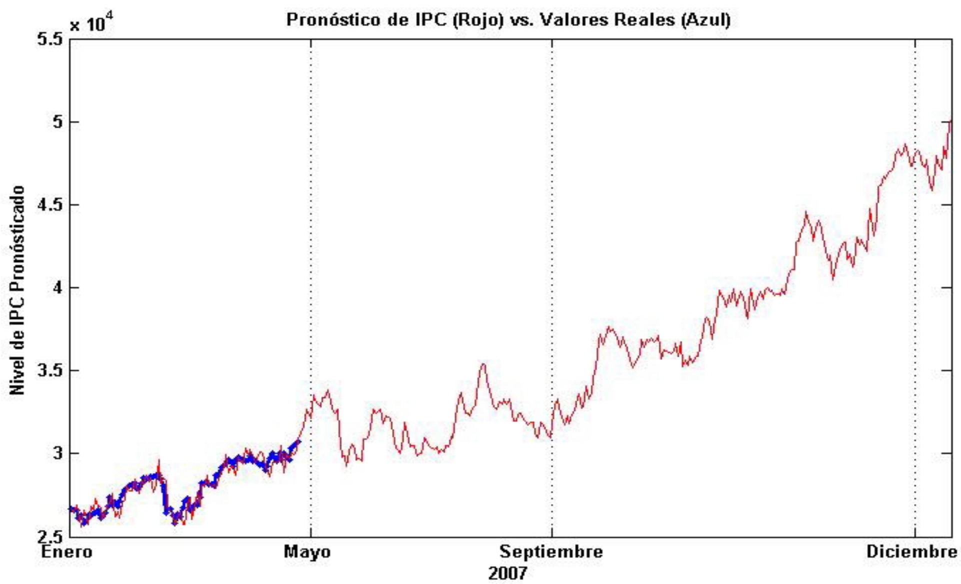

Figura 3.9: Pronóstico del IPC.

Como puede apreciarse la estimación es bastante adecuada.

Capítulo 4

VaR usando modelos ARCH-GARCH

Como ya se ha señalado en los capitulos anteriores, es necesaria la estimación de la distribución del rendimiento del IPC dentro del periodo de muestra, pues se busca analizar el riesgo al que se enfrenta un agente representativo que posea la misma proporción de títulos accionarios que el IPC.

Una vez que tal distribución es estimada se busca medir el riesgo, mediante alguna característica de la distribución, en este caso son los altos cuantiles, mejor conocidos como VaR's.

4.1. Estimación del Riesgo

De la especificación (2.1) y (2.3) para el rendimiento R_t, y en el caso en que los parámetros son conocidos, la estimación de un paso para la media y varianza condicional es

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_t(1)} &= \phi_0 + \phi_1 R_{t-1} + \phi_2 R_{t-2} + a_t \\ \widehat{h_t(1)} &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \\ a_t &= \sqrt{h_t}\varepsilon_t\end{aligned}$$

Si se asume que ε_t se distribuye Normal, entonces la distribución de $\widehat{R_{t+1}}$, es decir, la estimación del riesgo en $t+1$ condicionado a la información disponible hasta t, se distribuye como

$$\widehat{R_{\ t+1}|_t} \sim N\left(\widehat{\mu_t(1)}, \widehat{h_t(1)}\right) \tag{4.1}$$

y entonces los cuantiles de esta distribución, los VaR's, son fácilmente encontrados.

De la estimación del modelo AR(2)-GARCH(1,1) para el IPC de la sección 3.1.2, se pueden recuperar los valores de los parámetros de (4.1) necesarios para la estimación de la distribución del riesgo de un paso, es decir, del siguiente periodo.

Dada la periodicidad diaria de los datos de análisis para el IPC, es posible situarse en el inicio del periodo de muestra (1990) y realizar el ejercicio de ir avanzando en el tiempo para calcular el riesgo del siguiente día mediante el pronóstico de un paso, y con ello verificar la forma del riesgo al que se enfrentaron los agentes dentro del periodo 1990-2006.

En la Figura 4.1 se presenta la forma de las distribuciones de $\widehat{R_{t+1}|_t}$ para los momentos de mayor volatilidad, es decir, para valores altos de $\widehat{h_t(1)}$. Análogamente, la forma de las distribuciones de $\widehat{R_{t+1}|_t}$ para los momentos

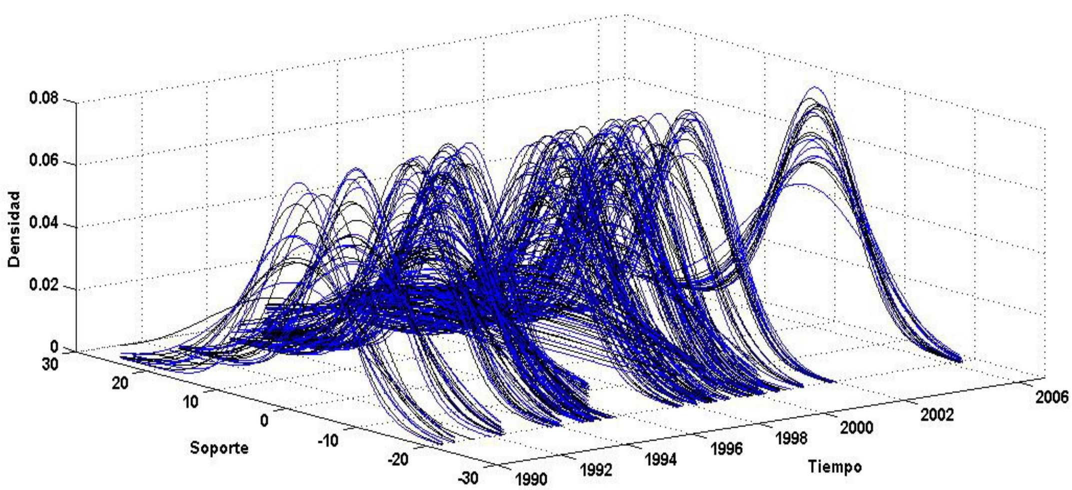

Figura 4.1: Estimación del Riesgo en momentos con mayor volatilidad

de menor volatilidad, es decir, para valores pequeños de $\widehat{h_t(1)}$, se presenta en la Figura 4.2.

Las figuras anteriores hablan de la diferencia en las estimaciónes de la volatilidad en el periodo de muestra, pues el rango resultó de 0.66 % como valor mínimo en la volatilidad esperada para el 10/03/2003, mientras que la volatilidad máxima estimada resultó para el día 28/10/1997 y fué de 50.55 %.

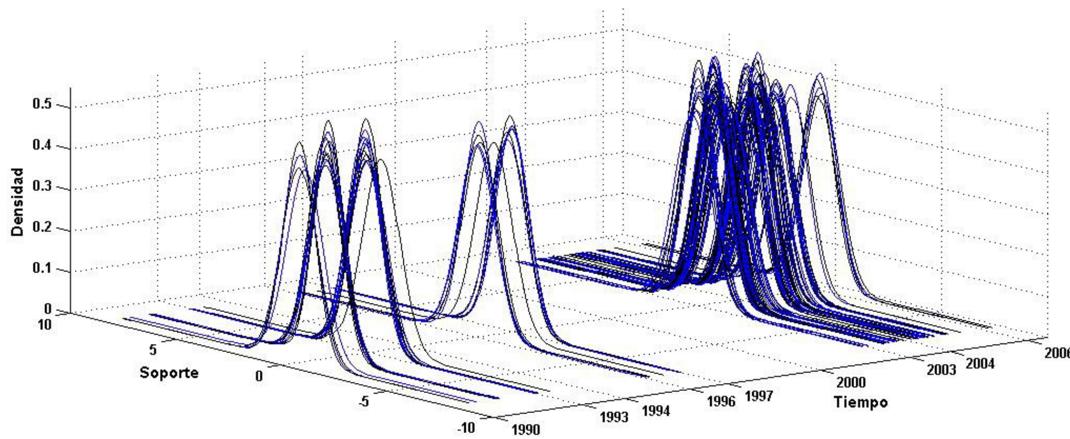

Figura 4.2: Estimación del riesgo en momentos de menor volatilidad

4.2. Cálculo del VaR

De las estimaciónes de la sección anterior de $\widehat{R_{t+1}|_t}$, el cálculo de altos cuantiles, es decir, del VaR resulta inmediato. Para ello se calcularon los cuantiles al nivel de 5 % y 1 % de confianza respectivamente y los valores encontrados constituyen cotas inferiores a los rendimientos esperados a ese nivel de confianza.

Por ejemplo, el día 11/09/2001 la pérdida máxima esperada para el siguiente día de operación (17/09/2001) resultó de 12.2 % al 5 % , y de 17 % al 1 %. Estos valores indican que con probabilidad de 0.95 y 0.99 las pérdidas esperadas en los rendimientos del IPC serían menores que 12.2 % y 17 % respectivamente.

En la Figura 4.3 se muestran los valores de VaR asociados con un nivel de confianza de 5 % para los momentos de mayor volatilidad.

Estos momentos fueron encontrados principalmente en los años 1995, 1997, 1998 y 2000 llegando a niveles de VaR(5 %) menores a -20 % con un valor mínimo de -80 % de rendimiento esperado para el ya señalado día 28/10/1997.

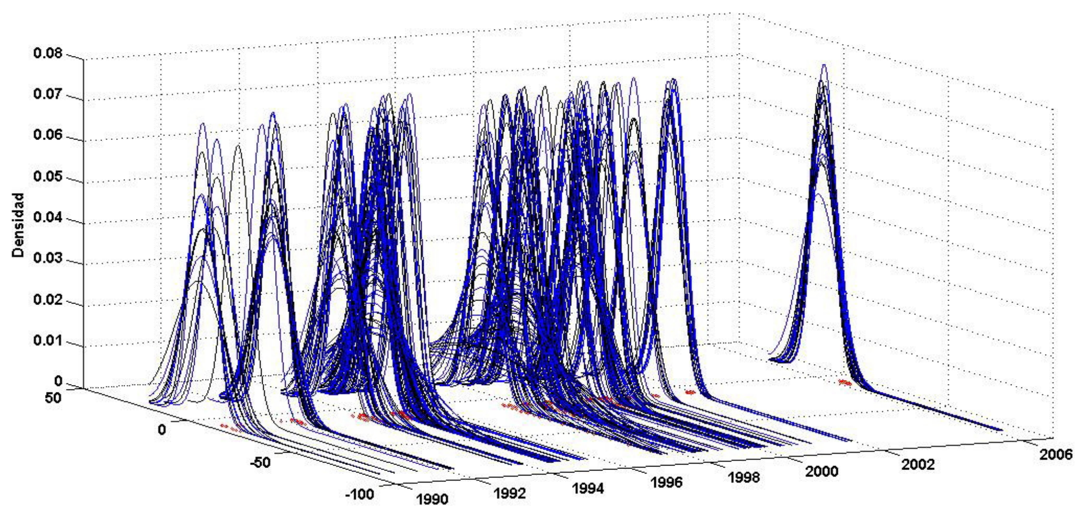

Figura 4.3: VaR al 5 % para los días de mayor volatilidad en la muestra del rendimiento del IPC

4.3. VaR al 5 % y 1 % por periodos

Resulta más operativo realizar el comparativo de los rendimientos observados y los valores del valor en riesgo al 5 % por periodo y asi verificar que tan apropiada resulta esta medida de riesgo en su papel de piso de las pérdidas máximas esperadas.

4.3.1. Periodo de 1990-1993

En este periodo, el VaR al 5 % menor fue de -18.5 % para el día 28/08/1990 y el valor mayor para el día 08/11/1991 de -1 %. También en este periodo se observaron rendimientos menores al VaR al 5 % en 23 ocasiones, y menores al VaR al 1 % en sólo 8 ocasiones.

Considerando que en este periodo se tienen 800 días, los porcentajes de observaciones de rendimientos menores al VaR en el periodo resultaron de 2.87 % y de 1 % para el nivel de confianza de 5 % y 1 % respectivamente, los cuales caen dentro de los niveles de confianza. En la Figura 4.4 se presenta el VaR al 5 % de este periodo.

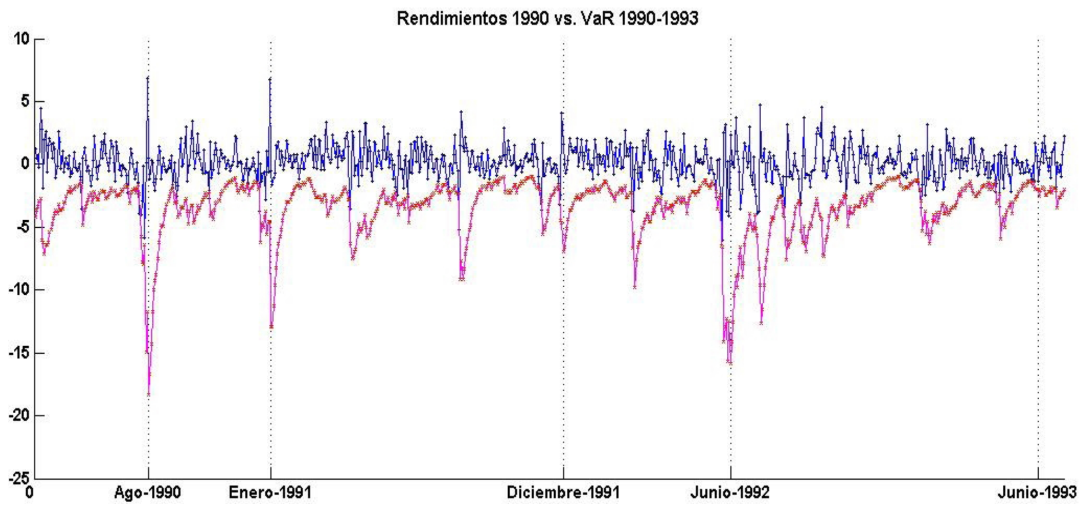

Figura 4.4: VaR al 5 % para el periodo 1990-1993

4.3.2. Periodo de 1993-1998

En este periodo, el VaR al 5 % menor fue de -80.7 % para el día 29/10/1997 y el valor mayor para el día 20/06/1996 de -1.01 %. Se observaron rendimientos menores al VaR al 5 % en 24 ocasiones, todas durante el año 1997. Rendimientos menores al VaR1 % se tuvieron sólo en 6 ocasiones.

Dado que en este periodo se consideraron 1200 días, los porcentajes de observaciones de rendimientos menores al VaR en el periodo resultaron de 2.0 % y de 0.5 % para el VaR al 5 % y 1 % respectivamente, los cuales caen dentro de los niveles de confianza. En la Figura 4.5 se presenta el VaR al 5 % de este periodo.

4.3.3. Periodo de 1999-2003

En este periodo, el VaR al 5 % menor fue de -23.80 % para el día 24/04/2000 y el valor mayor para el día 15/01/2003 de -1.20 %. Se observaron rendimientos menores al VaR del 5 % en 26 ocasiones mientras que rendimientos menores al VaR de 1 % en 7 ocasiones. En este periodo se consideraron 1000 observaciones, los porcentajes de observaciones de rendimientos menores al VaR en el periodo resultaron de 2.6 % y de 0.7 % para el VaR al 5 % y 1 % respectivamente, los cuales caen dentro de los niveles de confianza. En la Figura 4.6

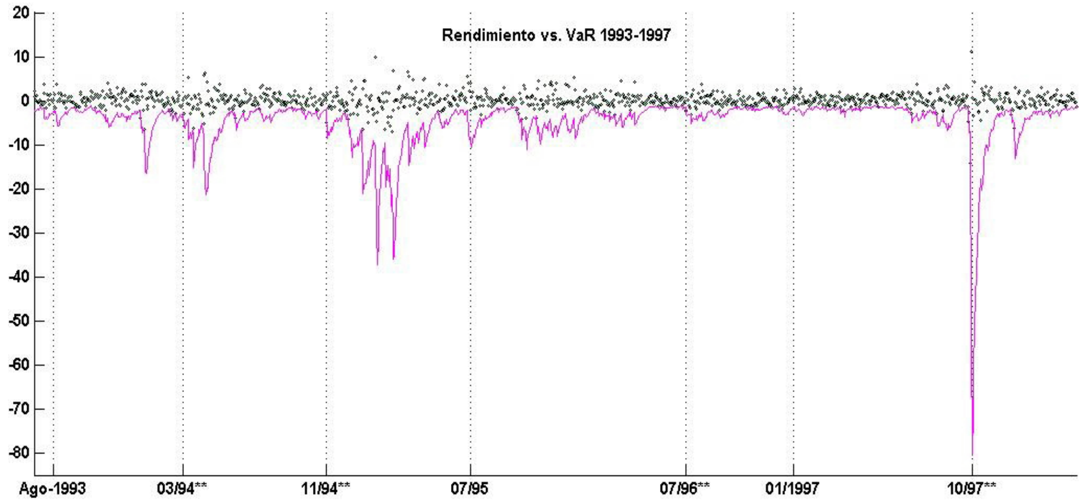

Figura 4.5: VaR al 5 % para el periodo 1993-1997

se presenta el VaR al 5 % de este periodo.

4.3.4. Periodo de 2003-2006

En este periodo, el VaR al 5 % menor fue de -13.69 % para el día 13/06/2006 y el valor mayor para el día 08/09/2003 de -0.87 %. Se observaron rendimientos menores al VaR del 5 % en 32 ocasiones mientras que para el VaR del 1 % en 7 ocasiones. En este periodo se consideraron 900 observaciones, los porcentajes de observaciones de rendimientos menores al VaR en el periodo resultaron de 3.55 % y de 0.77 % para el VaR al 5 % y 1 % respectivamente, los cuales caen dentro de los niveles de confianza. En la Figura 4.7 se presenta el VaR al 5 % de este periodo.

Por tanto, en los periodos analizados el VaR funcionó adecuadamente dentro de los límites de confianza previamente determinados, representando una medida de riesgo confiable. Similarmente, si se analiza la muestra completa, de 1990 a 2006, se tienen porcentajes de observaciones de rendimientos por abajo del VaR pronosticado de 2.7 % para el VaR al 5 %, y de 0.71 % para el VaR al 1 %.

De esta forma el VaR funcionó correctamente en su papel de piso para las pérdidas en los rendimientos del IPC. Estos hallazgos permiten afirmar que

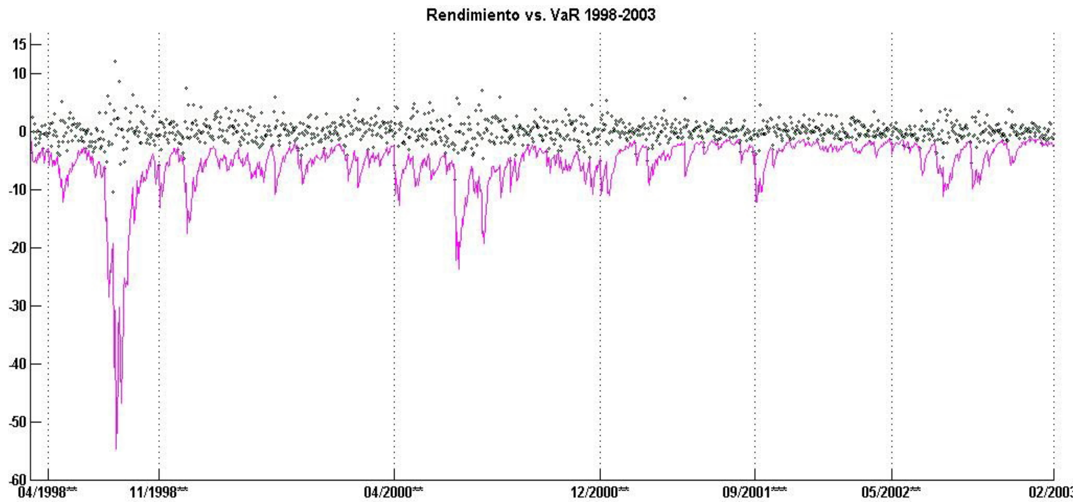

Figura 4.6: VaR al 5 % para el periodo 1998-2003.

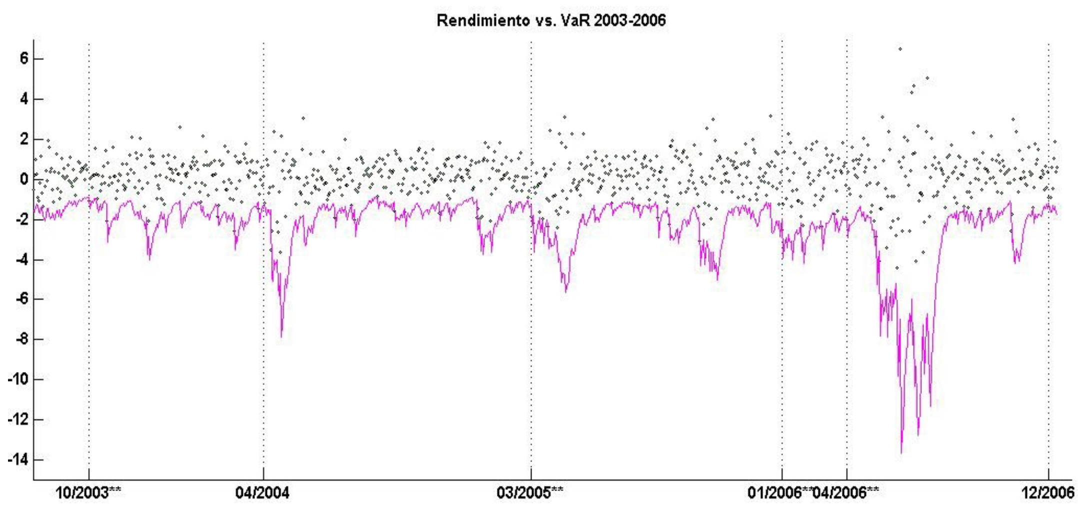

Figura 4.7: Var al 5 % para el periodo 2003-2006

el VaR resultó una medida confiable del riesgo que los agentes se enfrentan en la BMV a través de su principal índice, el IPC.

Conclusiones

En esta tesis se calculó el Valor en Riesgo, medida de riesgo utilizada por prácticamente todas las entidades financieras por su valía en la información que proporciona acerca de la posición que un agente enfrenta, y debido también a requerimientos regulatorios.

El VaR calculado fué el del principal índice de la Bolsa Mexicana de Valores, el IPC, tratando de capturar el riesgo que se enfrenta en la BMV en su conjunto, lo cual se consigue en la medida en que se considere al IPC como representante adecuado.

El proceso de cálculo fue desarrollado dentro de un marco teórico lo más formal posible, desde una definición precisa de lo que significa riesgo, y mediante el empleo de modelos económetricos relativamente modernos que consideran el impacto de la llegada de nueva información en el desarrollo de la serie de los rendimientos del IPC, los denominados modelos de varianza condicional heteroscedástica.

Se estimó el modelo GARCH que se ajustó de manera más apropiada a los datos dentro del periodo de muestra de 1990-2006, y después de las verificaciones correspondientes resultó ser un AR(2)-GARCH(1,1).

Posteriormente, para cada día se estimaron las densidades del día siguiente, siempre incorporando la nueva información disponible, esto se realizó para los 4000 días de muestra.

Una vez estimado el riesgo, el identificar los cuantiles, esto es, el VaR, fue inmediato, y los resultados son importantes. El VaR durante el periodo de muestra para el nivel de confianza de 5 % funcionó adecuadamente pues el porcentaje de observaciones de rendimientos menores al VaR fué de 2.69 % en un periodo que comprende datos de 10 años. Similarmente, para el VaR al 1 % el porcentaje de observaciones de rendimientos menores al VaR resultó de 0.71 %, margen dentro del nivel de confianza. Por tanto el valor en riesgo cumplió su papel de proporcionar un piso a las pérdidas de los rendimientos del IPC.

Con base en estas cifras, se tiene que un agente que haya calculado día a día, el VaR asociado a sus posiciones dentro de la BMV, el VaR le proporcionó una adecuada medida del riesgo que enfrentó.

Ω

Bibliografía

[1] Bollerslev, Tim. *Generalized Autoregresive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics. 1986

[2] Brockwell, Peter J. and Davis, Richard A. *Time Series: Theory and Methods*. 2nd edition. Springer-Verlag New York Inc. 1991.

[3] Brockwell, Peter J. and Davis, Richard A. *Introduction to Time Series and Forescasting*. Springer-Verlag New York Inc. 1996

[4] Engle, Robert F. *ARCH Selected Readings.* Oxford University Press.1995

[5] Engle, Robert F. and Mc Fadden, Daniel L. *HandBook of Econometrics Volume IV.* Elsevier Science. 1994

[6] Engle, Robert F., and Patton Andrew J. *What Good is a Volatility Model?.* Department of Finance, NYU Stern School of Business. 2001

[7] Engle, Robert F. *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation,* Econometrica. 1982.

[8] Gouriéroux. *ARCH Models and Financial Applicarions.* Springer Series in Statistics.1997

[9] Greene, William H. *Econometric Analysis*. Prentice Hall. Fifth Edition. 2003

[10] Jorion, Phillipe. *Valor en Riesgo.* Limusa. 2002

[11] Karr, Alan F. *Probability.* Springer-Verlag. New York, Inc. 1993.

[12] Otero, José M.a. *Econometría Series temporales y predicción*. Madrid. AC.1993

[13] Ross, S. *Simulation*, 2nd. edition. Academic Press, Inc. 1999

[14] Tsay, Ruey S. *Analysis of Financial Time Series.* Wiley Series in Probability and Statistics. 2002.