



EL COLEGIO DE MÉXICO

CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN ECONOMÍA

**CONSIDERACIÓN DEL RIESGO SISTÉMICO EN LA
ELECCIÓN DE PORTAFOLIOS INTERNACIONALES.**

JORGE ALFREDO BOUCHOT VIVEROS

PROMOCIÓN 2009-2011.

JOSÉ MIGUEL TORRES GONZÁLEZ

JUNIO DE 2011.

A Daniel y Benjamín.

Agradecimientos:

A mi asesor José Miguel Torres por su inagotable paciencia, por las largas horas dedicadas a enseñar con ese entusiasmo fuera de lo común.

Al profesor Isidro Soloaga, por su apoyo incondicional. Gracias por haberme tendido la mano cuando estaba derribado.

A Araceli, porque todo este camino tiene su origen en ella, porque me enseñó que las metas pueden alcanzarse una a una con convicción, en definitiva todos los logros son gracias a ella, los fracasos son sólo míos ¡Gracias amiga!

A Alfredo, por inculcarme el amor hacia al trabajo, por mostrarme que aún en los tiempos difíciles hay que levantar la cara con optimismo para seguir luchando, por enseñarme que todo esfuerzo siempre termina por rendir frutos, que no hay cosa más linda que la satisfacción del deber cumplido.

A Roberto, mi mejor amigo, mi compañero de aventuras y también de tiempos difíciles. Gracias por la nobleza y ese inmenso sentido del humor; lo sabes, eres la mejor persona que conozco.

A Pau, por esa fortaleza que avasalla a pesar de ser la más pequeña, créeme, tus palabras generan más de lo que te imaginas. Gracias por las sonrisas y los llantos, que de ti se aprende a cada momento.

A Frida, por esa forma de vivir la vida con una entrega total, sin escatimar. Por esa luz que le das a mis días, por la solidaridad del trabajo compartido; sin tu compañía, y tus ánimos nada de esto habría sido igual. Pero sobre todo gracias por permitirme soñar con ese futuro no tan lejano.

Gracias a ustedes cinco por la enorme confianza que tienen en mí, que se traduce en el más formal de mis compromisos: el de no fallarles. Todo mi trabajo es por ustedes y para ustedes.

A Luis, Rodrigo y David por todas esas horas de trabajo juntos, porque si hoy estoy cumpliendo este objetivo a su lado, es en gran medida gracias a ustedes.

Elección óptima de portafolios internacionales; riesgo sistémico y por tipo de cambio.

Resumen.

En un entorno con flujos internacionales de capital en expansión, el tema de formación de portafolios de inversión que incorporan activos del extranjero es cada vez más importante. En este trabajo se abordan dos consideraciones fundamentales en la elección óptima de dicho portafolio: el riesgo por tipo de cambio y el riesgo sistémico. Para ello construimos nuestra propia base de datos y desarrollamos algoritmos computacionales propios para resolver este problema. Encontramos que el efecto del riesgo sistémico sobre los rendimientos de los activos es significativo, y más importante, el tomarlo en cuenta genera cambios en la asignación óptima de la riqueza, por lo que el costo económico por ignorarlo es considerable. También se demuestra que el comportamiento del riesgo sistémico varía en el tiempo dependiendo del contexto en cuanto a estabilidad económica se refiere.

Índice General.

1. Introducción.	1
2. El modelo: elección de portafolio internacional.	8
2.1 Riesgo sistémico y por tipo de cambio.	8
2.2 El portafolio óptimo.	13
3. Calibración del modelo y significancia económica del riesgo sistémico.	16
3.1 Estimación de los parámetros del modelo.	16
3.1.1 Obtención de momentos vía transformadas de Fourier.	16
3.1.2 Método de Momentos Generalizados.	19
3.2 Evaluación de la significancia económica.	23
3.3 Aspectos a considerar en la identificación de parámetros.	24
4. Descripción de la base de datos.	26
5. Resultados: estimación del modelo y obtención del portafolio óptimo.	33
5.1 Parámetros del modelo.	34
5.2 Elección del portafolio óptimo.	39
6. Pruebas de robustez.	43
6.1 Exclusión de las observaciones correspondientes a la crisis de 2007.	44
6.2 Exclusión de las observaciones correspondientes al periodo 1990-1994.	46
6.3 El modelo utilizando observaciones mensuales.	49
7. Conclusiones.	52
Referencias.	54
Apéndice.	57
A. Ecuaciones diferenciales parciales estocásticas.	57
B. Modelo intertemporal de valuación de activos basado en capitales (ICAPM)	58
C. Calibración de un proceso de difusión con saltos a través de transformadas de Fourier.	60
D. Elección del portafolio óptimo.	65

1. Introducción.

Los beneficios de la diversificación internacional de portafolios han sido estudiados y reconocidos a lo largo de varias décadas,¹ en específico es ampliamente aceptado que la diversificación puede reducir el nivel de riesgo sin que los retornos esperados disminuyan. Por otra parte la apertura a flujos de capitales extranjeros, la desregularización de los mercados financieros, así como el desarrollo de nuevos centros financieros en Asia y América Latina han multiplicado el volumen de comercio de capitales internacionales en las últimas décadas.

Simplemente para ejemplificar la magnitud y la importancia de la inversión en activos extranjeros, examinemos el caso de la administración de los fondos de ahorro para el retiro en México: la tenencia de activos extranjeros en los portafolios de inversión de las SIEFORES (Sociedades de Inversión Especializada en Fondos para el Retiro) se ha duplicado en los últimos tres años (pasando de 99 mil millones de pesos a casi 180 mil millones de pesos). Cabe señalar que la legislación de este organismo no permite la tenencia de activos foráneos superior al 20% de la cartera total de inversión, a pesar de ello y como ya se señaló, la adquisición de productos financieros internacionales no sólo se ha disparado sino que aún se cuenta con espacio para que siga creciendo: de acuerdo a cifras de la CONSAR (Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro), al 31 de diciembre de 2010 la inversión en activos extranjeros representaba apenas el 12.3% de la cartera total.²

El caso de las SIEFORES nos sirve únicamente para ejemplificar la relevancia que ha adquirido la inversión en activos financieros internacionales, pero no se trata de un hecho aislado ya que inversionistas de todo el mundo ya sea como entes gubernamentales o como agentes privados tienden cada vez más a buscar opciones de inversión diversificadas. Otro ejemplo sumamente ilustrativo es el acelerado crecimiento de las reservas internacionales mexicanas en 2010 y

¹ Por mencionar algunos trabajos, sobresalen: Jorion (1985), French y Poterba (1991), Obstfeld (1994), Campbell, Serfaty-de-Medeiros, y Viceira (2007).

² Cifras tomadas del apartado de información estadística del sitio electrónico de la CONSAR: http://www.consar.gob.mx/principal/estadisticas_sar.shtml (Consultado el 4 de febrero de 2011).

2011,³ lo cual en gran medida se debe a la llegada de capitales extranjeros que “huyen” de las bajas tasas de interés en el mundo desarrollado⁴ (el otro factor son los altos precios del petróleo).

Pero paralelamente, la mayor apertura y creciente interconexión entre los mercados mundiales de capitales genera otro tipo de riesgos que deben de ser considerados al momento de asumir posiciones especulativas sobre activos foráneos; es irracional tratar como iguales a inversiones realizadas en mercado doméstico y a aquellas realizadas en el exterior. Los factores que afectan la determinación de los precios de los activos extranjeros son distintos y más complejos; entre otras cosas la posibilidad de contagio entre países permanece latente. Además, es necesario considerar el riesgo que implican las variaciones en el tipo de cambio y la posibilidad de que eventos *idiosincráticos* afecten de forma generalizada los precios y por tanto, los rendimientos de las divisas.

En este estudio se abordan tales aseveraciones en la formación de portafolios considerando de forma conjunta dos aspectos fundamentales del mercado internacional de capitales: el *riesgo por tipo de cambio* y el hecho empírico de que eventos de alta volatilidad tienden a presentarse en un mismo momento y a lo largo de distintos países; nos referimos al *riesgo sistémico*.

La importancia práctica de la consideración de estos dos tipos de riesgos es clara; el ejemplo directo es la reciente crisis inmobiliaria de 2007, en la cual a partir de una incorrecta valuación del riesgo sobre instrumentos específicos (*subprimes*), inició una etapa de contagio hacia los mercados accionarios y de bonos con implicaciones no sólo dentro del mercado doméstico, sino que afectando prácticamente a todas las economías del mundo.

Ampliamos la literatura existente de tres maneras: primero, construimos de una base de datos propia con dos peculiaridades, que son la consideración de observaciones con periodicidad semanal (a diferencia de los datos mensuales utilizados en la literatura existente), y la inclusión de los datos correspondientes a la crisis financiera de 2007. Segundo, a partir del diseño de

³ Interpretación a través de los datos ofrecidos en el sitio electrónico de Banxico:
<http://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadro&idCuadro=CF106§or=4&locale=es>
(Consultado el 3 de junio de 2011).

⁴ Ver figura 2 en la sección 4.

algoritmos computacionales propios,⁵ se estiman los parámetros que describen el comportamiento del riesgo sistémico y se determina además, la asignación óptima de la riqueza monetaria. Tercero, se analiza el comportamiento del riesgo sistémico en distintos intervalos de tiempo, los cuales se caracterizan primordialmente por diferencias en cuanto estabilidad macroeconómica se refiere. También se pone a prueba la robustez del modelo empleando observaciones mensuales, mostrando la dificultad que encierra el identificar los componentes del riesgo sistémico (saltos) utilizando bases de datos con menor frecuencia.

Existen sólidos antecedentes teóricos y empíricos acerca del riesgo que encierra la inversión en portafolios constituidos por activos internacionales, entre ellos sobresalen Solnik (1974), Campbell, Serfaty-de-Medeiros, y Viceira (2007), así como Das y Uppal (2004), quienes han estudiado el riesgo por tipo de cambio y el riesgo sistémico pero de forma separada. Los primeros dos abordan el riesgo por tipo de cambio y consideran mecanismos para protegerse de ello, pero queda de lado la posibilidad de considerar el riesgo de contagio los mercados de capitales, el cual es un aspecto fundamental dentro de nuestro análisis, ya que entre otras cosas limita los beneficios que pudieran obtenerse por diversificación.

Lo desarrollado por Solnik (1974) representa el punto de partida en el estudio del riesgo cambiario: analiza la relevancia de la consideración de los tipos de cambio en la formación de portafolios de activos, enfatizando que los modelos tradicionales de valuación de activos de Sharpe (1964) y Litner (1965) tienen importantes limitaciones porque únicamente consideran inversión de activos domésticos, de modo que no basta con extenderlos con la inclusión de activos extranjeros dentro del portafolio de inversión, debido a que la variabilidad en los precios de las divisas viene a modificar las características de portafolios conformados por idénticos activos pero para inversionistas residentes en distintos países. En otras palabras, los inversionistas no se enfrentan al mismo conjunto de oportunidad de inversión debido a las discrepancias entre el riesgo asumido por ciudadanos de distintas nacionalidades.

Por otra parte, en cuanto a la determinación de precios de acciones se refiere, Solnik (1974) demuestra que a pesar de que los precios dependen ampliamente de factores de tipo doméstico,

⁵ La paquetería utilizada fue *Wolfram Mathematica 8*.

factores internacionales afectan a las acciones de una forma no homogénea lo cual dependerá del grado de interconexión de cada agente emisor de acciones con los mercados internacionales (patrón de comercio exterior, competencia externa, etcétera).

Campbell, Serfaty-de-Medeiros, y Viceira (2007) plantean cómo se pueden utilizar divisas foráneas para administrar el riesgo de un portafolio conformado por activos internacionales (acciones y bonos). Por medio del análisis media-varianza encuentran las posiciones en divisas que minimizan el riesgo total del portafolio, es decir, las covarianzas entre acciones y divisas, así como entre bonos y divisas juegan un rol fundamental en la conformación de la cartera de inversión.

A pesar de que los trabajos de Solnik (1974) y Campbell, Serfaty-de-Medeiros, y Viceira (2007), aportan consideraciones fundamentales al riesgo por tipo de cambio, el análisis queda un tanto limitado puesto que no se ahonda en cuanto a los determinantes de la tasa cambiaria se refiere; recientemente han sido publicados dos artículos que ponen énfasis en el riesgo del crecimiento del consumo como determinante de la relación entre tasas de interés y tipo de cambio.

En el primero de ellos, Lustig y Verdelhan (2007) partiendo de la ecuación de Euler y siguiendo la metodología utilizado por Yogo (2006) derivan un modelo de factores lineales, en el cual los factores son los siguientes: consumo en bienes durables, consumo en bienes no durables, y el logaritmo de la tasa de retorno de mercado. Demuestran que el componente de riesgo por consumo explica una gran proporción de los cambios en los tipos de cambio (condicionados sobre la magnitud de las tasas de interés foráneas). De éste modo los cambios en el crecimiento de consumo deben ser considerados en la determinación del tipo de cambio como un componente a compensar por el riesgo que encierra.

Lustig, Verdelhan y Roussanov (2010) complementan el análisis anterior demostrando que la existencia de factores de riesgo comunes (entre divisas) dan lugar a otro factor determinante en los excesos de retorno por divisas, se trata del *carry trade factor*, el cual empíricamente es la diferencia de los retornos entre los portafolios que contienen activos cuyas divisas tienen la mayor tasa de interés y aquellos cuya divisa tienen la menor tasa de interés. Intuitivamente lo que se

demuestra es que divisas con alta tasa de interés exponen a los inversionistas a un mayor *carry risk* dado que éstas se deprecian cuando los retornos son bajos.

Aunque el enfoque analítico de los dos últimos artículos mencionados difiere en gran medida de nuestro estudio⁶ (nuestro objetivo no es analizar los factores que determinan los precios de las divisas), sirven de referencia fundamental para la interpretación de los rendimientos obtenidos de la inversión en activos internacionales.

En lo que respecta a la literatura de riesgo sistémico, Das y Uppal (2004) ponen de relieve los efectos del riesgo sistémico: en específico disminuye las ganancias por diversificación de activos y penaliza a aquellos inversionistas que mantienen posiciones con amplios márgenes de deuda. Empíricamente evalúa los saltos sistémicos que ocurren en el proceso dinámico de los precios de los activos, estimando los parámetros de retornos por medio de un modelo basado en lo realizado por Merton (1971). Sin embargo, dado que su análisis parte de los retornos obtenidos en dólares, éste queda limitado para explorar el rol de las divisas extranjeras como instrumentos para manejar el riesgo de las acciones.

Por otra parte, Torres (2007) logra conjuntar las bases analíticas de los modelos de Solnik (1974), Campbell, Serfaty-de-Medeiros, y Viceira (2007) y Das y Uppal (2004), incorporando dentro del modelo al riesgo sistémico asumiendo que a alguno de los procesos subyacentes de precios tienen un salto común, y manteniendo además los retornos de la divisa doméstica y los riesgos por tipo de cambio de forma independiente. Torres (2007) muestra que en modelos de conformación de portafolios no miopes, con la inclusión de saltos discretos el riesgo de contagio puede producir efectos complejos sobre la tenencia de divisas. Asimismo, por medio de la calibración de su modelo (a tres mercados internacionales de capitales), pone en evidencia la relevancia empírica de la consideración de los factores de riesgo. En las secciones 6 y 7 nos ocupamos por probar empíricamente este modelo.

⁶ Por ejemplo, el coeficiente de aversión al riesgo estimado por su modelo es sumamente grande, superior a 100, lo cual se aleja bastante de lo considerado dentro nuestra calibración (utilizamos un coeficiente de aversión al riesgo de 2, aunque para fines comparativos de la conformación de portafolio óptimo permitimos coeficientes mayores).

Para considerar de forma conjunta riesgo sistémico y riesgo por tipo de cambio, en la sección 2 desarrollamos un modelo de mercados internacionales de capitales basado precisamente en Torres (2007), el cual a su vez se sustenta modelo intertemporal de Merton (1971, 1973). Se plantea el problema de un inversionista que desea mantener un portafolio diversificado globalmente, y al igual que Das y Uppal (2004) analizamos los efectos del riesgo sistémico sobre la elección óptima de portafolios modelando los retornos de los activos como procesos de difusión con saltos (en el cual se contemplan largos saltos seguidos de movimientos pequeños continuos, que precisamente, tales saltos discretos constituyen nuestro componente de riesgo sistémico).

A partir de tal modelación, se obtiene una solución analítica para la selección del portafolio óptimo, posteriormente en la sección 3 se realiza la calibración del modelo, cuya estimación de los parámetros se realiza a partir del método de momentos generalizados (GMM por sus siglas en inglés). Cabe señalar que por el proceso de distribución con saltos, la distribución de los retornos de los activos que aunque es continua, contempla elementos discretos, de modo que la obtención de los momentos para la implementación de GMM no es trivial; nos valemos de transformadas de Fourier para llegar a las expresiones de los momentos. Una vez encontrados los estimadores de nuestro modelo, la solución numérica se obtiene a partir de aproximaciones.

Asimismo, en la sección 3 se detalla el procedimiento metodológico para evaluar la significancia económica por ignorar al componente del riesgo sistémico en la selección del portafolio óptimo.

En lo que respecta al análisis empírico, los activos a considerar se limitan a bonos gubernamentales, acciones y divisas, dejando de lado los derivados y los *commodities* debido a la complejidad analítica que puede llegar a representar su análisis y sobre todo a que no se han desarrollado índices que agreguen el comportamiento de estas dos clases de activos. En la sección 4 se reportan las estadísticas descriptivas de la muestra seleccionada.

En la sección 5 se presenta una interpretación de los resultados empíricos obtenidos tanto para la estimación de los parámetros como para la elección del portafolio óptimo, encontrando que el riesgo sistémico afecta negativamente la media de los retornos y sobretodo en magnitudes

considerables; se encuentra además que la probabilidad de ocurrencia de los saltos un periodo determinado de tiempo es de 0.06, lo que implica que dada la temporalidad semanal de nuestras observaciones, en alrededor de una de cada diecisiete semanas se espera la ocurrencia de saltos. También se muestra que la consideración de este tipo de riesgo en la selección óptima de portafolios genera cambios sobre las estrategias de inversión, en específico sobre la composición de la asignación óptima de la riqueza, y además, que la significancia económica por ignorar el riesgo sistémico es considerable.

Nuestros coeficientes son coherentes con lo hallado en Torres (2007); la probabilidad de ocurrencia de los saltos es prácticamente la misma, aunque nosotros encontramos que la magnitud media de los saltos es sustancialmente mayor en términos absolutos. Del mismo modo, el costo económico por no considerar el riesgo sistémico en la elección de portafolios es mayor a lo encontrado por Torres (2007).

Algunas pruebas de robustez se desarrollan en la sección 6, permitiendo variaciones en la temporalidad y periodicidad de nuestra muestra, con el fin de analizar el comportamiento del componente del riesgo sistémico en periodos caracterizados por la presencia (o ausencia) de crisis económicas. En esta sección encontramos, entre otras cosas, que la exclusión de los datos correspondientes a la crisis financiera de 2007 genera disminuciones en la probabilidad de ocurrencia de los saltos que describen el riesgo sistémico, provocando además cambios en las medias y varianzas de los rendimientos de los activos. Asimismo, se muestra que con la utilización de observaciones semanales, no mensuales como en la literatura existente, es posible desarrollar una descripción más precisa del riesgo sistémico. Finalmente, algunos comentarios a manera de conclusión se ofrecen en la sección 7.

2. El modelo: elección de portafolio internacional.

El modelo descrito a continuación, ubicado dentro del marco del modelo intertemporal de mercados internacionales de capitales, se sustenta en Torres (2007), quien se basa principalmente en Solnik (1974), Das y Uppal (2004). Las dos vertientes fundamentales a considerar en la elección de activos internacionales, dadas las repercusiones directas sobre los cambios en los precios de los activos, y por ende sobre los rendimientos de los portafolios de inversión son:

- i. Las variaciones en el precio de las divisas (*riesgo por tipo de cambio*).
- ii. La presencia de eventos con ocurrencia esporádica, pero con consecuencias globales significativas (*riesgo sistémico*).

El tratamiento analítico de nuestro modelo, basado en Torres (2007), difiere ampliamente de lo propuesto en los trabajos seminales de riesgo por tipo de cambio y de riesgo sistémico; a diferencia de Solnik (1974) consideraremos al riesgo sistémico asumiendo que a alguno de los procesos subyacentes de precios tienen un salto común, y en contraste con Das y Uppal (2004) mantenemos los retornos de la divisa doméstica y los riesgos por tipo de cambio de forma independiente, con el fin de poder explorar el rol de las divisas como instrumentos de administración de riesgo.⁷

2.1 Riesgo sistémico y por tipo de cambio.

Se asume un inversionista cuyo objetivo consiste en maximizar el valor esperado del beneficio $\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ en un determinado periodo de tiempo, donde γ es la aversión al riesgo y W es la riqueza financiera que se invierte en un portafolio compuesto por activos libres de riesgo (bonos gubernamentales) y por activos riesgosos (acciones), ambos con la posibilidad de invertirse ya sea en el mercado doméstico (país n), o bien en $n - 1$ países extranjeros.

⁷ Torres (2007).

Para la función de utilidad, dada la facilidad de interpretación de los resultados de los rendimientos de los activos al asumir rendimientos con distribución *log-normal*⁸, suponemos que se trata de la función constante en aversión relativa al riesgo⁹ (CRRA por sus siglas en inglés) de la forma:

$$\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

La dinámica de los precios de las acciones (P_i) y de los bonos gubernamentales de corto plazo (B_i), ambos expresados en moneda local son descritos por los siguientes procesos de difusión:

$$dP_i = P_i \alpha_i^e dt + P_i \sigma_i^e dz_i^e$$

$$dB_i = B_i r_i dt$$

Ahora bien, dada la importancia del tipo de cambio dentro de nuestro análisis también es necesario definir la dinámica de los precios de las divisas foráneas i en términos de la divisa doméstica, pero incluyendo además el término relativo al riesgo sistémico representado por los saltos. Por tanto, la dinámica de precios de las divisas (S_i) es descrita por el siguiente proceso de difusión-salto:

$$dS_i = S_i \alpha_i^s dt + S_i \sigma_i^s dz_i^s + S_i J_i dQ$$

Donde:

α_i^e, α_i^s son las tendencias determinísticas de los respectivos procesos de precios.

σ_i^e, σ_i^s son las matrices de varianzas y covarianzas correspondientes a acciones y divisas, respectivamente.

r_i es la tasa de interés pagada por los bonos.

z_i^e, z_i^s son movimientos brownianos puros o procesos de Wiener.

⁸ Aunque asumir una distribución *log-normal* también puede implicar ciertas dificultades si se desean agregar aditivamente los rendimientos, dado que la suma de variables aleatorias *log-normales* no sigue la misma distribución.

⁹ Torres (2007) argumenta que hay otro de aspectos que hacen de la función CRRA atractiva para este tipo de modelación; entre ellas el hecho de que tiende a hacer los modelos de retornos más tratables desde el punto de vista analítico.

J_i es la magnitud de los saltos, las cuales se asumen como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

dQ es un proceso Poisson con probabilidad de ocurrencia λ (probabilidad de que en un periodo determinado de tiempo se presente un salto), que representa el brinco común experimentado por las divisas, y el cual genera que el precio S_i cambie a $S_i(1 + J_i)$.

Cabe señalar que las matrices de varianzas y covarianzas pueden ser expresadas en una matriz que engloba no sólo las correspondientes a acciones y divisas por separado, sino también incluyendo a la matriz de covarianzas entre acciones y divisas:¹⁰

$$\begin{array}{c|cc}
 & P_j & S_j \\
 \hline
 P_i & \sigma_{ij}^e & \sigma_{ij}^{es} \\
 S_i & \sigma_{ij}^{es} & \sigma_{ij}^s
 \end{array}$$

Nótese que para el caso de la matriz de covarianzas entre acciones y divisas, no se trata de una matriz simétrica, es decir $\sigma_{ij}^{es} \neq \sigma_{ji}^{es}$, ya que el primer subíndice hace referencia a una acción, mientras que el segundo a una divisa. En términos más claros, no es lo mismo por ejemplo la correlación entre el yen japonés y las acciones de Gran Bretaña que la correlación entre la libra esterlina y las acciones japonesas.

El lector puede preguntarse por qué el riesgo sistémico únicamente se incluye dentro de la dinámica de precios de las divisas, si de hecho cotidianamente escuchamos cómo acontecimientos en países o regiones en particular impactan sobre los mercados accionarios globales. Efectivamente, existe una amplia evidencia empírica respecto a la presencia de saltos en las distribuciones de los retornos de la mayoría de las acciones, sin embargo puesto que el objetivo primario de la presente investigación es abordar los efectos del riesgo sistémico y el riesgo por tipo de cambio, el interés se centra en el mercado cambiario, y aunque las acciones

¹⁰ Tomada de Torres (2007).

constituyen un elemento fundamental dentro del estudio, se trata de un componente que entre otros, conforma el portafolio de activos pero no constituye la parte central del análisis.

Vale la pena hacer mención del artículo de Jorion (1989), en el que se demuestra no sólo la existencia en los datos de discontinuidades en la distribución del precio de las divisas, sino que además son mucho más significativas respecto a lo hallado en los índices de acciones, lo cual, según Jorion (1989) se atribuye a que es más complicado identificar las discontinuidades en los indicadores agregados, o bien, a que existen diferencias estructurales importantes entre ambos mercados.

Una vez descritas las variables de nuestro modelo y aclaradas este tipo de aseveraciones, podemos continuar con el desarrollo del mismo: anteriormente definimos la dinámica de los precios de los activos que conforman el portafolio, pero es necesario definirlos como rendimientos o tasas de retorno (cambio en el precio sobre precio inicial).

Entonces, los retornos de las inversiones en acciones y bonos gubernamentales realizadas en el país i y expresados en moneda doméstica (nuestro país de referencia doméstico es el país n) se obtienen a través de las siguientes expresiones:

$$\frac{dP_i^n}{P_i^n} = \frac{d(P_i S_i)}{(P_i S_i)}, \quad \frac{dB_i^n}{B_i^n} = \frac{d(B_i S_i)}{(B_i S_i)}$$

Por tanto:¹¹

$$\frac{dP_i^n}{P_i^n} = (\alpha_i^n + \alpha_i^s)dt + (\sigma_i^e dz_i^e + \sigma_i^s dz_i^s) + J_i dQ; \quad \alpha_i^n = \alpha_i^e + \sigma_{ii}^{es}$$

$$\frac{dB_i^n}{B_i^n} = (r_i + \alpha_i^s)dt + (\sigma_i^s dz_i^s) + J_i dQ$$

De modo que aunque los saltos no afectan la dinámica de precios en moneda local de acciones y bonos, claro está que al momento de que el inversionista lleva a moneda doméstica los retornos

¹¹ Dado el movimiento browniano que siguen los cambios en los precios, sabemos que la varianza de dz es dt , por ello la aparición del término $\sigma_{ii}^{es} dt$.

de su inversión, el riesgo sistémico impacta directamente a los retornos; lo anterior no implica que no existan estrategias para protegerse de las variaciones del tipo de cambio y de los saltos discontinuos.

Nótese que si se invierte en acciones en un determinado país extranjero, pero a la vez se pide prestado a la tasa libre de riesgo en ese mismo país (hipotéticamente se asume que es posible obtener préstamos a tal tasa), los cambios que pueda sufrir la divisa extranjera, independientemente del motivo que originen tales cambios, dejan de afectar los rendimientos del inversionista. El único riesgo en el que se incurre es sobre los cambios no esperados en los precios de las acciones:

$$\frac{dP_i^n}{P_i^n} - \frac{dB_i^n}{B_i^n} = (\alpha_i^n - r_i)dt + \sigma_i^e dz_i^e$$

Para poder construir la ecuación de acumulación de la riqueza es necesario diferenciar entre lo invertido en el mercado doméstico y en el exterior.

Sean e_i y d_i las proporciones de la inversión de dedicadas a acciones y a bonos del país i respectivamente, la riqueza total invertida en ese país (y_i) puede expresarse como¹²:

$$y_i \equiv e_i + d_i, \text{ para } i = 1, \dots, n - 1$$

Entonces la ecuación de acumulación de la riqueza puede escribirse como la suma de lo invertido en acciones y en bonos, pero haciendo distinción entre activos domésticos y extranjeros:

$$\frac{dW}{W} = \sum_{i=1}^{n-1} \left[e_i \frac{dP_i^n}{P_i^n} + d_i \frac{dB_i^n}{B_i^n} \right] + e_n \frac{dP_n}{P_n} + d_n \frac{dB_n}{B_n}$$

Dado $y_i \frac{dB_i^n}{B_i^n} \equiv e_i \frac{dB_i^n}{B_i^n} + d_i \frac{dB_i^n}{B_i^n}$, despejando el segundo término del lado derecho:

$$\frac{dW}{W} = \sum_{i=1}^{n-1} \left[e_i \left(\frac{dP_i^n}{P_i^n} - \frac{dB_i^n}{B_i^n} \right) + y_i \frac{dB_i^n}{B_i^n} \right] + e_n \frac{dP_n}{P_n} + d_n \frac{dB_n}{B_n}$$

¹² Transformación tomada de Solnik (1974).

Dado $d_n \frac{dB_n}{B_n} \equiv y_n \frac{dB_n}{B_n} - e_n \frac{dB_n}{B_n}$, sustituyendo:

$$\frac{dW}{W} = \frac{dB_n}{B_n} + e_n \left(\frac{dP_n}{P_n} - \frac{dB_n}{B_n} \right) + \sum_{I=1}^{n-1} \left[e_i \left(\frac{dP_i^n}{P_i^n} - \frac{dB_i^n}{B_i^n} \right) \right] + \sum_{I=1}^{n-1} y_i \left(\frac{dB_i^n}{B_i^n} - \frac{dB_n}{B_n} \right)$$

La expresión anterior tiene una interpretación bastante interesante, ya que mientras el tercer término representa una inversión protegida ante el riesgo por tipo de cambio, el último término indica una posición especulativa en divisas foráneas.

Podemos expresar la ecuación de acumulación de la riqueza en forma vectorial sustituyendo las expresiones que corresponden a los retornos de las inversiones en acciones y bonos gubernamentales:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{W} = & \left\{ r_n + e_n (\alpha_n^e - r_n) + [\vec{e}' \quad \vec{y}'] + \left[\vec{r}^n + \vec{\alpha}^s - r_n \right] \right\} dt \\ & + \left[e_n \sigma_n^e dz_e^e + [\vec{e}' \quad \vec{y}'] \left[\begin{array}{c} \sigma^e dz^e \\ \sigma^s dz^s \end{array} \right] \right] + \vec{y}' \vec{J} dQ \end{aligned} \quad (2.1)$$

Entonces, hemos encontrado una expresión de acumulación de riqueza con un portafolio de inversión compuesto por activos globalmente diversificados, pero lo más importante, en función de los dos componentes fundamentales del análisis: riesgo por tipo de cambio y riesgo sistémico. En el siguiente apartado se le da solución a ésta expresión.

2.2 El portafolio óptimo.

Para poder solucionar el problema de nuestro inversionista es necesario hacer uso de la ecuación de Kolmogorov hacia atrás, que no son otra cosa que soluciones a ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal de la ley de probabilidad de un determinado proceso.¹³

¹³ Ver apéndice, sección A.

De modo que si la función de utilidad de nuestro inversionista que depende del nivel de riqueza en el tiempo, $u(W, t)$, denota:

$$E_{W_t=W} \left[\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]$$

Entonces la función de utilidad es descrita por una ecuación de Kolmogorov hacia atrás. Ahora, si \mathcal{L} es el generador infinitesimal (tasa de cambio o velocidad del salto del proceso de un estado a otro) de nuestro proceso de difusión con saltos y u representa la solución al problema del inversionista, las condiciones de optimalidad necesarias en cada punto en el tiempo son las siguientes:

$$0 = \max_{e_n, \vec{e}, \vec{y}} u + \mathcal{L}u \quad \text{para } t < T, \quad \text{con } u(W, T) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Utilizando como conjetura de $u(W, T)$, la forma funcional $A(t) \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, es posible obtener una ecuación que no depende de la riqueza:¹⁴

$$0 = \max_{e_n, \vec{e}, \vec{y}} \frac{A(t)}{A} + (1-\gamma) \left[r_n + [e_n \quad \vec{e}' \quad \vec{y}'] \begin{bmatrix} \alpha_n^e - r_n \\ \vec{\alpha}^n - \vec{r}^n \\ \vec{r}^n + \vec{\alpha}^s - r_n \end{bmatrix} \right] \quad (2.2)$$

$$- \frac{1}{2} \gamma (1-\gamma) [e_n \quad \vec{e}' \quad \vec{y}'] \begin{bmatrix} \sigma_{nn}^e & \vec{\sigma}'_{en} & \vec{\sigma}'_{yn} \\ \vec{\sigma}_{en} & \Sigma_{ee} & \Sigma_{ey} \\ \vec{\sigma}_{yn} & \Sigma'_{ey} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_n \\ \vec{e} \\ \vec{y} \end{bmatrix} + \lambda E \left[(1 + \vec{y}' \vec{j})^{1-\gamma} - 1 \right]$$

Donde:

σ_{nn}^e : Varianza de las acciones domésticas.

$\vec{\sigma}_{en}$: Vector de covarianzas entre las acciones domésticas y cada una de las acciones foráneas, dimensión $(n-1) \times 1$.

$\vec{\sigma}_{yn}$: Vector covarianzas entre las acciones domésticas y cada una de las divisas foráneas, dimensión $(n-1) \times 1$.

Σ_{ee} : Matriz de varianzas y covarianzas entre las acciones foráneas, dimensión $(n-1) \times (n-1)$

¹⁴ Ver apéndice sección B.

Σ_{ey} : Matriz de covarianzas entre acciones y divisas foráneas¹⁵, dimensión $(n - 1) \times (n - 1)$.

Σ_{yy} : Matriz de varianzas y covarianzas entre las divisas foráneas, dimensión $(n - 1) \times (n - 1)$.

Sintetizando, la matriz que aparece en el tercer término de la ecuación 2.2, aunque parece compleja simplemente está conjuntando en una sola expresión la matriz de varianzas y covarianzas de todos activos a considerar.

Obteniendo las condiciones de primer orden de la ecuación 2.2 respecto a e_n , \vec{e} , \vec{y} , llegamos a un sistema de ecuaciones cuya solución representa la selección del portafolio óptimo:

$$0 = \begin{bmatrix} \alpha_n^e - r_n \\ \vec{\alpha}^n - \vec{r}^n \\ \vec{r}^n + \vec{\alpha}^s - r_n \end{bmatrix} - \gamma \begin{bmatrix} \sigma_{nn}^e & \vec{\sigma}'_{en} & \vec{\sigma}'_{yn} \\ \vec{\sigma}_{en} & \Sigma_{ee} & \frac{\Sigma_{ey} + \Sigma'_{ey}}{2} \\ \vec{\sigma}_{yn} & \frac{\Sigma_{ey} + \Sigma'_{ey}}{2} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_n \\ \vec{e} \\ \vec{y} \end{bmatrix} + \lambda E \left[(1 + \vec{y}'\vec{J})^{1-\gamma} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{0} \\ \vec{J} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

A pesar de que se cuenta con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas aún no es posible resolver el problema, en principio porque desconocemos los parámetros de la función y además por el hecho de que el tercer término no se resuelve de forma trivial, ya que la esperanza se resuelve a partir de una integral, y además en caso de contemplarse más de un país extranjero, la integral a resolver corresponde a una distribución normal multivariada, para la cual no conocemos una solución de forma cerrada.

La ecuación 2.3 representa el punto de partida en la metodología a desarrollarse: más adelante, en las secciones subsecuentes encontraremos una solución numérica a la elección de portafolio óptimo a través de la estimación de los parámetros por medio del método generalizado de momentos y de la cuantificación del componente que corresponde al riesgo sistémico por medio del método de Stroud (1971).

¹⁵ Recordemos que esta matriz no es simétrica.

3. Calibración del modelo y significancia económica del riesgo sistémico.

El objetivo de este apartado es cuantificar los efectos de la consideración del riesgo sistémico dentro de la elección de un portafolio globalmente diversificado a través de la obtención de los estimadores de nuestras variables tanto para soluciones que ignoran la presencia de saltos como para aquellas que lo toman en cuenta. Es decir se pretende conocer la importancia empírica y más importante aún, la significancia económica de la inclusión del riesgo sistémico.

En esta sección se detallará la forma de la aplicación del método generalizado de momentos para la estimación de los parámetros del modelo de precios dinámicos de los activos desarrollado en la sección anterior. Asimismo se describe cómo se evalúa el costo económico del riesgo sistémico y finalmente se precisan una serie de elementos precautorios a considerar para distinguir entre los parámetros de difusión pura de los parámetros de difusión con saltos.

3.1 Estimación de los parámetros del modelo.

3.1.1 Obtención de momentos vía transformadas de Fourier.

La dificultad de nuestro modelo radica en el hecho de que se intentará conocer los parámetros de una distribución continua (proceso de difusión) pero contemplando la inclusión de saltos discretos (proceso de difusión con saltos), por ello antes de explicar la forma en que se implementará el GMM es necesario describir la identificación de los momentos por medio de la utilización de transformadas de Fourier, lo cual permite la identificación de las funciones características que a su vez, por medio de su diferenciación posibilita determinar los momentos no condicionales de los retornos.

Partimos del supuesto de continuidad: a pesar de que nuestras observaciones son semanales, sabemos que si el periodo de tiempo es muy corto (o indeterminadamente pequeño dado el

tamaño de la muestra), la solución continua será una aproximación razonable para la solución discreta.¹⁶ De este modo, el proceso dinámico de precios (X) con saltos de un activo genérico j está descrito por la siguiente ecuación:

$$\frac{dX_j}{X_j} = \alpha_j dt + \sigma_j dz_j + J_j dQ$$

Donde:

α_i es la tendencia determinística.

z_i es un movimiento browniano.

σ_j es la varianza del activo genérico.

$(1 + \vec{J}) \sim \text{lognormal}(\vec{\mu}, \Gamma)$.

dQ es un proceso Poisson con probabilidad de ocurrencia λ .¹⁷

Tomando logaritmos ($x_j = \log X_j$), el proceso estocástico es de la forma:

$$dx_j = a_j dt + \sigma_j dz_j + j_j dQ$$

Donde:

$a_j \equiv \left(\alpha_j - \frac{1}{2} \sigma_j^2 \right)$, el segundo término representa la desigualdad de Jensen.

$j_j = \log(1 + J_j)$

z_i es un movimiento browniano.

$(1 + \vec{J}) \sim \text{lognormal}(\vec{\mu}, \Gamma)$

Ahora, la probabilidad de distribución f de \vec{x} resuelve la ecuación de Kolmogorov hacia adelante (ver apéndice, sección C): $0 = f_t - \mathcal{L}^* f$, donde \mathcal{L}^* es el adjunto del generador infinitesimal del proceso de difusión con saltos, que como ya mencionamos, es la velocidad del salto del proceso de un estado a otro.

El objetivo es identificar la función característica (que nos permitirá llegar a los momentos de los retornos), lo cual se logra tomando la transformada de Fourier en \vec{x} de la ecuación de

¹⁶ Merton (1992) pp. 58.

¹⁷ La tasa de ocurrencia de un salto es la misma para todas las divisas ya que se entiende como la probabilidad de que un determinado evento o circunstancia afecte los rendimientos globales.

Kolmogorov. Se obtiene una ecuación diferencial ordinaria cuya solución, \hat{f} , es precisamente la función característica:

$$\hat{f}(\vec{k}) = E \left[e^{i\vec{k}\vec{x}} \right]$$

Resolviendo, $\hat{f} = \hat{f}_0 e^{tK}$

Donde:

$$K = i\vec{a}\vec{k} - \frac{1}{2}\vec{k}\Sigma\vec{k} + \lambda(\vec{\omega} - 1), \quad var\left(\frac{dx_j}{x_j}\right) = \Sigma$$

$$\vec{\omega} = e^{i\vec{k}\vec{\mu} - \frac{1}{2}\vec{k}\Gamma\vec{k}}$$

Claramente podemos reconocer a la función generadora de momentos, y podemos identificar dentro de ella los tres componentes del proceso de difusión con saltos: el elemento de tendencia que incluye el término por la desigualdad de Jensen, el término del movimiento browniano y finalmente el tercer término es el componente de la distribución del salto (probabilidad de ocurrencia, media y varianza).

$$\text{Dado que } \hat{f}_0 = E \left[e^{i\vec{k}\vec{x}_0} \right] \Rightarrow e^{tK} = E \left[e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}_0)} \right] = E \left[e^{i\vec{k}\Delta\vec{x}} \right].$$

En otras palabras e^{tK} es la función característica para los cambios en el logaritmo de los precios a lo largo del periodo t . Entonces, para t igual a una unidad de tiempo para obtener el l -ésimo momento utilizamos:

$$\frac{\delta^l}{\delta k_n^l} e^K = i^l E [\Delta x_n^l]$$

Asimismo, es posible obtener los momentos cruzados tomando las derivadas cruzadas:

$$\frac{\delta^2}{\delta k_m \delta k_n} e^K = i^2 E [\Delta x_m \Delta x_n]$$

Renombrando el proceso de precios de nuestro activo genérico x_j como r_j (rendimientos), los momentos de los retornos compuestos continuamente sobre un periodo de una unidad de tiempo son:

- i. Media: $m_j \equiv E[r_j] = a_j + \lambda\mu_j$
- ii. Covarianza: $s_{jl} \equiv E[(r_j - m_j)(r_l - m_l)] = \sigma_{jl} + \lambda(\gamma_{jl} + \mu_j\mu_l)$
- iii. Asimetría: $E[(r_j - m_j)^3] = \lambda\mu_j(3\gamma_{jj} + \mu_j^2)$
Co-asimetría: $E[(r_j - m_j)(r_l - m_l)^2] = \lambda[2\mu_l\gamma_{jl} + \mu_j(\mu_l^2 + \gamma_{ll})]$
- iv. Exceso de Curtosis: $E[(r_j - m_j)^4] - 3s_{jj}^2 = \lambda(\mu_j^4 + 6\mu_j^2\gamma_{jj} + 3\gamma_{jj}^2)$

Nótese que el tercer y el cuarto momento dependen únicamente de los parámetros correspondientes a los saltos (lo cual concuerda además con el hecho de que adquieren valores de cero para distribuciones normales), por lo cual son sumamente importantes para los fines interpretativos en cuanto a riesgo sistémico se refiere.

El signo de la asimetría de los rendimientos está determinado por el signo del valor esperado del salto (un valor negativo de asimetría implica que una mayor proporción de observaciones está concentrada en la cola izquierda de la distribución, mientras que un valor positivo indica mayor concentración en la cola derecha). Asimismo, el exceso de curtosis puede ser explicadas por la existencia de saltos discontinuos.¹⁸

3.1.2 Método de Momentos Generalizados.

GMM es un marco general para obtener estimadores. Mínimos cuadrados ordinarios y máxima verosimilitud por ejemplo, son casos especiales de GMM, pero éste último permite su implementación utilizando menos supuestos. De acuerdo a Beckers (1981), la mejor alternativa para la estimación de modelos que implican la presencia de saltos es precisamente el método de momentos ya que, aunque teóricamente máxima verosimilitud podría llegar a ser preferible, resulta no práctico computacionalmente hablando debido a que la ocurrencia de los saltos puede

¹⁸ Press J.S. (1967); Chen, Tsai y Yang (2009).

no ser identificada fácilmente. Campbell, Lo, y MacKinlay (1997) van más allá en la justificación del uso de GMM, argumentando que se trata de los únicos estimadores tanto consistentes como computacionalmente asequibles para muchos procesos de Ito de interés empírico.

Los estimadores se obtienen encontrando los parámetros que generan que las condiciones de los momentos muestrales sean iguales a las poblacionales. Para el presente análisis, contamos precisamente con las expresiones poblacionales o verdaderas que son los cuatro momentos desarrollados en la sección anterior.

En nuestro caso, podemos expresar nuestras condiciones de momentos de la siguiente forma:

$$E[f(r_t, \beta)] = 0$$

Donde f representa el vector de momentos, r_t es el rendimiento para cada uno de los activos en la serie de datos, mientras que β son los parámetros a estimar. Poder identificar de forma correcta los parámetros, el vector de condiciones de momentos debe de ser de al menos la misma dimensión del vector de parámetros, lo cual corroboramos a continuación.

- Condiciones de momentos:
 - Medias: sea n el número de países a considerar, se contará con n condiciones de medias para las acciones y $(n - 1)$ para las divisas, puesto que los tipos de cambio para divisas foráneas se expresan en términos de la divisa doméstica. Esto nos da un total de $(2n - 1)$ condiciones para las medias.
 - Covarianzas: conjuntando acciones y divisas en una sola matriz de covarianzas (incluyendo las covarianzas entre acciones, entre divisas y entre acciones y divisas), contabilizando la covarianza de cada variable respecto al resto (omitiendo los términos iguales para matrices simétricas), tenemos un total de $(2n^2 - n)$ condiciones para covarianzas.

- Asimetría: recordando que para la composición de los dos últimos momentos únicamente afectan las divisas¹⁹, contamos con $(n - 1)$ condiciones para asimetría, pero también es necesario considerar los momentos cruzados (coasimetría), de modo que hay que sumar las $(n - 1) * (n - 2)$ condiciones, lo que nos arroja un total de $(n - 1)^2$ condiciones para el tercer momento.
- Exceso de curtosis: dado que no estamos considerando los cruces del cuarto momento, se tienen $(n - 1)$ condiciones para el cuarto momento.

Sumando las condiciones de los cuatro momentos se tienen un total de $(3n^2 - 1)$ condiciones de momentos.

- o Parámetros a estimar: de acuerdo a los cuatro momentos poblacionales de nuestro proceso de difusión con saltos, los parámetros a estimar son:
 - El escalar λ .
 - Los vectores de los términos de la tendencia determinística α^e (de dimensión n), α^s (de dimensión $n-1$), el vector de medias de los saltos μ (de dimensión $n-1$). Lo que representa un total de $(3n - 2)$ parámetros.
 - Las matrices de varianzas y covarianzas de los activos (acciones Σ_{ee} , divisas Σ_{ss} , y acciones contra divisas Σ_{es}) que en conjunto dan un total de $(2n^2 - n)$ parámetros y además la matriz de varianzas de los saltos (Γ) de dimensión $((n^2 + n)/2)$. Sumando los parámetros de ambas matrices, el número de parámetros a estimar correspondiente a varianzas y covarianzas es de $((5n^2 - 3n)/2)$

Por tanto, el número de parámetros a estimar es de $((5n^2 + 3n - 2)/2)$.

Por tanto: $(3n^2 - 1) > \frac{5n^2 + 3n - 2}{2}; \quad \forall n > 3$

De este modo, cuando se consideran tres países dentro del análisis, el número de parámetros y de condiciones es exactamente el mismo (26); cuando se contemplan más de tres países, estaríamos en presencia de un modelo sobre identificado ya que habría un mayor número de condiciones de momentos que de parámetros.

¹⁹ En otras palabras, los parámetros de los saltos (μ, Γ) únicamente inciden sobre la determinación de los tipos de cambio.

Una vez corroborado que nuestro modelo está correctamente identificado es posible obtener los estimadores de primera etapa, en la cual se busca el vector de estimadores que minimiza la forma cuadrática de la media de los errores muestrales:

$$\hat{\beta}_1 = \underset{(b)}{\operatorname{argmin}} g_T(\beta)' W g_T(\beta); \quad g_T(\beta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E[f(r_t, \beta)]$$

Donde $g_T(\beta)$ es la esperanza muestral de las condiciones de momentos y W es una matriz arbitraria de pesos que indica la ponderación asignada a cada momento, dicho de otra forma indica qué tanta importancia relativa se le brinda a determinados momentos a costa de los demás.²⁰

Usualmente en esta primera etapa se recomienda utilizar la matriz identidad ($W = I$), de modo que se ponderan de forma homogénea cada uno de los momentos, pero alternativamente se pueden utilizar otras matrices de pesos de acuerdo a los momentos de interés específico del investigador; por ejemplo puede ser de mayor interés ponderar en menor magnitud a aquellos momentos volátiles o ruidosos.

La segunda etapa de GMM consiste en escoger la combinación lineal de los errores de las condiciones de momentos con la menor varianza muestral, generando por tanto los estimadores con la menor varianza asintótica.²¹ Nos referimos a la matriz \hat{S} de densidad espectral:

$$\hat{S} = \frac{1}{T} \sum_{j=-k}^k \frac{k - |j|}{k} \sum_{t=1}^T f(r_t, \hat{\beta}_1) f(r_{t-j}, \hat{\beta}_1)'$$

Donde T es el número total de observaciones y k el número de rezagos a considerar dentro de la sumatoria de la covarianzas; la principal problemática para calcular \hat{S} radica precisamente en elegir el número de rezagos, ya que para valores muy bajos o muy altos de k se pueden producir valores sesgados de las autocorrelaciones y por tanto pesos no óptimos. Cochrane (2005) incluso afirma que la elección requiere algo de juicio por parte del investigador.

²⁰ Cochrane (2005), pp. 194

²¹ Op.cit. pp. 195

Andrews (1991) en un estudio en el que analiza distintas estimaciones de la matriz de varianzas y covarianzas de parámetros obtenidos por medio de mínimos cuadrados ordinarios, mínimos cuadrados generalizados y GMM, compara diversas formulaciones propuestas para k , de las cuales tomaremos la definición de Bartlett para la cual $k = T^{1/3}$. Cabe señalar que en nuestro análisis empírico se utilizará una $k = 10$ dadas las 1060 observaciones con que se cuenta.

Una vez determinada la matriz \hat{S} se es posible estimar los estimadores de segunda etapa (y definitivos):

$$\hat{\beta}_2 = \underset{(b)}{\operatorname{argmin}} g_T(\beta)' \hat{S}^{-1} g_T(\beta);^{22}$$

Los parámetros obtenidos se reportan en la sección 5.1.

3.2 Evaluación de la significancia económica.

Después de haber estimado los parámetros del modelo ahora es posible determinar el portafolio óptimo dando solución al sistema de ecuación 2.3, pero dada la distribución normal multivariada presente en el tercer término de la misma, no es posible obtener una solución cerrada. Para poder llegar a una solución numérica se procede por medio de una aproximación a través del procedimiento propuesto por Stroud (1971). Los detalles metodológicos pueden ser consultados en la sección D del apéndice. La conformación del portafolio óptimo de inversión se reporta en la sección 5.2.

Ahora, no sólo nos interesa conocer la forma en que nuestro inversionista asigna su riqueza en presencia del riesgo sistémico, sino que además es esencial poder comparar su elección en caso de que se ignore tal componente de saltos.

²² Es probable que la matriz \hat{S} sea singular debido a que los activos pueden estar altamente correlacionados; para solucionarlo Cochrane (2005) propone la descomposición de Choleski, a la cual se recurre para encontrar los estimadores en nuestro ejercicio empírico.

Para evaluar la significancia económica del riesgo sistémico en los tipos de cambio se emplea la función de valor para calcular la compensación monetaria requerida por el inversionista por utilizar la asignación no óptima ω^+ (sin considerar los saltos), en vez de la asignación óptima ω^* . Esta compensación de riqueza, \bar{W} , se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$E_t \left(\frac{(W_T^+)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \middle| W_t = \bar{W} \right) = E_t \left(\frac{(W_T^*)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \middle| W_t = 1 \right)$$

Dado que $E_t(W_T^{1-\gamma} | W_t = \bar{W})$ es de la forma $A(t; \omega) \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, entonces la compensación monetaria se obtiene de:

$$\bar{W} = \left[\frac{A(t; \omega^*)}{A(t; \omega^+)} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Aclarando, la forma en que se determina la asignación no óptima, ω^+ , es asumiendo que el inversionista selecciona un portafolio considerando que todos los retornos siguen un proceso estándar browniano:

$$dX = X\alpha^+ dt + X\sigma^+ dz$$

En la sección B del apéndice se muestra que $A(t; \omega) = e^{\omega(T-t)}$, donde

$$\omega = (1-\gamma)[r + \vec{\omega}'(\vec{\alpha} - r)] - \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)\vec{\omega}'\Sigma\vec{\omega} + \lambda E \left[(1 + \vec{\omega}'\vec{J})^{1-\gamma} - 1 \right]$$

De modo que ahora se cuenta con todos los componentes necesarios para evaluar el costo económico por ignorar el riesgo sistémico. Los resultados son reportados en la sección 5.2.

3.3 Aspectos a considerar en la identificación de parámetros.

A pesar de que el supuesto de continuidad permite que para periodos de tiempo lo suficientemente pequeños la solución continua será una aproximación razonable para la solución

discreta, pero se deben tomar en cuenta ciertas consideraciones para la interpretación de la solución numérica de nuestro portafolio óptimo.

Melino (1994), en una obra publicada por Cambridge titulada *Advances in Econometrics*, argumenta que a pesar de que el uso de modelos de tiempo continuo es cada vez es más común dentro de la valuación de activos, la explosión y refinación del trabajo teórico no ha sido acompañada por trabajos de investigación empírica. La razón principal es la complejidad que implica la estimación de los procesos estocásticos de tiempo continuo, cuyas dificultades provienen de errores de medición ya que los datos económicos no son presentados en tiempo continuo; los datos disponibles son una secuencia discreta de observaciones, e incluso de comúnmente son presentados de forma espaciada irregular y aleatoriamente.

Ligando lo anterior con el análisis del riesgo sistémico por medio del componente de saltos, siguiendo a Ait-Sahalia (2004), si se emplea una muestra que como tal es una serie de observaciones discretas, cada movimiento es *per se* un salto discreto, por lo tanto no es sencillo distinguir visualmente los saltos ocasionados por riesgo sistémicos a lo largo de la distribución “continua” de nuestra serie de datos, e incluso esto se vuelve más complicado a medida que el intervalo de tiempo se hace más grande entre las observaciones sucesivas. Pensémoslo de éste modo: la capacidad de inferir la causalidad de los saltos se diluye cuando pasamos de un intervalo de tiempo de un minuto, a uno de una hora, o a uno de un mes.

Adicionalmente, Ait-Sahalia (2004) identifica otra dificultad en la identificación de saltos: el efecto de suavización en el tiempo (*time-smoothing effect*), problema concerniente con la agregación temporal. En este caso, los retornos observados sobre periodos de tiempo más largos tienden a ser más suaves respecto a los observados sobre horizontes más cortos. Ait-Sahalia (2004) afirma que este efecto puede ser lo suficientemente severo como para generar que los saltos desaparezcan visualmente de la serie de tiempo observada de los retornos.

Tal y como describiremos en la siguiente sección, la serie de datos a utilizarse tiene una periodicidad semanal, pero dadas las aseveraciones recién mencionadas, con el fin de verificar el

comportamiento de los términos de salto, en la sección 6, correspondiente a pruebas de robustez, se limita la muestra a observaciones mensuales.

Tomando en cuenta estas consideraciones, a continuación procederemos a describir nuestra base de datos para posteriormente estimar los parámetros del modelo y resolver el sistema de ecuaciones para la elección de portafolio óptimo.

4. Descripción de la base de datos.

Nuestra muestra incluye observaciones semanales (aunque para los ejercicios de robustez de la sección 6, la muestra se restringe a observaciones mensuales) de las tasas de interés de bonos gubernamentales, rendimientos accionarios y tipos de cambio para un periodo de poco más de veinte años (noviembre 1990 a febrero 2011, 1060 observaciones). Se contemplan para nuestro análisis seis países miembros de la OCDE: Estados Unidos de América, Japón, Gran Bretaña, Suiza, Canadá y Alemania. Los datos fueron obtenidos de Bloomberg.

Para mayor referencia, en la tabla 1 se reporta la codificación de Bloomberg para cada una de las variables utilizadas:

Tabla 1. Codificación Bloomberg.

	<i>Índices Accionarios</i>	<i>Tipo de Cambio</i>	<i>Bonos Gubernamentales</i>
<i>JPN</i>	NKY Index	JPY Curncy	JY0001M Index
<i>GB</i>	FTSE100 Index	GBP Curncy	BP0001M Index
<i>SUI</i>	SMI Index	CHF Curncy	SF0001M Index
<i>CAN</i>	S&PTSX Index	CAD Curncy	CD0001M Index
<i>ALE</i>	DAX Index	DEM Curncy	DE0001M Index
<i>US</i>	S&P500 Index		US0001M Index

Las tasas de interés de los bonos gubernamentales para cada país fueron obtenidos a partir de los instrumento principal de deuda gubernamental a 28 días, asimismo los rendimientos de las

acciones fueron construidos utilizando índices accionarios²³, finalmente los tipos de cambio expresan la relación respecto al dólar estadounidense.²⁴

Es pertinente señalar que con el fin de homogeneizar la interpretación de la muestra respecto a los rendimientos de los bonos gubernamentales, acciones y tipos de cambio están expresados en rendimientos mensuales anualizados.

El criterio para seleccionar a los países a incluir dentro de la muestra fue la magnitud y el nivel de apertura de movimientos de capitales²⁵, ya que se pretende que en medida de lo posible que los resultados obtenidos sean determinados puramente por factores de mercado y no por algún tipo de política que restrinja el intercambio comercial internacional o la inversión extranjera.

Bajo tal perspectiva se utilizó el índice propuesto por Dennis Quinn (1997), que escala el nivel de los controles de capital implementados por sesenta y cuatro naciones para el año de 1988²⁶. El indicador comprende un rango de entre 0 y 4, en donde 4 representa liberalización total de flujo de capitales. De acuerdo a su interpretación, tal nivel sólo lo alcanzaron Alemania, Guatemala, Panamá, Suiza y Estados Unidos.

La razón por la que no se incluyen a Panamá y Guatemala dentro del análisis es que a pesar de que cuentan con amplio nivel de movimientos de capitales su sistema financiero presenta severas deficiencias, entre ellas la carencia de instituciones bursátiles regularizadas. Por ello se decide incluir a Gran Bretaña y Canadá (con un índice de 3.6 cada uno). Por su parte, Japón es un caso especial ya que aunque su índice reporta 2.3, su inclusión resulta sumamente interesante, no sólo por la magnitud de sus transacciones internacionales, sino por las características de su comercio altamente exportador y por su tipo de cambio bajo (en términos relativos).

²³ Los índices accionarios utilizados fueron los siguientes: Standard & Poor's 500 (Estados Unidos), NIKKEI 225 (Japón), Financial Times Stock Exchange (Gran Bretaña), Swiss Market Index (Suiza), Standard & Poor's for Toronto Stock Exchange (Canadá) y Deutscher Aktien *Index* (Alemania)

²⁴ Para el caso del marco alemán, a partir de 1999 se asume como tipo de cambio el del *euro*.

²⁵ De acuerdo a Cooper, Tarullo y Williamson (1999), la libre movilidad de capitales permite la utilización óptima de los recursos mundiales, permitiendo que, el capital ya sea que vaya a aquellos países en los que la tasa real de retorno es más grande, o bien en donde el riesgo es menor.

²⁶ Aunque Chinn e Ito (2007) constituye una propuesta mucho más reciente de indicadores de apertura financiera, en la literatura sigue siendo común encontrar referencias a éste índice a pesar de que utiliza datos de hace más de veinte años.

A continuación, se presentan las estadísticas descriptivas (tabla 2) de nuestras variables, cuyos valores son presentados en términos porcentuales para mayor facilidad de interpretación.

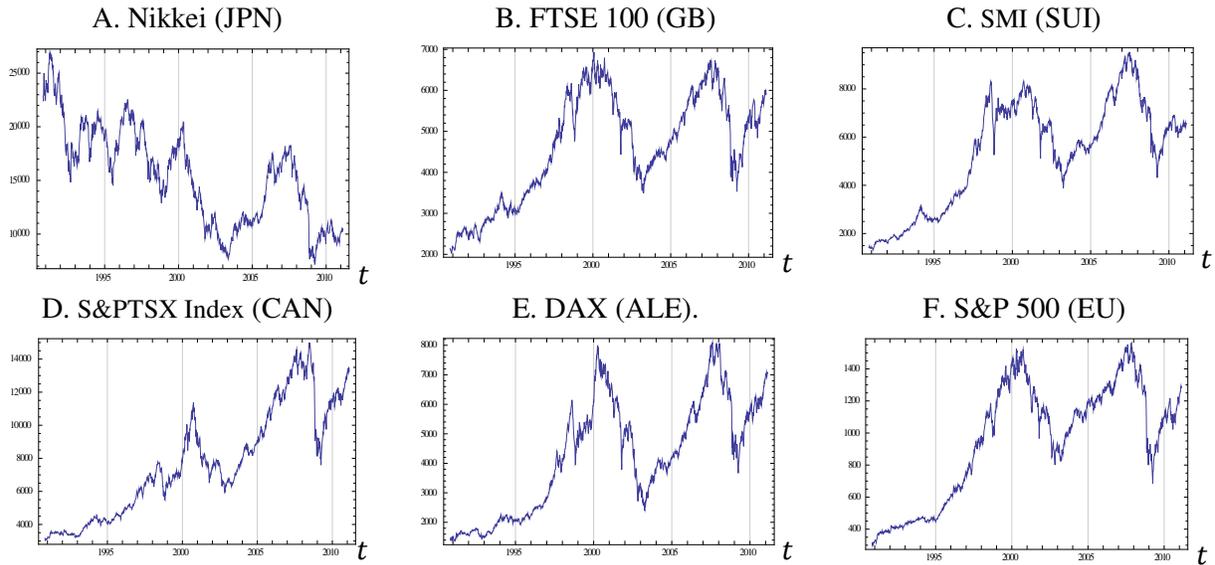
Tabla 2. Estadísticas descriptivas (porcentajes).

	JPN	GB	SUI	CAN	ALE	US
Acciones						
Media	-3.64	4.75	6.90	6.76	7.31	6.58
Desviación Estándar	73.18	54.80	60.39	55.41	73.61	54.77
Asimetría	-0.71	-1.12	-0.87	-1.43	-1.16	-1.36
Exceso de Curtosis	4.37	5.37	4.09	6.82	4.11	8.24
Tipo de Cambio						
Media	-2.00	-0.91	-1.33	-0.71	-0.26	
Desviación Estándar	36.77	32.90	37.68	24.89	35.91	
Asimetría	-0.53	-1.03	-0.17	1.21	0.09	
Exceso de Curtosis	1.56	4.03	0.38	13.01	0.75	
Bonos						
Media	1.25	5.60	2.53	4.27	4.02	3.89
Desviación Estándar	2.04	2.66	2.38	2.22	2.37	2.03
Asimetría	2.24	0.65	1.35	0.75	0.96	-0.39
Exceso de Curtosis	4.21	1.75	1.03	1.42	0.35	-1.03

En lo que se respecta a los rendimientos accionarios, Japón es el único país que exhibe un rendimiento promedio negativo (-3.64%); en general la media se ubica alrededor de 7%, salvo Gran Bretaña que presenta un rendimiento relativamente bajo (4.75%).

La volatilidad es mucho mayor a lo encontrado para bonos y tipo de cambio, ubicándose entre 54.80 en el caso de Gran Bretaña y 73.61 para Alemania, pero vale la pena resaltar que en general no se aprecia ningún patrón entre media y volatilidad; por ejemplo Alemania y Japón para el caso de los índices accionarios tienen prácticamente la misma varianza pero el diferencial entre su rendimiento promedio es de casi 10 unidades porcentuales. Para ilustrar los puntos anteriores, en la figura 1 se presenta la tendencia exhibida por las acciones de nuestros seis países.

Figura 1. Índices Accionarios.



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg.

Para tipos de cambio se observan variaciones negativas para todos los países, pero no debe perderse de vista que las divisas expresan la tasa de cambio respecto al dólar americano (lo que implícitamente indica una apreciación del dólar frente a éste grupo de divisas). El yen japonés presenta rendimientos negativos (-2%) y la segunda mayor desviación estándar (36.77), mientras que Alemania y Canadá tienen rendimientos cercanos a cero (-0.26% y -0.71% respectivamente).

La desviación estándar nuevamente es muy alta, lo cual no es sorprendente ya está bien documentada la dificultad para predecir los cambios en los precios de las divisas²⁷. El dólar canadiense es la divisa con menor volatilidad (24.89), mientras que para el resto la desviación estándar es de alrededor de 35.

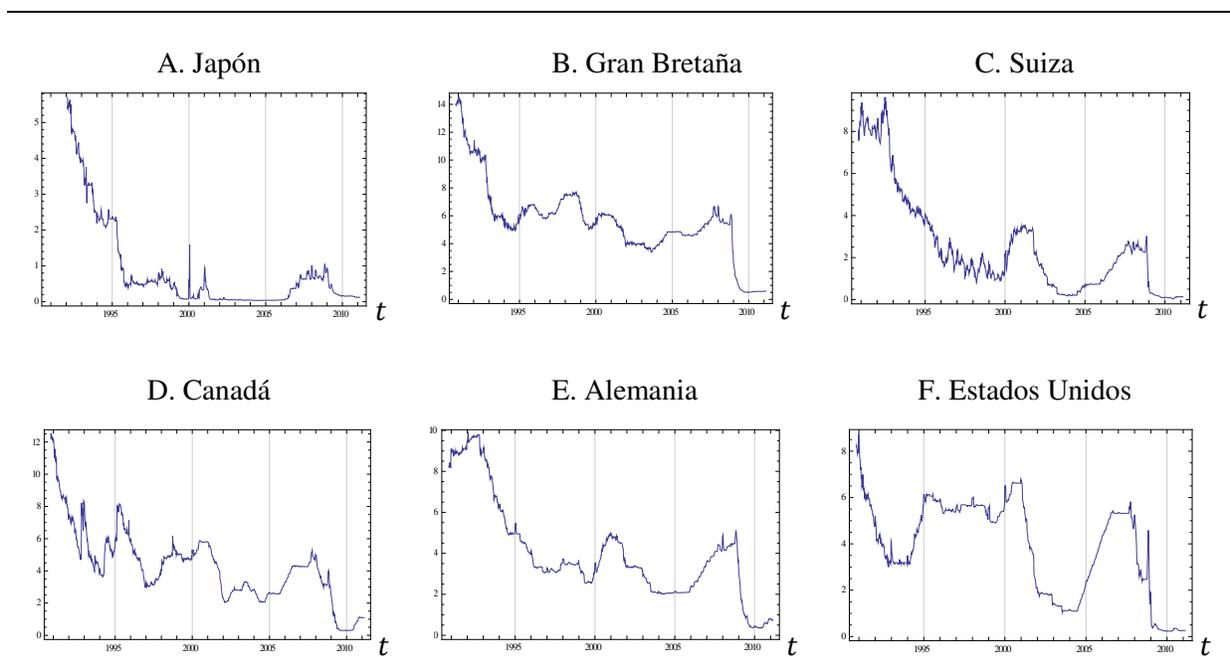
Japón y Suiza son los países con menores rendimientos en cuanto a bonos gubernamentales se refiere (1.25% y 2.53%), seguidos por Estados Unidos, Alemania y Canadá (3.89%, 4.02% y 4.27% respectivamente). Sobresale Gran Bretaña con un rendimiento promedio de 5.6%. La desviación estándar es considerablemente más baja respecto a nuestros otros dos activos sin

²⁷ Meese y Rogof (1983) comparan los llamados modelos estructurales y los modelos de series de tiempo en la efectividad para predecir el tipo de cambio del marco alemán, el yen japonés y el dólar estadounidense; encuentran que los modelos de caminata aleatoria son los que mejor ajustan.

embargo para el caso de Japón (2.04) todavía es mayor que la media. Los bonos del tesoro estadounidenses tienen una desviación estándar muy similar a Japón (2.03) pero el diferencial entre sus medias es de más de 2.5%, lo cual corrobora el hecho de que para este tipo de activos tampoco se encuentra una relación clara entre riesgo y rendimiento, aunque debe señalarse que Gran Bretaña exhibe el mayor rendimiento y la mayor desviación estándar (2.66).

En la figura 2, claramente se puede apreciar la tendencia a la baja de las tasas de interés de los bonos gubernamentales.

Figura 2. Tasas de Interés de los Bonos Gubernamentales.



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Bloomberg.

En la tabla 2 también se reportan asimetría y exceso de curtosis, los cuales para distribuciones no normales los valores pueden ser distintos de cero e indica, como ya se mencionó una mayor concentración de observaciones a la izquierda o derecha de la media, mientras que para el exceso de curtosis indica que existe una mayor concentración de observaciones en las colas de la distribución. Exceso de curtosis implica colas anchas, mientras que números negativos de curtosis son presentados en distribuciones leptocúrticas.

En acciones se observa una asimetría negativa para todos los países, mientras que para los bonos gubernamentales es positiva, lo que indica que la probabilidad de obtener pérdidas de amplia magnitud de un periodo a otro es mayor invirtiendo en acciones. Para los tipos de cambio los únicos países que exhiben asimetría positiva son Canadá y Alemania, que tal y como se menciono tienen los rendimientos más cercanos a cero.

El exceso de curtosis tiene fines interpretativos importantes para nuestro análisis, ya que tal y como se hizo referencia anteriormente la existencia de saltos discontinuos pueden ser reconocidos por la existencia de una curtosis alta, ya que significa la posibilidad de obtener ganancias o pérdidas de gran magnitud.

Prácticamente en todos nuestros activos se muestran valores positivos (únicamente para los bonos del tesoro estadounidenses se observa lo contrario), aunque para las acciones la curtosis es aún mayor ya que todos los países tienen valores mayores a cuatro. Nuevamente en tipos de cambio tenemos dos casos especiales: por un lado tenemos a Suiza y a Alemania con distribuciones cercanas a la normal (exceso de curtosis y asimetría muy cercanas a cero), y por otro Canadá que presenta exceso de curtosis de 13.01. En bonos gubernamentales los bajos niveles de exceso de curtosis se explican por el hecho de que las tasas de interés anunciadas por los bancos centrales tienden a variar poco durante periodos de largo plazo.

En la tabla 3 se reportan las correlaciones entre los países para acciones (panel a), tipo de cambio (panel b) y tipo de cambio contra acciones (panel c).

En el panel A las correlaciones encontradas son bastante altas, lo cual confirma la interconexión entre los mercados bursátiles internacionales. Incluso para el caso de Japón en el que podrían esperarse correlaciones más bajas, éstas oscilan entre 0.48 y 0.56. Para el resto las correlaciones están en el rango de entre 0.62 y 0.81.

En divisas, las correlaciones son más bajas, aunque para los países europeos se observan valores mayores a 0.6 en términos absolutos, por ejemplo la correlación entre franco suizo y el marco

alemán es de 0.91. Japón, como era de esperarse exhibe las correlaciones más bajas, siendo cercana a cero en el caso con Canadá.

Tabla 3. Correlaciones.

A) Acciones						
	US	JPN	GB	SUI	CAN	ALE
US	1.00					
JPN	0.56	1.00				
GB	0.81	0.52	1.00			
SUI	0.73	0.48	0.79	1.00		
CAN	0.79	0.55	0.69	0.62	1.00	
ALE	0.76	0.52	0.77	0.78	0.70	1.00

B) Tipo de Cambio					
	JPN	GB	SUI	CAN	ALE
JPN	1.00				
GB	-0.20	1.00			
SUI	0.45	-0.65	1.00		
CAN	-0.01	-0.32	0.23	1.00	
ALE	0.37	-0.70	0.91	0.33	1.00

C) Acciones y Tipo de Cambio.						
	US	JPN	GB	SUI	CAN	ALE
JPN	0.08	0.15	0.11	0.17	0.06	0.18
GB	0.11	0.10	-0.10	-0.09	0.11	-0.03
SUI	0.04	0.04	0.15	0.28	0.05	0.23
CAN	-0.45	-0.36	-0.38	-0.25	-0.47	-0.37
ALE	-0.10	-0.05	0.03	0.17	-0.06	0.09

Finalmente, en el panel C se presentan las correlaciones entra acciones y divisas, la cual resulta de especial interés para los fines de análisis de cobertura de riesgo, ya que el hecho de encontrar correlaciones negativas es de gran relevancia ya que nos permite identificar instrumentos de cobertura, de poco serviría que tanto acciones como divisas se movieran en la misma dirección.

Los renglones reportan los tipos de cambio y las columnas las acciones, por ejemplo el primer elemento de la matriz se interpreta de la siguiente forma: es la correlación de los retornos por invertir en acciones estadounidenses con los cambios en el precio del yen japonés.

Aunque en general se aprecian correlaciones bajas (en un rango de entre -0.47 y 0.28), el dólar canadiense muestra correlaciones significativas con las acciones de todos los países (siendo en su mayoría negativas), con un promedio de 0.38 en términos absolutos. Lo anterior podría significar que el dólar canadiense puede ser atractivo como activo de protección al riesgo cuando se invierte en acciones globales. En cambio, las acciones canadienses tienen en promedio correlaciones de 0.07 con el resto de los países.

El yen japonés tiene correlaciones positivas con las acciones y presenta valores altos para el caso con las acciones europeas: 0.15 con Gran Bretaña, 0.17 con Suiza y 0.18 con Alemania. Caso contrario ocurre con la correlación entre las acciones japonesas y las divisas europeas, ya que son menores a 0.10 e incluso negativa con el marco alemán.

Para el análisis empírico descrito en la sección siguiente únicamente consideraremos a tres países: Estados Unidos como país doméstico, así como Japón y Gran Bretaña como países foráneos. La razón no es sólo la magnitud de las transacciones internacionales en activos financieros, sino también los altos niveles de curtosis observados en los precios de sus divisas.

5. Resultados: estimación del modelo y obtención del portafolio óptimo.

En esta sección, conforme a lo descrito en la sección 3.1 y 3.2, se obtienen los estimadores del modelo a través de la aplicación de GMM y posteriormente, por medio del método propuesto por Stroud (1971), se resuelve el sistema de ecuaciones correspondiente a la expresión 2.3 encontrando, de este modo la asignación óptima de activos en la conformación del portafolio.

5.1 Parámetros del modelo.

En la tabla 4 se reportan los estimadores tanto de los términos de tendencia como los de riesgo (varianzas), asimismo, en la tabla 5 se muestran éstos mismos estimadores pero con la inclusión de los saltos discretos. Esto con el objeto de poder comparar no sólo las diferencias entre los parámetros sino también examinar la relevancia de la inclusión en el análisis del riesgo sistémico.

Tabla 4. Estimadores del proceso de difusión.

	Acciones			Divisas	
	EU	JPN	GB	JPN	GB
A. Términos de tendencia.					
$\hat{\alpha}$	0.22	0.23	0.20	0.05	0.05
	(0.0009)	(0.0017)	(.0009)	(0.0005)	(0.0004)
B. Términos de volatilidad.					
Acciones					
EU	0.30	0.22	0.24	0.02	0.02
	(0.0022)	(0.0033)	(0.0022)	(0.0002)	(0.0003)
JPN		0.54	0.21	0.04	0.02
		(0.0043)	(0.0028)	(0.0004)	(0.0004)
GB			0.30	0.02	-0.02
			(0.0015)	(0.0002)	(0.0002)
Divisas					
JPN				0.14	-0.02
				(0.0002)	(0.0001)
GB					0.11
					(0.0002)

*Los errores estándar se reportan entre paréntesis.

Por principio de cuentas, todos nuestros estimadores resultaron estadísticamente significativos y muestran coherencia tanto con las estadísticas descriptivas presentadas en el punto anterior como con los parámetros encontrados en Torres (2007).

Analizándolos, tal y como se puede observar todas las tendencias resultaron positivas y de magnitud mayor respecto a las medias reportadas en la sección anterior; el lector podría preguntarse cuál es la razón de tal discrepancia. Hemos de recordar que la tendencia no es igual a la media, ya que la primera se ve afectada por el término de la desigualdad de Jensen

$(-1/2 \sigma_j^2)$, por tanto, realizando tal ajuste las medias estimadas resultan cercanas a las muestrales.

De este modo, por ejemplo para el caso de los rendimientos de las acciones japonesas la media es negativa (-0.04 aproximadamente), lo cual resulta acorde con lo esperado, ya que justo para el periodo de nuestro estudio, estos activos se caracterizan por rachas bastante largas de pérdidas (cuyo origen se remonta a la gran burbuja inmobiliaria que explotó a finales de la década de los ochentas). Para las divisas, a pesar de las tendencias positivas, los términos de riesgo por medio de la desigualdad de Jensen empujan las medias a términos negativos, por lo que claramente se aprecian devaluaciones respecto al dólar estadounidense, los rendimientos negativos (-0.02 para el yen y -0.005 para la libra esterlina), nos indican que la estrategia lógica en la tenencia de este tipo de activos serían posiciones cortas.

En el panel B se reportan los términos de volatilidad, que no es otra cosa que la matriz de varianzas y covarianzas de nuestros activos. Al igual que lo hallado en las estadísticas descriptivas, como era de esperarse, el término de riesgo es sustancialmente mayor en las acciones que en las divisas, sobresaliendo nuevamente el caso de Japón cuya varianza es sumamente elevada (0.54 para acciones y 0.14 para su divisa). Otro aspecto a resaltar es la covarianza negativa de la libra esterlina tanto con yenes japoneses, como con las propias acciones de Gran Bretaña (ambas alrededor de -0.02), lo cual representa oportunidades directas para estrategias de cobertura ante cambios en el precio de las divisas.

En la tabla 5 se reportan los estimadores una vez que se considera el componente del riesgo sistémico; antes de comenzar su interpretación, vale la pena recordar que de acuerdo a los momentos encontrados por medio de la aplicación de las transformadas de Fourier, los momentos para los rendimientos de las divisas ahora dependen también de la probabilidad de ocurrencia de los saltos así como de la media y las varianzas de los mismos; por tanto es necesario considerar tales elementos para poder construir las medias y varianzas estimadas.²⁸

²⁸ Para mayor claridad, recordamos la definición de los dos primeros momentos:

$$\text{Media: } m_j \equiv E[r_j] = a_j + \lambda \mu_j; \quad a_j \equiv (\alpha_j - 1/2 \sigma_j^2)$$

$$\text{Covarianza: } s_{jl} \equiv E[(r_j - m_j)(r_l - m_l)] = \sigma_{jl} + \lambda(\gamma_{jl} + \mu_j \mu_l)$$

Tabla 5. Estimadores del proceso de difusión con saltos.

	Acciones			Divisas	
	EU	JPN	GB	JPN	GB
A. Términos de tendencia.					
$\hat{\alpha}$	0.033 (0.0003)	0.177 (0.0009)	0.118 (0.0004)	0.077 (0.0758)	-0.012 (0.0365)
B. Términos de volatilidad.					
Acciones					
EU	-0.066 (0.0025)	0.208 (0.0028)	0.145 (0.0028)	0.300 (0.0028)	0.208 (0.0028)
JPN		0.428 (0.0042)	0.134 (0.0050)	-0.034 (0.0050)	0.276 (0.0050)
GB			0.140 (0.0016)	-0.166 (0.0019)	0.326 (0.0019)
Divisas					
JPN				-0.006 (6.3452)	-0.191 (4.4940)
GB					-0.210 (0.1325)
C. Términos de salto.					
$\hat{\lambda}$					0.062 (0.2106)
$\hat{\mu}$				-1.632 (6.8504)	-1.638 (1.8730)
$\hat{\Gamma}$				0.836 (1.7761)	1.216 (0.5969)
					2.481 (0.9306)

*Los errores estándar se reportan entre paréntesis.

Ahora bien, considerando la presencia del riesgo sistémico nos alejamos un tanto de las medias y varianzas muestrales, lo cual no quiere decir que el modelo implementado sea erróneo, simplemente que la composición del modelo de difusión con saltos, al tener el componente de Wiener y un componente de saltos genera parámetros distintos. Por otra parte, han sido ampliamente documentadas las dificultades que encierra la utilización de GMM: Ball y Torous (1985), por ejemplo hacen énfasis en el hecho de que el comportamiento errático de los momentos de mayor orden (en nuestro caso asimetría y curtosis) puede llevar a la estimación de parámetros inciertos con GMM.

En general, tanto los términos de riesgo como los de tendencia son menores respecto al ejercicio anterior en el que se ignoran los saltos, pero una vez que se adiciona el componente del riesgo sistémico los momentos se aproximan a lo reportado en las estadísticas descriptivas de la sección 4. Los signos de las medias mantienen los signos esperados: las acciones de Estados Unidos y de Gran Bretaña exhiben rendimientos medios positivos (0.045 y 0.048, respectivamente), mientras que los rendimientos accionarios de Japón, acorde con lo expuesto anteriormente presentan pérdidas (-0.037). Las divisas mantienen rendimientos medios negativos (-0.21 el yen japonés y -0.18 la libra esterlina).

Especial tratamiento analítico se le debe de dar a los términos de volatilidad: podría sorprender el hecho de que se haya estimado una varianza negativa para las acciones norteamericanas y más aún tomando en cuenta que no hay un término de salto que lo compense para tomar valores positivos. Nuevamente estamos en presencia de una de las limitaciones de los estimadores obtenidos vía GMM; recordemos que en esencia, el método generalizado de momentos minimiza el término cuadrático de la media de los errores muestrales (multiplicado por la matriz de densidad \hat{S}), de modo que en la práctica tal minimización (sin restricciones, como es nuestro caso) no garantiza que los parámetros encontrados se comporten de acuerdo a las especificaciones teóricas.²⁹

Las varianzas estimadas para las divisas cambian respecto a las muestrales, para el yen la varianza pasa de 0.14 (sin saltos) a 0.2097 (con saltos), mientras que para la libra esterlina disminuye (de 0.11 a 0.5). En lo que respecta a las covarianzas entre acciones y divisas estas aumentan considerablemente en términos absolutos, cabe resaltar que para el caso entre yenes y acciones tanto de Gran Bretaña como para las propias acciones japonesas la covarianza es negativa. La covarianza entre las dos divisas foráneas de nuestro ejercicio se mantiene relativamente constante (0.107).

²⁹ Beckers (1981), Campbell et al (1997) y Honore (1998) hacen referencia a este tipo de dificultades, argumentando que no es sencillo establecer una conexión clara entre los estimadores y los valores muestrales, debido a que el uso sin restricciones de GMM frecuentemente lleva a la obtención de estimadores imprecisos y débiles, como por ejemplo la estimación de varianzas negativas y probabilidades de ocurrencia para procesos Poisson (λ) fuera del intervalo 0 – 1. Buscar condiciones que aseguren estimaciones positivas definidas de las matrices de covarianzas va más allá del objetivo de este artículo, sin embargo no deja de ser un problema que merezca atención.

Finalmente, en el panel C de la tabla 5 se presentan los parámetros del componente de los saltos, como se puede observar, la significancia estadística para éstos estimadores en general es bastante débil, debido no sólo a las limitaciones de GMM sino también a la dificultad que implica la identificación de los elementos discretos. A pesar de ello no dejan de ser relevantes para nuestro análisis; el término $\hat{\lambda}$, que como ya se señaló, indica la probabilidad de ocurrencia de los saltos un periodo determinado de tiempo es de 0.0634, lo que implica que dada la temporalidad semanal de nuestras observaciones, en alrededor de una de cada diecisiete semanas se espera la ocurrencia de saltos.

A simple vista, por la idea errónea de relacionar riesgo sistémico con crisis económicas de gran magnitud podría parecer una estimación un tanto elevada pero recordemos que un salto es definido como cualquier evento que modifica de forma generalizada los precios de las divisas, lo cual puede ser desde vicisitudes políticas propias de una región hasta desastres naturales; además, no debemos perder de vista que la magnitud del salto es aleatoria.

El valor medio de la magnitud de los saltos es negativo y de gran magnitud (alrededor de -1.63 para ambas divisas), lo cual es acorde a lo esperado, ya que aunque si bien hay eventos que favorecen los rendimientos de las divisas, la gran mayoría llevan a la baja los precios de éstas. Asimismo, tales magnitudes corresponden con los altos niveles de curtosis y asimetría explicados en la sección 4.

En cuanto a la volatilidad de los saltos, estas también se comportan respecto a lo esperado (0.83 y 1.21 respectivamente para cada una de las divisas) y acorde al incremento observado en las varianzas y covarianzas de los componentes del proceso de difusión. Del mismo modo, la covarianza es positiva y relativamente grande, muestra del co-movimiento generado por el riesgo sistémico. Estos resultados, a pesar de la débil significancia estadística respaldan la confiabilidad de nuestros estimadores.

Cabe señalar además, que el parámetro de probabilidad de ocurrencia de los saltos es muy similar al encontrado en Torres (2007) en el que $\hat{\lambda} = 0.06$, aunque no debe perderse de vista que la base de datos empleada en tal trabajo emplea observaciones mensuales y no semanales, por lo

que la interpretación necesariamente tendría que ser distinta. Asimismo existen discrepancias en cuanto a la magnitud media de los saltos; ya que los coeficientes hallados son de 0.25 y de -0.29 para Japón y Gran Bretaña respectivamente, los cuales son sustancialmente menores (en términos absolutos) respecto a lo que nosotros encontramos.

Las diferencias en cuanto a los valores medios se explican por la periodicidad y tamaño de la muestra, ya que al tratarse de observaciones mensuales (las del artículo con que se está comparando) los valores absolutos se ven aminorados; a pesar de ello no dejan de ser mayores nuestros parámetros encontrados.

5.2 Elección del portafolio óptimo.

A pesar de haber obtenido los parámetros de nuestro modelo, la solución del sistema de ecuaciones 2.3, como ya se mencionó no es trivial dada la distribución normal multivariada del término del salto; para obtener una aproximación de la solución numérica se hace uso del método de Stroud (1971).

En la tabla 6 se presenta la solución cerrada de las conformaciones óptimas de los portafolios de inversión internacionales desde el punto de vista de la demanda miope, es decir, ignorando el término de los saltos y permitiendo variaciones en el valor del coeficiente de aversión al riesgo (γ); por su parte en la tabla 7 de igual modo se presenta la elección óptima del portafolio pero tomando en cuenta el componente sistémico del riesgo.

Siguiendo la notación de la sección 2, el portafolio se conforma de la proporción de la riqueza invertida en acciones domésticas (e_n), y foráneas (e_1 y e_2 respectivamente), así como la fracción invertida en posiciones especulativas en las divisas extranjeras (y_1, y_2); el subíndice 1 denota activo japonés y el subíndice 2 denota activos de Gran Bretaña. En todos los casos asumimos que no hay restricción para la posesión de activos.

Además, en la última columna de de la tabla 7 se reporta también el costo económico por ignorar la presencia del riesgo sistémico (\bar{W}), que se interpreta como la compensación monetaria requerida por el inversionista por tomar como elección óptima la correspondiente al proceso de difusión sin saltos.

El primer aspecto que salta a la vista una vez que se examina el portafolio óptimo es el hecho de que se mantienen posiciones largas en todos los activos, incluso en aquellos en los que se obtuvieron rendimientos medios negativos; en específico nos referimos al caso de los activos japoneses, cuya media estimada fue de -0.04 y -0.02 para acciones y divisas respectivamente, por lo que el lector podría preguntarse cuál es la razón que hace que el portafolio óptimo no asigne posiciones cortas a éstos activos.

Tabla 6.
Elección del portafolio óptimo en ausencia de saltos.

γ	e_n (EU)	e_1 (JPN)	e_2 (GB)	y_1 (JPN)	y_2 (GB)
2	0.2620	0.1169	0.2885	0.0012	0.2367
3	0.1746	0.0779	0.1923	0.0008	0.1578
4	0.1310	0.0585	0.1442	0.0006	0.1183
5	0.1048	0.0468	0.1154	0.0005	0.0947
10	0.0524	0.0234	0.0577	0.0002	0.0473

La respuesta se encuentra en los bonos gubernamentales, para los cuales vale la pena realizar una serie de aclaraciones: por principio los parámetros no fueron estimados por GMM dado que los asumimos como los activos con tasa libre de riesgo. Pero la ecuación 2.3 requiere del uso de éstas variables (r_n, \tilde{r}^n). Entonces, para hallar la solución del portafolio óptimo, los valores empleados como las tasas de los bonos gubernamentales fueron las medias, pero no aquellas reportadas en la sección 4 de estadísticas descriptivas, ya que corresponden al promedio simple de las tasas publicadas semanalmente por los respectivos bancos centrales, y que además obviamente son positivas. Con el fin de homogeneizar la métrica en todas las variables se utilizan las medias de los rendimientos mensuales anualizados, las cuales en cambio resultan para los tres países en cuestión negativas, lo cual adquiere bastante lógica al considerar la tendencia a la baja experimentada por estos activos en nuestro periodo de análisis.

De este modo, las medias para los bonos gubernamentales se ubican entre -0.13 y -0.17, valores que implican rendimientos mucho menores que los mostrados por el yen y las acciones japonesas (ver figura 2 en la sección 4). Por tanto, las posiciones cortas de nuestro portafolio óptimo se encuentran precisamente en los bonos gubernamentales, empujando al resto de los activos hacia posiciones largas.

A pesar de ello, podemos apreciar que las posiciones más conservadoras se encuentran precisamente en los activos japoneses, en cambio para acciones de Estados Unidos y de Gran Bretaña, así como para la libra esterlina, se observan posiciones largas mucho más agresivas.

Por otra parte, también es claro el hecho de que a medida que se permite que el coeficiente de aversión al riesgo sea mayor, las posiciones largas se vuelven mucho más moderadas (incluso prácticamente neutrales para el caso de la posición especulativa en yenes), de modo que nuestro inversionista opta por asignar una mayor proporción de su riqueza a activos con tasas libres de riesgo (en posiciones cortas, claro está) a pesar de los rendimientos cercanos a cero.

A diferencia de lo descrito anteriormente, cuando se considera el riesgo sistémico en la asignación óptima de riqueza, la composición de nuestro portafolio cambia drásticamente, tal y como se puede corroborar en la tabla 7.

Tabla 7.
Elección del portafolio óptimo en considerando los saltos.

γ	e_n (EU)	e_1 (JPN)	e_2 (GB)	y_1 (JPN)	y_2 (GB)	\bar{W}
2	0.0069	-0.0242	0.1072	-0.0066	-0.0275	0.0016
3	0.0049	-0.0182	0.0777	-0.0046	-0.0205	0.0153
4	0.0038	-0.0145	0.0610	-0.0035	-0.0163	0.0454
5	0.0031	-0.0121	0.0503	-0.0029	-0.0135	0.0862

Por principio de cuentas, resulta evidente que una vez nuestro inversionista es consciente de los alcances del riesgo sistémico, la estrategia de inversión implementada encierra una mayor precaución; de hecho la única posición relativamente agresiva es sobre las acciones de Gran Bretaña, aunque conforme se incrementa el coeficiente de aversión al riesgo la precaución en la asignación de la riqueza se generaliza.

A pesar de los rendimientos medios negativos de los bonos gubernamentales, por la magnitud ampliamente negativa de los saltos, ahora las estrategias especulativas tanto para yenes como para libras esterlinas toman posiciones cortas. Lo anterior no es de sorprender por las medias negativas obtenidas, tanto en cada uno de los procesos de difusión (con y sin saltos), como en las observaciones muestrales. Aunado a lo anterior, las varianzas relativamente pequeñas confirman que la demanda miope prevalece sobre estos activos.

Las acciones norteamericanas y de Gran Bretaña mantienen las posiciones largas, lo cual también se mantiene conforme a lo esperado, debido tanto a los retornos medios positivos como a su volatilidad moderada una vez que se consideran los saltos. Otro factor determinante para la posición larga es la amplia correlación positiva entre estos activos.

Es interesante comentar la estrategia de inversión sobre los productos de Gran Bretaña: por un lado se asume una posición larga en acciones, que combinado con una posición corta en divisas, genera un mecanismo automático de protección ante las variaciones en los tipos de cambio. Una estrategia similar se aprecia en la tenencia de yenes japoneses, ya que la correlación negativa entre éstos y las acciones en Gran Bretaña explica las posiciones mantenidas en cada uno de estos dos activos. Todo esto resulta relevante (no sólo a nivel empírico) por el hecho de que el modelo desarrollado en la sección 2 respalda las estrategias asumidas en la elección del portafolio óptimo.

Por otra parte, aún a pesar de que se asume que los saltos únicamente tienen consecuencias sobre las divisas y no sobre las acciones, la significancia económica por ignorar el riesgo sistémico para nada es pequeña. Por ejemplo, para una aversión al riesgo moderada ($\gamma=2$), la compensación requerida por el inversionista (en términos proporcionales al nivel de riqueza inicial) por el hecho de asumir como portafolio óptimo aquel obtenido a través del proceso de difusión puro (sin saltos), es de alrededor de dieciséis puntos base, la cual no es sumamente significativo considerando sobre todo la magnitud de las inversiones que tienen lugar en los mercados de capitales.

Del mismo modo, para inversionistas más adversos al riesgo, el costo por una asignación no óptima de la riqueza es todavía más grande, fluctuando entre 0.01 y 0.09. La cifra anterior podría sonar desmedida pero no debe perderse de vista que se trata de un coeficiente de aversión al riesgo de cinco.

Estos valores son mayores a lo hallado en Torres (2007), la que la significancia económica que el encuentra se ubica ente 1 y 4 puntos base, lo que nos permitiría concluir que a través de la utilización de observaciones de mayor periodicidad, no sólo resulta más sencillo identificar los saltos sino que además la estimación del costo económico es mayor.

Queda claro entonces que la relevancia de la inclusión de los saltos como componentes de riesgo no se limita al plano analítico, ya que tiene consecuencias sobre las estimaciones de los momentos de los rendimientos, sobre la selección del portafolio óptimo, y más importante aún, sobre los beneficios de los inversionistas.

6. Pruebas de robustez.

En este apartado se pone a prueba la veracidad de la estimación de los parámetros de nuestro modelo.³⁰ Se sigue exactamente la misma metodología a través del método generalizado de momentos, pero permitiendo variaciones en la temporalidad y periodicidad de nuestra muestra.

El objetivo de estas pruebas es examinar el comportamiento de nuestras estimaciones para periodos caracterizados ya sea por épocas de crisis económicas o de relativa estabilidad financiera. Se analiza el periodo correspondiente a 1990-2007, de modo que se excluye a la crisis de 2007 cuyos alcances y repercusiones han sido ampliamente documentados. Posteriormente se excluye de la muestra al periodo de 1990-1994, que más bien se distingue por relativa estabilidad

³⁰ No se reportan los resultados concernientes a la elección del portafolio óptimo debido a que para su construcción sería necesario aplicar ciertas restricciones al sistema de ecuaciones 2.3, de modo que nos alejaríamos del objetivo primordial del apartado que es precisamente la comparación entre los parámetros obtenidos.

en los mercados financieros. La aportación de estos ejercicios va más allá de la robustez, ya que también permite detallar más a fondo el desenvolvimiento del riesgo sistémico en distintos tipos de contextos.

Asimismo, se exploran los cambios en nuestros resultados a partir del cambio en la temporalidad de la muestra, empleando observaciones mensuales en vez de semanales.

6.1 Exclusión de las observaciones correspondientes a la crisis de 2007.

Aunque ya quedó claro que la ocurrencia de saltos discretos ligados al riesgo sistémico no tiene lugar únicamente en etapas de crisis económica, este tipo de eventos como ningún otro tienen consecuencias claras sobre las variaciones en los precios de las divisas, por ello el interés por analizar nuestros parámetros excluyendo precisamente el periodo correspondiente a la crisis económica de mayor magnitud en los últimos 80 años.

El periodo de análisis va de octubre de 1990 a marzo de 2007, con el fin de tratar de evitar en la medida de lo posible los primeros eventos o noticias de alerta relacionados con el inicio de la crisis hipotecaria³¹. La muestra se compone de un total de 861 observaciones, de modo que dada la fórmula propuesta por Andrews (discutida en la sección 3), la k óptima para la matriz \hat{S} de pesos sería de 9.5. Dada la disminución de casi 200 observaciones se decide ajustar para $k = 9$. En la tabla 8 se reportan los estimadores obtenidos.

Hay varios aspectos a resaltar: en primer lugar el drástico incremento experimentado en la tendencia de las acciones estadounidenses, la cual pasa de 0.033 a 0.111, lo que habla de los fuertes efectos de contagio sobre los activos financieros en general. En lo que respecta al resto de las tendencias prácticamente todas permanecen relativamente constantes, mientras que las medias estimadas continúan siendo positivas a excepción de Japón. Por su parte los términos de

³¹ De hecho la muestra se corta hasta marzo de 2007 debido a que el 2 de abril de 2007 se anuncia la bancarrota parcial de *New Century Financial*, lo cual, en opinión de algunos especialistas marca el comienzo del contagio hacia los mercados mundiales.

Fuente: *EE.UU.: financiera en bancarrota. BBC Mundo*. 2 de abril de 2007.

volatilidad experimentan una disminución generalizada, pero manteniéndose el patrón de mayor varianza de las acciones respecto a las divisas.

Tabla 8.
Estimadores del proceso de difusión con saltos para el
periodo 1990-2007.

	Acciones			Divisas	
	EU	JPN	GB	JPN	GB
A. Términos de tendencia.					
$\hat{\alpha}$	0.111 (0.0005)	0.186 (0.0014)	0.094 (0.0005)	0.057 (0.0242)	-0.003 (0.0074)
B. Términos de volatilidad.					
Acciones					
EU	0.049 (0.0006)	0.063 (0.0008)	0.044 (0.0008)	0.131 (0.0008)	0.207 (0.0008)
JPN		0.405 (0.0009)	0.029 (0.0014)	0.025 (0.0014)	0.111 (0.0014)
GB			0.064 (0.0006)	-0.048 (0.0007)	0.170 (0.0007)
Divisas					
JPN				-0.064 (16.4149)	-0.113 (26.4941)
GB					-0.195 (0.0137)
C. Términos de salto.					
$\hat{\lambda}$					0.053 (4.1506)
$\hat{\mu}$				-1.774 (31.8590)	-1.770 (20.3340)
\hat{f}				1.210 (1.0031)	-2.269 (46.5025)
					2.359 (1.0037)

*Los errores estándar se reportan entre paréntesis.

Pero lo realmente interesante se observa para los términos al riesgo sistémico, ya que por principio la probabilidad de ocurrencia de los saltos disminuyó considerablemente, pasando de 0.063 a 0.053, lo que representa una disminución del 14%, lo cual respalda la hipótesis planteada al inicio de éste apartado respecto a la gran fuente de contagio que representan las crisis.

La magnitud media de los saltos también experimentó un incremento en términos absolutos, pero de menor magnitud (pasó de -1.63 a -1.77), lo anterior podría parecer contra intuitivo pero lo que probablemente está sucediendo es que dada la mayor recurrencia de los saltos en las etapas de crisis, la magnitud media de los saltos tiende a suavizarse. Los términos de la varianza de los saltos no experimentaron cambios considerables.

En cuanto a la significancia estadística, al igual que para el caso del análisis de la muestra completa, prácticamente todos los estimadores correspondientes a tendencias y a la matriz de varianzas y covarianzas entre acciones, y entre acciones y divisas resultaron estadísticamente significativos; caso contrario a la matriz de varianzas entre divisas y a los términos de los saltos.

Aunque los resultados obtenidos no pueden generalizarse para cualquier periodo que comprenda crisis económicas por la magnitud de las consecuencias de la crisis de 2007, sí podemos señalar que para éste evento en específico a manera de conclusión particular, que la recurrencia de los saltos que representan el componente de riesgo sistémico es sumamente mayor.

6.2 Exclusión de las observaciones correspondientes al periodo 1990-1994.

Si tuviéramos que dividir a nuestro periodo de estudio en dos partes de acuerdo a la ocurrencia de crisis económicas, en definitiva el punto de corte sería 1995, ya que precisamente el periodo que comprende de 1995 a 2009 se caracteriza por una serie de crisis económicas en ciertas regiones pero con repercusión mundial, sólo por enumerar las más importantes, podemos señalar la crisis de México en 1994, la crisis asiática y rusa que comparten temporalidad (1996-1999), la crisis argentina y la crisis de las empresas tecnológicas, ambas entre 2000 y 2001, y finalmente la crisis hipotecaria de 2007.³²

En cambio, entre 1990 y 1995 se vivió un periodo de relativa calma financiera y próspero crecimiento económico, y aunque hubo eventos políticos de repercusión mundial como fue la caída del bloque socialista soviético, los mercados por ejemplo, reaccionaron de forma favorable.

A diferencia de lo realizado en el ejercicio anterior en donde se excluye el periodo de la crisis de 2007, para éste caso se excluyen aquellas observaciones correspondientes a un periodo de caracterizado por la no ocurrencia de crisis económicas de gran magnitud. El periodo de estudio va de noviembre de 1994 a febrero de 2011, con el fin de incluir el inicio de la crisis mexicana

³² Originalmente se planteó la posibilidad de analizar por separado cada uno de estos periodos de crisis, pero con un número de observaciones tan pequeño, la posibilidad de análisis comparativo queda muy limitado.

de 1994. La muestra se compone de un total de 851 observaciones; la k óptima para la matriz \hat{S} de pesos es de 9.4, por lo que nuevamente se ajusta para $k = 9$. En la tabla 9 se reportan los estimadores obtenidos.

Tabla 9.
Estimadores del proceso de difusión con saltos para el periodo 1994-2011.

	Acciones			Divisas	
	EU	JPN	GB	JPN	GB
A. Términos de tendencia.					
$\hat{\alpha}$	0.055 (0.0004)	0.042 (0.0010)	0.005 (0.0004)	0.086 (0.0007)	- 0.091 (0.0003)
B. Términos de volatilidad.					
Acciones					
EU	-0.009 (0.0037)	0.090 (0.0042)	0.379 (0.0042)	0.134 (0.0042)	0.346 (0.0042)
JPN		0.152 (0.0062)	0.220 (0.0073)	0.148 (0.0073)	0.362 (0.0073)
GB			-0.066 (0.0025)	-0.100 (0.0025)	0.503 (0.0025)
Divisas					
JPN				-0.104 (1.0681)	-0.137 (-1.0223)
GB					-0.367 (0.0036)
C. Términos de salto.					
$\hat{\lambda}$					0.164 (0.2458)
$\hat{\mu}$				-0.904 (5.9505)	-0.562 (2.0109)
$\hat{\Gamma}$				1.150 (1.9605)	-0.235 (0.4669)
					2.470 (1.1711)

*Los errores estándar se reportan entre paréntesis.

En primer lugar, ni las tendencias ni las medias estimadas de los rendimientos accionarios presentan cambios significativos, se mantiene el patrón de rendimientos medios positivos para Estados Unidos y Gran Bretaña (0.059 y 0.037, respectivamente), y negativos para Japón (-0.037). En cambio, sí se aprecian cambios en los rendimientos de las divisas; para el yen japonés,

la media se mantiene negativa aunque disminuye en términos absolutos ubicándose en -0.01, mientras que la media para la libra esterlina ahora es positiva aunque muy cercana a cero (0.007).

Los términos de volatilidad para el proceso de difusión puro de las acciones se comportan de manera muy similar a lo observado con la muestra completa (tabla 5), pero nuevamente los cambios se observan en las divisas, ya que la varianza se ve incrementada en términos absolutos, pasando de -0.006 a -0.104 en el caso del yen japonés, y de -0.21 a -0.367 para la libra esterlina, lo cual se explica por la alta volatilidad generada por el proceso de depresiones económicas sufrido en determinados países en éste periodo en particular.

En cuanto a la significancia estadística se refiere, podemos observar que la mayoría de nuestros estimadores del proceso de difusión puro son estadísticamente significativos (a excepción de la varianza de las acciones estadounidenses, así como la varianza y covarianza (respecto a la libra esterlina) de los yenes japoneses. En cambio, para los componentes de los saltos, nuevamente ninguno de nuestros estimadores resultó estadísticamente significativo.

Por su parte, los estimadores del proceso de difusión de saltos exhiben ciertos cambios particularmente relevantes: la tasa de ocurrencia de los saltos aumenta, pasando de 0.062 a 0.164, y a pesar de que se esperaba un incremento, la variación es realmente considerable, lo cual nos indica que es precisamente el periodo 1990-1994, el que reduce la probabilidad de ocurrencia de eventos relacionados con el riesgo sistémico, o desde otra perspectiva, que el riesgo de contagio se ha disparado durante los últimos quince años.

La volatilidad del componente sistémico prácticamente no cambia para las libras esterlinas, y para los yenes aumenta ligeramente (de 0.836 a 1.15).

Del mismo modo, acorde con lo observado en la sección 6.1, el incremento en $\hat{\lambda}$, significa una mayor recurrencia de los saltos, por lo que la magnitud media de los saltos debería de reducirse. Esto efectivamente ocurre, pasando de -1.63 en ambas divisas, a -0.904 para el caso del yen, y -0.562 para la libra esterlina.

Entonces, el incremento en la probabilidad de ocurrencia de los saltos, así como el aumento en los términos de varianza (con o sin saltos), en presencia de periodos caracterizados por la presencia de crisis económicas recurrentes, respalda la veracidad de nuestros estimadores.

6.3 El modelo utilizando observaciones mensuales.

Recordemos que para el proceso de difusión pura, para caracterizar la dinámica de los precios de acciones y divisas que hemos seguido, el supuesto de continuidad es fundamental, ya que la solución continua constituye una aproximación razonable para la solución discreta, siempre y cuando el periodo de tiempo en consideración sea lo suficientemente pequeño respecto al tamaño de la muestra; por ello la relevancia de comparar los estimadores con intervalos de periodicidad mayor para nuestras observaciones.

Para construir la muestra a nivel mensual, se toma la observación correspondiente a la última semana de cada mes. Nuestra muestra se ve reducida a únicamente 241 observaciones, lo cual exige cierta mesura para interpretar los resultados; la k óptima para la matriz \hat{S} de pesos es de 6.22, por lo que se ajusta para $k = 6$. Por otra parte, es posible que nuestros estimadores pierdan eficiencia, pero no es el único aspecto que nos preocupa, ya que además el comportamiento de las estimaciones para los parámetros del componente de los saltos puede cambiar drásticamente.

Lo que sucede es que precisamente dado que las observaciones se encuentran más espaciadas entre sí, resulta más complicado identificar a lo largo de la distribución aquellos componentes discretos del riesgo sistémico, por lo que en principio esperaríamos una caída en la probabilidad de ocurrencia de los saltos. En la tabla 10 se presentan los parámetros estimados.

Lo primero que podría parecer extraño son los signos de las tendencias de las acciones, ya que Estados Unidos y Gran Bretaña exhiben tendencias determinísticas negativas (-0.052 y -0.089, respectivamente), mientras que para Japón es positiva (0.142), lo cual iría en sentido opuesto a las medias presentadas en las estadísticas descriptivas, y a los parámetros del modelo original, pero nuevamente, considerando el término de la desigualdad de Jensen las medias se ajustan

conforme a lo desarrollado (0.069 para Estados Unidos, -0.045 para Japón y 0.051 para Gran Bretaña).

Tabla 10.
Estimadores del proceso de difusión con saltos
para observaciones mensuales

	Acciones			Divisas	
	EU	JPN	GB	JPN	GB
A. Términos de tendencia.					
$\hat{\alpha}$	-0.052 (0.0005)	0.142 (0.0010)	-0.089 (0.0006)	0.019 (0.0010)	0.087 (-0.0013)
B. Términos de volatilidad.					
Acciones					
EU	-0.244 (0.0024)	0.251 (0.0026)	0.183 (0.0026)	0.165 (0.0026)	0.367 (0.0026)
JPN		0.373 (0.0043)	0.096 (0.0053)	0.095 (0.0053)	0.246 (0.0053)
GB			-0.282 (0.0011)	0.107 (0.0012)	0.419 (0.0012)
Divisas					
JPN				0.104 (19.7348)	0.072 (19.5761)
GB					0.233 (0.0002)
C. Términos de salto.					
$\hat{\lambda}$					0.007 (0.3507)
$\hat{\mu}$				1.769 (83.3890)	2.612 (32.5167)
$\hat{\Gamma}$				-15.510 (66.3500)	-1.018 (17.1198)
					-23.005 (53.4286)

*Los errores estándar se reportan entre paréntesis.

En cuanto a los términos de volatilidad se refiere, al igual que para nuestro modelo original (tabla 5) nos enfrentamos a varianzas estimadas negativas, en este caso las observamos para las acciones estadounidenses y británicas, lo cual como ya se explicó, está relacionado con el proceso de minimización al implementar GMM en ausencia de restricciones.

En general, los términos de varianzas son similares a los del modelo original, pero las covarianzas si experimentan algunos cambios considerables, e incluso cambian de signo. Por

ejemplo, originalmente el yen japonés presentaba covarianza negativa tanto con las acciones japonesas y británicas, como con la libra esterlina, pero una vez que se consideran observaciones mensuales, estas covarianzas son positivas. Esto puede ser atribuido al hecho de que únicamente se está considerando una observación por mes para las tasas cambiarias, ignorando por completo sus variaciones a lo largo de todo este periodo de tiempo, de modo que se pierde en cuanto a la precisión de las covarianzas.

Finalmente, los términos de los saltos se comportan conforme a lo esperado: en primer lugar, la probabilidad de ocurrencia de los saltos se vio disminuida, pasó de 0.06 a 0.007, lo cual implica que tal y como se anticipó, entre mayor sea la periodicidad de las observaciones, más difícil resulta diferenciar entre movimientos discretos y movimientos continuos, y por tanto el reconocer las variaciones provocadas por el riesgo sistémico encierra una mayor dificultad.

Asimismo, y ligado a lo anterior, la varianza de los términos sistémicos incrementó de forma considerable, lo cual también es bastante lógico, ya que ante la complejidad para identificar los saltos, el término de riesgo en cuestión se dispara.

En cuanto a la magnitud media de los saltos, podemos apreciar que los coeficientes ahora son positivos, hecho que se contrapone a lo expuesto a lo largo de éste capítulo, pero que se explica por el reducido número de observaciones. Finalmente, también acorde a lo esperado, los parámetros de los saltos son estadísticamente no significativos.

En síntesis, a pesar de la cautela que debe tomarse con los estimadores obtenidos a partir de observaciones mensuales, adquiere relevancia la disminución en la tasa de ocurrencia de los saltos, así como la relativa homogeneidad observada en los parámetros del proceso de difusión pura.

7. Conclusiones.

En la selección de portafolios de inversión conformados por activos internacionales es necesario tomar en cuenta los riesgos relacionados con la variación en los tipos de cambio y con la ocurrencia de eventos idiosincráticos que afectan de forma generalizada los rendimientos de los activos; a lo largo de nuestro análisis hemos demostrado que en aquellos modelos que van más allá de la consideración de la media y la varianza de los rendimientos de los activos, existe un riesgo de contagio latente generando efectos complejos sobre la tenencia de divisas con fines de protección ante el riesgo.

A través de nuestro ejercicio empírico encontramos que las consecuencias del riesgo sistémico sobre la elección de portafolio no son nada desdeñables, afectando directamente los términos de tendencia y de riesgo no sólo de las divisas sino también de las acciones. En general, nuestro componente sistémico tiende a afectar negativamente y en una magnitud considerable a los rendimientos de las divisas.

Asimismo y conforme a lo esperado, los rendimientos de los activos, y en específico los términos de salto exhiben comportamientos distintos en presencia o ausencia de crisis económicas: aislando periodos caracterizados por aguadas depresiones económicas, la probabilidad de ocurrencia de estos eventos idiosincráticos tiende a disminuir, provocando además una mayor volatilidad sobre los rendimientos (se observa lo contrario si se dejan de lado periodos con relativa estabilidad económica).

Finalmente, la significancia económica, medida por la compensación monetaria requerida por el inversionista por una asignación no óptima de su riqueza (ignorando el riesgo sistémico), no es pequeña, fluctuando alrededor del 1.5%, dependiendo de la magnitud del coeficiente de aversión al riesgo.

Realizando comparaciones respecto a lo realizado por Torres (2007), la magnitud media de los saltos es mayor en términos absolutos. El costo económico por no considerar el riesgo sistémico en la elección óptima de portafolios también es mayor.

Diversas consideraciones teóricas fueron excluidas de nuestro análisis, pero se mantiene la expectativa de poder explorarlas en futuras investigaciones. Por principio, por conveniencia analítica únicamente se considera el impacto del riesgo sistémico sobre los precios de las divisas, pero sería relevante incluir dentro del análisis los efectos sobre el precio de las acciones.

Del mismo modo, buscando una mayor tratabilidad en el análisis no se tomaron en cuenta los factores determinantes de los tipos de cambio, como es el riesgo por variaciones en el consumo y el riesgo inflacionario; tampoco se consideraron ciertas características de la elección de portafolios internacionales que podrían ser muy importantes, como son los costos de transacción, las diferencias en información a lo largo de países y las discrepancias estructurales de los mismos en cuanto a capital humano se refiere.

En relación a lo anterior, vale la pena mencionar dos artículos que merecen la atención para próximas investigaciones, ya que ponen énfasis en el crecimiento del riesgo por consumo como determinante de la relación entre tasas de interés y tipo de cambio: Lustig y Verdelhan (2007) y Lustig, Verdelhan y Roussanov (2010).

Finalmente, del lado empírico, queda pendiente la inclusión de más países en nuestra muestra, sobre todo aquellas naciones en desarrollo cuyos mercados de capitales han crecido rápidamente, generando además estrechos lazos de intercambio con las economías desarrolladas, por lo cual hay un amplio campo para el estudio del riesgo de contagio. Además, en cuanto a la obtención del portafolio óptimo de inversión, sería relevante experimentar con otro tipo de aproximaciones, como por ejemplo cuadratura numérica, con el fin de poder comparar las discrepancias generadas en la composición del portafolio de inversión, por la utilización de metodologías distintas (en caso de que las hubiera).

Referencias.

1. Aït-Sahalia, Y., Cacho-Diaz, J., & Hurd, T. R. (2009). Portfolio choice with jumps: A closed-form solution. *Annals of Applied Probability*, 19(2), 556-584.
2. Aït-Sahalia, Y. (2004). Disentangling diffusion from jumps. *Journal of Financial Economics*, 74(3), 487-528.
3. Andrews, D. W. K. (1991). Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation. *Econometrica*, 59(3), 817-858.
4. Artin, M. (1991), *Algebra*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
5. Ball, C., & W. Torous (1983). A Simplified Jump Process for Common Stock Returns," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, 53-65.
6. Ball, C., & W. Torous (1985). On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing. *Journal of Finance*, 40, 155-173.
7. Barro, R. J., & Ursúa, J. F. (2008). Consumption disasters in the twentieth century. *The American Economic Review*, 98(2), 58-63.
8. Bates, D. S. (1996). Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *Review of Financial Studies*, 9(1), 69-107.
9. Beckers, S. (1981). A note on estimating the parameters of the diffusion-jump model of stock returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 16(1), 127-140.
10. Black, F. (1990). Equilibrium Exchange Rate Hedging. *Journal of Finance*, 45, 899-907.
11. Campbell, J. Y. (2000). Asset pricing at the millennium. *Journal of Finance*, 55(4), 1515-1567.
12. Campbell, J. Y., Lo, A. W., & MacKinlay, A. C. (1997). *The econometrics of financial markets* Princeton: Princeton University Press.
13. Campbell, J., K. Serfaty-de-Medeiros, and L. Viceira (2010). Global currency hedging. *Journal of Finance*, 65(1), 87-121.
14. Chen, S., Tsai M., & Yang P. Y., (2010). Measurement model of risk compensation: Evidences from Asia emerging market. *Asia Pacific Management Review*, Vol.15(1), 79-96.
15. Chinn, M. Ito, H., (2007). A New Measure of Financial Openness. University of Wisconsin y Portland State University (no publicado).

16. Cochrane, J. H. (2005). *Asset pricing* (Rev. Ed.). Princeton, N.J: Princeton University.
17. Cooper, R. N., Tarullo, D. K., & Williamson, J. (1999). Should capital controls be banished? *Brookings Papers on Economic Activity*, 1999(1), 89-141.
18. Das, S. R., & Uppal, R. (2004). Systemic risk and international portfolio choice. *Journal of Finance*, 59(6), 2809-2834.
19. French, K. & Poterba, J. (1991). Investor Diversification and International Equity Markets. *American Economic Review*, 81(2), 222-226
20. Friend, I., Westerfield, R. (1980). Co-skewness and capital asset pricing. *Journal of Finance*, 35(4), pp. 897-913.
21. Froot, K., and R. Thaler (1990). Foreign Exchange. *Journal of Economic Perspectives*, 4, 179-192.
22. Grosche C. (1996). *Path integrals, hyperbolic spaces, and Selberg trace formulae*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
23. Harvey, C. (1991). The World Price of Covariance Risk. *Journal of Finance*, 46, 111-157.
24. Honore, P. (1998). Pitfalls in Estimating Jump-Diffusion Models. Aarhus School of Business (no publicado).
25. Jeffrey, A. (1995). *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*. San Diego: Academic Press.
26. Jorion, P. (1985). International Portfolio Diversification with Estimation Risk. *Journal of Business*, 58(3), 259-278.
27. Jorion, P. (1988). On jump processes in the foreign exchange and stock markets. *Review of Financial Studies*, 1(4), 427-445.
28. Kim, T. S., & Omberg, E. (1996). Dynamic nonmyopic portfolio behavior. *Review of Financial Studies*, 9(1), 141.
29. Lintner, J. (1965.) The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*. 47(1), 13–37.
30. Lustig, H., Roussanov N., & Verdelhan A. (2010). Common risk factors in currency markets. Working Paper UCLA.
31. Lustig, H., & Verdelhan, A. (2007). The cross section of foreign currency risk premia and consumption growth risk. *American Economic Review*, 97(1), 89-117.

32. Martínez-Jaramillo, S., Pérez, O. P., Embriz, F. A., & Dey, F. L. G. (2010). Systemic risk, financial contagion and financial fragility. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 34(11), 2358-2374.
33. Meese, R. A., & Rogoff, K. (1983). Empirical exchange rate models of the seventies : Do they fit out of sample? *Journal of International Economics*, 14(1-2), 3-24.
34. Melino, A. (1994). *Estimation of continuous-time stochastic processes in finance, in advances in econometrics, sixth world congress, Vol. II* (editado por C. Sims). Cambridge University Press.
35. Merton, R. (1971). Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413.
36. Merton, R. (1973). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, 41, 867-887.
37. Merton, R. (1992). *Continuous-Time Finance*. Oxford, U.K.: Basil Blackwell.
38. Obstfeld, M. (1994). Risk-Taking, Global Diversification, and Growth. *American Economic Review*, 84(5), 1310,1329.
39. Press, S. (1967). A Compound Events Model of Security Prices. *Journal of Business*, 40, 317-335.
40. Quinn, D. (1997). The correlates of change in international financial regulation. *American Political Science Review*, 91(3), 531-551.
41. Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*. 19(3), 425-42.
42. Solnik, B. H. (1974). The international pricing of risk: An empirical investigation of the world capital market structure. *Journal of Finance*, 29(2), 365-378.
43. Stroud, A. (1971). *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
44. Torres, M. (2007). International portfolio choice, exchange rate and systemic risks. *Harvard University (no publicado)*.
45. Yogo, M. (2006). A Consumption-Based Explanation of Expected Stock Returns. *Journal of Finance*, 61, 539-580.

Apéndice.

En ésta sección se desarrollan a detalle algunos de los procedimientos técnicos utilizados a lo largo de las secciones principales de nuestro análisis.³³

A. Ecuaciones diferenciales parciales estocásticas.

Una ecuación diferencial estocástica puede ser empleada para definir una función determinística de espacio y tiempo, considerando el valor esperado de algún pago como la condición inicial de posición y tiempo. De esta forma es posible determinar un proceso de difusión, apoyándose en la ecuación de Kolmogorov hacia atrás y en el Lema de Ito. El panorama general lo describimos a continuación.

Supongamos que la dinámica de nuestra variable de estado x , es el proceso:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz + JdQ$$

Donde:

α es la tendencia determinística.

dt es el intervalo de tiempo.

z son movimientos brownianos.

J son las magnitudes del salto, las cuales se asumen como variables aleatorias idéntica e independientemente distribuidas.

dQ es el salto, es un proceso Poisson con tasa λ , ya que estamos asumiendo que el proceso tiene saltos, que llevan a x a $x + J$. Los saltos son independientes unos de otros.

La probabilidad de que ocurra un salto en un determinado periodo de tiempo es λdt , pero la probabilidad de dos o más saltos se rechaza.

³³ Este apartado se basa en las consideraciones metodológicas desarrolladas en Torres (2007).

Si $u(y, t) \equiv E_{x_t=y}[U(x_T)]$, para alguna función U , entonces el proceso es descrito por una ecuación de Kolmogorov hacia atrás:

$$0 = u + \mathcal{L}u \quad \text{para } t < T, \quad \text{con } u(y, T) = U(y)$$

\mathcal{L} , el generador infinitesimal del proceso de difusión con saltos (es la tasa de cambio o velocidad del salto del proceso de un estado a otro) se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}u = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \lambda E[u(y + J, t) - u(y, t)]$$

Partiendo del proceso de difusión, en la siguiente sección se desarrolla el modelo intertemporal del mercado de capitales.

B. Modelo intertemporal de valuación de activos basado en capitales (ICAPM)

Se asume un inversionista cuyo objetivo consiste en maximizar el valor esperado del pago $\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ al final de un determinado periodo de tiempo, su riqueza financiera (W) puede ser asignada en un activo libre de riesgo (denotado por 0) y en n activos riesgosos. $\vec{\omega}$ representa el vector de pesos para los activos riesgosos, de modo que la parte invertida en el activo 0 es $1 - \sum_{i=1}^n \omega_i$

La dinámica de los precios de los activos (P_i) está descrita por:

$$dP_0 = rP_0 dt, \quad \text{y}$$

$$dP_i = P_i \alpha_i dt + P_i \sigma_i dz_i + P_i J_i dQ, \quad i = 1, \dots, N$$

Donde nuevamente reconocemos a z_i como movimientos brownianos con matriz de correlación $[\rho_{ij}]$ (siguiendo con esta notación, Σ denota la matriz de covarianzas $[\sigma_{ij}] = [\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}]$). Para dar cabida a los cambios sistémicos discontinuos en los retornos, asumimos que los procesos subyacentes de precios tienen un salto común, dQ , que lleva a P_i a $P_i(1 + J_i)$. Las magnitudes del salto, J_i , se asumen como variables aleatorias idéntica e independientemente distribuidas.

Podemos ahora definir la ecuación de acumulación de la riqueza:

$$\frac{dW}{W} = \left(1 - \sum_{i=1}^n \omega_i\right) \frac{dP_0}{P_0} + \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{dP_i}{P_i} = [r + \bar{\omega}'(\bar{\alpha} - r)]dt + \sum_{i=1}^n \omega_i \sigma_i dz_i + \bar{\omega}' \vec{j} dQ$$

Siguiendo lo descrito en la sección anterior, si $u(W, t)$ denota $E_{W_t} = W \left[\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]$, entonces la función de utilidad es descrita por una ecuación de Kolmogorov hacia atrás. Además, si u representa la solución al problema del inversionista, las condiciones de optimalidad necesarias en cada punto en el tiempo son las siguientes:

$$0 = \max_{\bar{\omega}} u + \mathcal{L}u \quad \text{para } t < T, \quad \text{con } u(W, t) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

Utilizando como conjetura la siguiente forma funcional $A(t) \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, y además con:

$$u'_W = AW^{-\gamma}, \quad u''_W = -\gamma AW^{-\gamma-1}$$

Obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$0 = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} A_t + [r + \bar{\omega}'(\bar{\alpha} - r)]W(AW^{-\gamma}) + \frac{1}{2} W^2 \bar{\omega}' \Sigma \bar{\omega} (-\gamma AW^{-\gamma-1}) \\ + \lambda E \left[A \frac{[W(1 + \bar{\omega}' \vec{j})]^{1-\gamma}}{1-\gamma} - A \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]$$

Simplificando obtenemos una ecuación que es independiente de la riqueza:

$$0 = A_t + A[r + \bar{\omega}'(\bar{\alpha} - r)](1 - \gamma) - \frac{1}{2} A \gamma \bar{\omega}' \Sigma \bar{\omega} (1 - \gamma) + A \lambda E \left[(1 + \bar{\omega}' \vec{j})^{1-\gamma} - 1 \right]$$

Ordenando:

$$0 = \frac{A_t}{A} + (1 - \gamma)[r + \bar{\omega}'(\bar{\alpha} - r)] - \frac{1}{2} \gamma \bar{\omega}' \Sigma \bar{\omega} + \lambda E \left[(1 + \bar{\omega}' \vec{j})^{1-\gamma} - 1 \right]$$

Donde $(1 - \gamma)[r + \bar{\omega}'(\bar{\alpha} - r)] - \frac{1}{2} \gamma \bar{\omega}' \Sigma \bar{\omega} + \lambda E \left[(1 + \bar{\omega}' \vec{j})^{1-\gamma} - 1 \right] = \omega$

$$\Rightarrow 0 = \frac{A_t}{A} + \omega \quad (*)$$

De ésta forma, fácilmente podemos identificar a A: integrando $\frac{A_t}{A} = -\omega$, se obtiene:

$$A(t) = A(0)e^{-\omega t}$$

Entonces la función de valor es $u(W, t) = e^{\omega(T-t)} \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$

Diferenciando (*) respecto a $\vec{\omega}$, la elección del portafolio óptimo está dado por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = (\vec{\alpha} - r) - \gamma \Sigma \vec{\omega} + \lambda E \left[(1 + \vec{\omega}' \vec{J})^{-\gamma} \vec{J} \right]$$

C. Calibración de un proceso de difusión con saltos a través de transformadas de Fourier.

Tal y como se menciona en reiteradas ocasiones a lo largo del texto principal, utilizamos transformadas de Fourier para obtener las funciones características de los retornos de los procesos, posteriormente, a través de su diferenciación se identifican los momentos no condicionales de los retornos.

- Transformadas de Fourier.

Por principio, se enumeran las propiedades de la transformada de Fourier que emplearemos:

1) Dada una función $f(x)$, su transformada de Fourier \hat{f} es definida por:

$$\hat{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{ikx}$$

2) La transformada de Fourier es invertible:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) e^{-ikx}$$

3) La derivada de una transformada de Fourier es una multiplicación:

$$\hat{f}_x = -ik \hat{f}$$

4) La transformada de Fourier lleva la convolución a multiplicación:

$$\text{Si } h(x) = \int f(x-y)g(y)dy, \text{ entonces } \hat{h} = \hat{f}\hat{g}$$

5) La transformada de Fourier de un gaussiano es nuevamente un gaussiano.

$$\text{Si } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}, \text{ entonces } \hat{f}(k) = e^{-\frac{1}{2}(\sigma k)^2}$$

- **Distribución de un proceso de difusión con saltos.**

Dado el proceso dinámico de precios (X) con saltos de un activo genérico j está descrito por la siguiente ecuación:

$$\frac{dX_j}{X_j} = \alpha_j dt + \sigma_j dz_j + J_j dQ$$

Donde:

α_i es la tendencia determinística.

z_i es un movimiento browniano.

$$(1 + \vec{J}) \sim \text{lognormal}(\vec{\mu}, \Gamma)$$

dQ es un proceso Poisson con probabilidad de ocurrencia λ .

$$\text{var} \left[\frac{dX}{X} \right] = \Sigma$$

Tomando logaritmos ($x_j = \log X_j$), el proceso estocástico es de la forma:

$$dx_j = a_j dt + \sigma_j dz_j + j_j dQ$$

Donde:

$a_j \equiv \left(\alpha_j - \frac{1}{2} \sigma_j^2 \right)$, el segundo término representa la desigualdad de Jensen.

$$j_j = \log(1 + J_j)$$

z_i es un movimiento browniano.

$$(1 + \vec{J}) \sim \text{lognormal}(\vec{\mu}, \Gamma)$$

La probabilidad de distribución f de \vec{x} resuelve la ecuación de Kolmogorov hacia adelante (ver sección A del apéndice): $0 = f_t - \mathcal{L}^* f$, donde \mathcal{L}^* es el adjunto del generador infinitesimal del proceso de difusión con saltos:

$$\mathcal{L}^* f = \left(-\sum_m a_m \frac{\partial}{\partial x_m} + \frac{1}{2} \sum_{m,n} \sigma_{mn} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} \right) f + \lambda E[f(\vec{x} - \vec{j}, t) - f(\vec{x}, t)]$$

La esperanza en el último término es sobre la probabilidad de distribución de los saltos:

$$E[f(\vec{x} - \vec{j}, t)] = \int f(\vec{x} - \vec{j}, t) \omega(\vec{j}) d\vec{j}$$

Donde $\omega(\vec{j})$ denota la densidad de probabilidad de \vec{j} .

- **Solución.**

En las ecuaciones generales de Kolmogorov es necesario resolver numéricamente, pero en el marco de coeficientes constantes, emerge una valiosa alternativa. Si tomamos su transformada de Fourier en \vec{x} (haciendo uso de las propiedades 2 y 4), obtenemos una ecuación diferencial ordinaria, cuya solución, \hat{f} , es la función característica de la probabilidad de distribución, es decir:

$$E \left[e^{i\vec{k}\vec{x}} \right]$$

Entonces, la ecuación de Kolmogorov hacia adelante, en el dominio de Fourier se expresa:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \hat{f} - \sum_m i a_m k_m \hat{f} + \frac{1}{2} \sum_{m,n} \sigma_{mn} k_m k_n \hat{f} + \lambda(\bar{\omega} - 1) \hat{f}$$

Si reescribimos la ecuación de la forma $\frac{\partial}{\partial t} \hat{f} = K \hat{f}$, podemos resolver fácilmente la ecuación diferencial: $\hat{f} = \hat{f}_0 e^{tk}$, con $K = i\vec{a}\vec{k} - \frac{1}{2}\vec{k}\Sigma\vec{k} + \lambda(\bar{\omega} - 1)$

Entonces, podemos identificar la condición inicial: $\hat{f}_0 = E \left[e^{i\vec{k}\vec{x}_0} \right] = e^{i\vec{k}\vec{x}_0}$. Por tanto, $e^{tk} = E \left[e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}_0)} \right] = e^{i\vec{k}\Delta\vec{x}}$

Podemos reconocer de la ecuación anterior una expresión conocida, e^{tk} es la función característica para los cambios en el logaritmo de los precios sobre el periodo t , de modo que podemos diferenciar para obtener los momentos de los retornos (en logaritmos):

$\frac{\partial^s}{\partial k_n^s} e^{tk} = i^s E[\Delta x_n^s]$ representa el s -ésimo momento del logaritmo de los retornos.

Del mismo modo, es posible obtener los momentos cruzados, tomando las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial^2}{\partial k_m \partial k_n} e^{tk} = i^2 E[\Delta x_m \Delta x_n]$$

Para facilidad de notación, renombramos e^{tk} y Δx_m por ϕ y r_m , respectivamente. Además utilizamos la convención para las sumatorias, es decir, cualquier subíndice que aparece exactamente dos veces es sumado sobre todos sus posibles valores, por ejemplo $\sigma_{mj}k_m$ denota $\sum_m \sigma_{mj}k_m$. Habiendo aclarado esto, presentamos las expresiones para algunas derivadas de la función característica:

1. $\frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial k_j} \phi = t(i a_j - \sigma_{mj}k_m + \lambda \hat{\omega}_j)$
2. $\frac{1}{\phi} \frac{\partial^2}{\partial k_j \partial k_l} \phi = t^2(i a_j - \sigma_{mj}k_m + \lambda \hat{\omega}_j)(i a_l - \sigma_{ml}k_m + \lambda \hat{\omega}_l) - t(\sigma_{lj} - \lambda \hat{\omega}_{jl})$
3. $\frac{1}{\phi} \frac{\partial^3}{\partial k_j \partial k_l^2} \phi = t^3(i a_j - \sigma_{mj}k_m + \lambda \hat{\omega}_j)(i a_l - \sigma_{ml}k_m + \lambda \hat{\omega}_l)^2 - t^2(i a_j - \sigma_{mj}k_m + \lambda \hat{\omega}_j)(\sigma_{ll} - \lambda \hat{\omega}_{ll}) - [2t^2(\sigma_{lj} - \lambda \hat{\omega}_{jl})(i a_l - \sigma_{ml}k_m + \lambda \hat{\omega}_l) - t\lambda \hat{\omega}_{jll}]$

En particular:

1. $\frac{1}{\phi} \frac{\partial^3}{\partial k_j^3} \phi = t^3(i a_j - \sigma_{mj}k_m + \lambda \hat{\omega}_j)^3 - [3t^2(\sigma_{jj} - \lambda \hat{\omega}_{jj})(i a_j - \sigma_{mj}k_m + \lambda \hat{\omega}_j) - t\lambda \hat{\omega}_{jjj}]$
4. $\frac{1}{\phi} \frac{\partial^4}{\partial k_j^4} \phi = t^4(i a_j - \sigma_{mj}k_m + \lambda \hat{\omega}_j)^4 - 6t^3(\sigma_{jj} - \lambda \hat{\omega}_{jj})(i a_j - \sigma_{mj}k_m + \lambda \hat{\omega}_j)^2 + 4\lambda t^2 \hat{\omega}_{jjj}(i a_j - \sigma_{mj}k_m + \lambda \hat{\omega}_j) + [3t^2(\sigma_{jj} - \lambda \hat{\omega}_{jj})^2 + t\lambda \hat{\omega}_{jjjj}]$

Entonces, los momentos para los retornos compuestos continuamente son:

1. $im_j = t(i a_j + \lambda \hat{\omega}_j)$, donde $m_j \equiv E[r_j]$

$$2. E[r_j r_l] = m_j m_l + t(\sigma_{lj} - \lambda \hat{\omega}_{jl}),$$

Reescribiendo: $s_{jl} = t(\sigma_{lj} - \lambda \hat{\omega}_{jl})$, donde $s_{jl} \equiv E[r_j r_l] - m_j m_l$

En particular: $s_{jj} = t(\sigma_{jj} - \lambda \hat{\omega}_{jj})$

$$3. iE[r_j r_l^2] = im_j m_l^2 + im_j s_{ll} + 2is_{jl} m_l - t\lambda \hat{\omega}_{jll}$$

Dado que $E[(r_j - m_j)(r_l - m_l)^2] = E[r_j r_l^2] - 2s_{jl} m_l - m_j m_l^2 - m_j s_{ll}$,

Entonces $iE[(r_j - m_j)(r_l - m_l)^2] = -t\lambda \hat{\omega}_{jll}$

$$4. E[r_j^4] = m_j^4 + 6m_j^2 s_{jj} + 3s_{jj}^2 + 4i\lambda t \hat{\omega}_{jjj} m_j + t\lambda \hat{\omega}_{jjjj}$$

Dado que $E[(r_j - m_j)^4] = E[r_j^4] - 6m_j^2 s_{jj} - m_j^4 - 4m_j E[(r_j - m_j)^3]$,

Entonces $E[(r_j - m_j)^4] = 3s_{jj}^2 + t\lambda \hat{\omega}_{jjjj}$

Ahora, bajo el supuesto de que la magnitud de los saltos son variables aleatorias con distribución *lognormal* con media $\vec{\mu}$ y covarianza Γ , las expresiones para la transformada de Fourier de la densidad de probabilidad ω son las siguientes:

$$1. \hat{\omega}|_{\vec{k}=\vec{0}} = e^{i\vec{k}\vec{\mu} - \frac{1}{2}\vec{k}\Gamma\vec{k}}|_{\vec{k}=\vec{0}} = 1$$

$$2. \hat{\omega}_j|_{\vec{k}=\vec{0}} = (i\mu_j - \gamma_{mj} k_m) \hat{\omega}|_{\vec{k}=\vec{0}} = i\mu_j$$

$$3. \hat{\omega}_{jl}|_{\vec{k}=\vec{0}} = [(i\mu_j - \gamma_{mj} k_m)(i\mu_l - \gamma_{ml} k_m) - \gamma_{lj}] \hat{\omega}|_{\vec{k}=\vec{0}} = -(\mu_j \mu_l + \gamma_{lj})$$

$$4. \hat{\omega}_{jll}|_{\vec{k}=\vec{0}} =$$

$$\begin{aligned} & [(i\mu_j - \gamma_{mj} k_m)(i\mu_l - \gamma_{ml} k_m)^2 - 2\gamma_{lj}(i\mu_l - \gamma_{ml} k_m) - (i\mu_j - \gamma_{mj} k_m)\gamma_{ll}] \hat{\omega}|_{\vec{k}=\vec{0}} = \\ & = -i[2\mu_l \gamma_{lj} + \mu_j(\mu_l^2 + \gamma_{ll})] \end{aligned}$$

En particular: $\hat{\omega}_{jjj}|_{\vec{k}=\vec{0}} = -i[\mu_j^3 + 3\gamma_{jj}\mu_j]$

$$\begin{aligned} 5. \hat{\omega}_{jjjj}|_{\vec{k}=\vec{0}} &= [(i\mu_j - \gamma_{mj} k_m)^4 - 6\gamma_{jj}(i\mu_j - \gamma_{mj} k_m)^2 + 3\gamma_{jj}^2] \hat{\omega}|_{\vec{k}=\vec{0}} = \\ &= \mu_j^4 + 6\mu_j^2 \gamma_{jj} + 3\gamma_{jj}^2 \end{aligned}$$

Es posible ahora, determinar las expresiones finales para los procesos de los retornos:

$$1. \text{ Media: } m_j = t(a_j + \lambda \mu_j)$$

2. Covarianza: $s_{jl} = t[\sigma_{jl} + \lambda(\gamma_{jl} + \mu_j\mu_l)]$
3. Co-asimetría: $\frac{E[(r_j - m_j)(r_l - m_l)^2]}{\sqrt{s_{jj}s_{jl}}} = \frac{t\lambda[2\mu_l\gamma_{jl} + \mu_j(\mu_l^2 + \gamma_{ll})]}{\sqrt{s_{jj}s_{jl}}}$
4. Exceso de Curtosis: $\frac{E[(r_j - m_j)^4]}{s_{jj}^2} - 3 = \frac{t\lambda(\mu_j^4 + 6\mu_j^2\gamma_{jj} + 3\gamma_{jj}^2)}{s_{jj}^2}$

D. Elección del portafolio óptimo.

Tal y como se mencionó a lo largo del texto, para distribuciones normales multivariadas, no conocemos una solución de forma cerrada para el sistema de ecuaciones (2.3), en específico para el tercer término del componente de los saltos. Por tanto, obtenemos una solución numérica por medio de una aproximación utilizando el método propuesto por Stroud (1971).

Una regla de producto tiene $\prod_{i=1}^M N_i$ puntos, donde N_i es el número de puntos empleados a lo largo del eje del i -ésimo eje. Problemas de gran dimensión generalmente requieren el uso de reglas de no-producto, las cuales en general conllevan una menor cantidad de puntos respecto a una regla del producto completa. Stroud (1971) presentó una serie de pasos a seguir de reglas de no-producto que han sido documentados como procesos con un correcto funcionamiento en una amplia gama de contextos.

Sintetizando, el procedimiento es el siguiente: para un polinomio en x de grado menor o igual a siete, se aproxima la integral $\int dx g(x)e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}^2$, por la suma $\sum_{k=1}^{12} g(u_k)\omega_k$. Donde las abscisas y los pesos (respectivamente) están dados por:

1. $u_{k \in \{1,2\}} \in \{\pm r, 0\}$,
 $u_{k \in \{3,4\}} \in \{0, \pm r\}$,
 $u_{k \in \{5,\dots,8\}} \in \{\pm s, \pm s\}$,
 $u_{k \in \{9,\dots,12\}} \in \{\pm t, \pm t\}$;

$$\text{Donde: } r^2 = 3, s^2 = \frac{9-3\sqrt{5}}{8}, t^2 = \frac{9+3\sqrt{5}}{8}$$

$$2. u_{k \in \{1, \dots, 4\}} = A,$$

$$u_{k \in \{5, \dots, 8\}} = B,$$

$$u_{k \in \{9, \dots, 12\}} = C;$$

$$\text{Donde: } A = \frac{1}{36}V, B = \frac{5+2\sqrt{5}}{25}V, C = \frac{5-2\sqrt{5}}{25}V$$

Entonces, sustituyendo tales valores para pesos y abscisas es posible aproximar la integral de la función normal multivariada, y por tanto encontrar una solución para el portafolio óptimo de inversión.

Índice de Tablas.

Tabla 1. Codificación Bloomberg.	26
Tabla 2. Estadísticas descriptivas (porcentajes).	28
Tabla 3. Correlaciones.	32
Tabla 4. Estimadores del proceso de difusión.	34
Tabla 5. Estimadores del proceso de difusión con saltos.	36
Tabla 6. Elección del portafolio óptimo en ausencia de saltos.	40
Tabla 7. Elección del portafolio óptimo en considerando los saltos.	41
Tabla 8. Estimadores del proceso de difusión con saltos para el periodo 1990-2007.	45
Tabla 9. Estimadores del proceso de difusión con saltos para el periodo 1994-2011.	47
Tabla 10. Estimadores del proceso de difusión con saltos para observaciones mensuales.	50

Índice de Figuras.

Figura 1. Índices Accionarios.	29
Figura 2. Tasas de Interés de los Bonos Gubernamentales.	30