



EL COLEGIO DE MÉXICO CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN ECONOMÍA

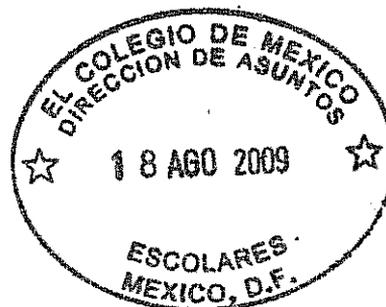
*CONSUMPTION CAPITAL ASSET PRICING MODEL,
CCAPM: UNA APLICACIÓN PARA MÉXICO*

DIANA TERRAZAS SANTAMARÍA

PROMOCIÓN 2007 - 2009

ASESOR: DR. ENEAS A. CALDIÑO GARCÍA

JULIO 2009



Resumen

Este trabajo analiza empíricamente el modelo de valuación de activos basado en el consumo (CCAPM) para el caso de México para el periodo de 1993-2007. Se utilizan los datos de consumo privado de bienes no duraderos y servicios, así como el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. Para la estimación del modelo se consideran dos especificaciones de la función de utilidad y por medio del Método Generalizado de Momentos se obtienen el factor de descuento subjetivo y la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo. Finalmente, se verifica si se presenta el llamado enigma de la prima de riesgo.

Agradecimientos

A mis padres que siempre han confiado en mis proyectos y me han apoyado incondicionalmente.

A mi hermano que ha sido mi amigo más leal.

A mis compañeros del Colegio que se convirtieron en compañeros de sueños y me inspiraron para ser una mejor persona.

A todas aquellas personas involucradas en este difícil, pero muy recompensante camino.

Índice

	Página
1. Introducción y revisión de literatura.....	3
2. Modelos de valuación de activos y CCAPM.....	7
3. Estimación del modelo	19
4. Datos.....	21
5. Resultados.....	25
6. Conclusiones.....	30
7. Bibliografía.....	32

Índice de tablas

Tabla 1. Principales estadísticos de la tasa de crecimiento del CBNDYS

Tabla 2. Principales estadísticos de la tasa de rendimiento del IPC

Tabla 3. Principales estadísticos de la tasa libre de riesgo y de la inflación

Tabla 4. Estimación con variables instrumentales de la función Hansen & Singleton

Tabla 5. Estimación con variables instrumentales de la función de Abel

Índice de gráficas

Gráfica 1. Capital Asset Pricing Model

Gráfica 2. Tasa de crecimiento del CBNDYS

Gráfica 3. Tasa de rendimiento del IPC

Gráfica 4. Rendimiento real de los activos libres de riesgo

Gráfica 5. Prima de riesgo

Gráfica 6. Gamma vs Tasa libre de riesgo

1. Introducción y revisión de literatura

El objetivo de la teoría de valuación de activos es entender el comportamiento de pagos futuros que son inciertos. Para valorar un activo es necesario tomar en cuenta dos aspectos: el tiempo y el riesgo.

Existen dos enfoques muy populares para la valuación de activos:

- Fijación absoluta de precios

Se basa fundamentalmente en la exposición de cada activo a los riesgos meramente macroeconómicos. Este enfoque es el más común en los trabajos académicos, ya que da una idea clara de la explicación económica del porqué los precios se mueven en tal o cual dirección. El objetivo principal es entender y medir las fuentes de riesgo macroeconómico que llevan al movimiento de los precios.

Los modelos basados en el consumo, así como los modelos de equilibrio general son dos ejemplos de este tipo.

- Fijación relativa de precios

Se centra en la idea de fijar el precio de un activo, dados los precios de otros activos, aunque se utiliza poca información de los factores que determinan el riesgo del activo en cuestión. Se suponen como dados los precios de los otros activos. El modelo de valuación de opciones de Black-Scholes es un ejemplo.

En el presente trabajo se considera el modelo de valuación de activos basado en el consumo que pertenece al primer enfoque mencionado.

En modelos estáticos de varios periodos, los activos son comerciados en cada periodo, dependiendo de la información que se va conociendo en cada tiempo. De este modo, las decisiones se hacen de manera secuencial, teniendo en cuenta que la decisión que se tome hoy tendrá un impacto en las oportunidades de mañana. En un marco dinámico es

posible establecer un vínculo entre el sector real de la economía y los sectores financieros.

Merton (1973) introduce un modelo de maximización intertemporal para el mercado de capitales en el cual los inversionistas actúan de tal manera que maximizan la utilidad esperada del consumo de toda su vida, además de que pueden comerciar continuamente en el tiempo. Las funciones de demanda explícitas de los activos se ven afectadas por la posibilidad de que ocurran cambios inciertos en las oportunidades de inversión en el futuro. Encuentra que los rendimientos esperados de los activos riesgosos pueden diferir de la tasa libre de riesgo, aún cuando no tengan riesgo sistemático, debido a que se capturan efectos que de otra manera no aparecerían en el modelo estático de un solo periodo.

Breeden (1979) reconcilia el modelo intertemporal de activos de Merton (1973) con el modelo clásico (Capital Asset Pricing Model, CCAPM) destacando la dicotomía entre la riqueza y el consumo. En un marco intertemporal, Breeden muestra que las preferencias de los agentes deben ser definidas sobre el consumo: *“always, when the value of an additional dollar payoff in a state is high, consumption is low in that state, and when the value of additional investment is low, optimal consumption is high. This is not always true for wealth, when investment opportunities are uncertain¹”*.

Hansen y Singleton (1982) proponen el Método Generalizado de Momentos (GMM por sus siglas en inglés) para estimar y probar modelos no lineales de expectativas racionales utilizando directamente la ecuación de Euler. De manera empírica utilizan datos de consumo de EU de 1959 a 1978 y los rendimientos obtenidos del *New York Stock Exchange*. Formulan un modelo canónico basado en el consumo, el cual considera a un inversionista representativo que tiene una función de utilidad con coeficiente de aversión relativo al riesgo constante (CARRC) y separable en el tiempo. Encuentran que el modelo se rechaza y que con los resultados obtenidos se es incapaz de explicar de manera conjunta la variación de las tasas de interés y los rendimientos promedio de los activos.

¹ Siempre, cuando el valor de un dólar adicional en un estado es alto, el consumo en ese mismo estado es bajo, y cuando el valor de una inversión adicional es bajo, el consumo óptimo es alto. Para la riqueza esto no siempre es cierto, cuando las oportunidades de inversión son inciertas.

Mehra y Prescott (1985) desarrollan la idea del enigma de la prima de riesgo que consiste en que la baja volatilidad del crecimiento del consumo sólo puede ser reconciliada con los rendimientos observados de los activos si el coeficiente de aversión relativo al riesgo (CARR) es mucho más grande que los valores considerados como plausibles. Para que ese coeficiente fuese plausible, se necesitaría una tasa libre de riesgo muy grande; lo cual resultaría incompatible con la evidencia. Utilizan datos de EU para el periodo 1889-1978 y encuentran una prima de riesgo estimada de 6.18% que resulta incongruente con la teoría. Estiman que con un CARR igual a 2, el modelo implicaría una tasa libre de riesgo de 3.7% anual, que es considerablemente mayor a la media muestral que es de 0.80% con una desviación estándar de 0.60%

En el modelo original de Breeden (1979), los activos son valuados de acuerdo a su contribución marginal al consumo y no a la riqueza. Este modelo fue conocido después como el modelo de valuación de activos basado en el consumo (Consumption Capital Asset Pricing Model, CCAPM).

Diversos autores han probado empíricamente el CCAPM y han obtenido resultados decepcionantes, que se puede deber en gran medida a la especificación de la función de utilidad. En el CCAPM, la tasa de sustitución intertemporal es una función de la tasa de crecimiento del flujo del consumo de bienes no durables y servicios.

En algunos intentos de mejorar el comportamiento del CCAPM, se han utilizado distintas funciones de utilidad. Por ejemplo, Mankiw (1985) introduce bienes duraderos, Aschauer (1985) incorpora los servicios y los gastos de gobierno y Abel (1990) con su modelo '*Catching up with the Joneses*' agrega la formación de hábitos en el consumo.

Gordon y Samson (2002) analizan el comportamiento del CCAPM para el caso de Canadá. En su trabajo comparan seis especificaciones de la función de utilidad. Utilizan datos cuatrimestrales del consumo de bienes no durables y servicios per cápita y el índice del *Toronto Stock Exchange* para el periodo de 1969-1992. Encuentran que ninguna especificación alternativa a la función de utilidad con CARRC se comporta mejor que ésta última.

Márquez (2004) examina el caso de España, donde además de incorporar los bienes no duraderos y servicios, introduce los servicios que proveen los bienes duraderos. Usa datos anuales del consumo y del Índice General Total de la Bolsa de Madrid para el periodo 1964-2002. En cuanto a la forma de la función de utilidad, utiliza la de CARRC y la de Abel con formación de hábitos. Concluye que utilizando la función de CARRC, el CARR estimado es muy elevado para ser plausible, lo que daría lugar al enigma de la prima de riesgo. Sin embargo, cuando utiliza la función de Abel, los valores de la estimación del CARR resultan plausibles. Sin embargo, las estimaciones resultan muy sensibles a la medida de consumo que se utilice.

Diversos estudios han probado empíricamente el CCAPM para otros países. Por ejemplo, Arango y Ramírez (2007) lo hacen para Colombia para el periodo de 1971-2003, utilizan la función de CARRC y encuentran que la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo es de -0.1334. Además, estiman el factor de descuento subjetivo en 0.87, lo que implicaría que el consumidor colombiano representativo es impaciente.

El mercado brasileño es analizado por Pessoa y Bonomo (2007), utilizando cuatro tipos de funciones de utilidad. Encuentran que el factor de descuento subjetivo estimado está dentro de los niveles plausibles y que el CARR es bajo. Con dichos valores estimados no se presenta el enigma de la prima de riesgo.

Li (2007) estudia el caso australiano utilizando cuatro especificaciones de la función de utilidad. Concluye que la función de utilidad con CARRC propuesta por Hansen y Singleton es capaz de explicar los datos, sin que se presente el enigma de la prima de riesgo.

Japón es analizado por Kubota, *et al* (2008) para el periodo 1986-1998. Los datos de este trabajo demuestran que sólo un pequeño porcentaje de los hogares japoneses tienen en común el mismo tipo de activos. Por lo tanto, se esperaría que el CARR difiriera entre los distintos niveles de ingreso. Sus estimaciones reflejan que esto último efectivamente sucede. Además, para los hogares con ingresos más altos, el CCAPM es rechazado. En general, los CARR estimados no son significativos.

Recientemente, Javid y Ahmad (2009) analizan la implementación del CCAPM para el caso pakistaní, utilizando datos de 49 acciones comerciadas en el *Karachi Stock Exchange* para el periodo de 1993-2004.

Ho (2009) ocupa datos de Estados Unidos para el periodo de 1999-2003 para estimar el CCAPM, ocupando la idea original de Epstein-Zin. En ésta se usa una función de utilidad recursiva, que da como resultado una ecuación de Euler con CARR que varía en el tiempo. Los resultados rechazan la hipótesis de que el CARR es constante, reforzando la utilización de este tipo de función de utilidad.

En este trabajo se pretende estimar el coeficiente de aversión relativa al riesgo y la tasa de descuento subjetiva para el mercado mexicano para el periodo de 1993-2007. Se utiliza información del consumo privado de bienes no duraderos y servicios, además del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. Con los coeficientes estimados se analizará si se presenta el llamado enigma de la prima de riesgo.

2. Modelos de valuación de activos y CCAPM

La hipótesis del ingreso permanente de Friedman y la hipótesis del ciclo de vida de Modigliani fueron aproximaciones para vincular a las variables del ingreso con el consumo, donde se ubicaba claramente el hecho de que los cambios transitorios en el ingreso tienen menos impacto en el consumo que los cambios permanentes.

Lucas (1976) con su teoría de las expectativas racionales, explica que existe una relación estructural entre el ingreso permanente y el consumo. Critica que la función de utilidad impone una relación entre el ingreso observado y el ingreso permanente y que no hay razón para esperar una relación estable de ese tipo. Por ejemplo, una política fiscal, puede tener efecto en la decisión óptima del consumidor al momento de hacer inferencia de cuál será su ingreso permanente a través de su ingreso observado. Referente al consumo, comenta que los agentes utilizan toda la información disponible

acerca del comportamiento de otros agentes en la economía al momento de procesar la información, incluyendo al gobierno.

Hall (1978) utiliza el contexto de las expectativas racionales de Lucas para probar empíricamente que los agentes maximizan el valor esperado de la utilidad de toda su vida, sujeta a una tasa de interés que no cambia en el tiempo. La idea básica de su trabajo, es analizar la ecuación de Euler que describe el comportamiento óptimo de un consumidor representativo. Dicha ecuación, caracteriza la igualdad entre la tasa marginal de sustitución entre el consumo presente y el consumo del siguiente periodo y el costo presente de cada unidad de consumo futuro debidamente descontada. Concluye que sólo el consumo en el periodo $t-1$ es útil para pronosticar el consumo en el periodo t .

Hall (1985) estudia la relación que existe entre el consumo y las tasas de interés. Usualmente, se esperaría que un alza en las tasas de interés incite a los agentes a aplazar su consumo, manteniendo todo lo demás constante. La magnitud de esta sustitución intertemporal es muy importante, debido a que si un incremento pequeño en las tasas de interés implica un cambio importante en el consumo, entonces:

- Incrementos en las tasas de interés harán que el consumo disminuya, siempre que los otros componentes de la demanda agregada constantes. El ingreso total no se verá afectado por estos cambios.
- La carga de la deuda gubernamental será muy poco importante.
- El consumo se moverá junto con las tasas de interés, más que con el ciclo económico.

Concluye que, en general, el consumo no se incremente más rápidamente en periodos en los que hay expectativas de altas tasas de interés.

Medir el riesgo no diversificable² juega un papel crítico en la teoría de la valuación de activos. El modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) mide el riesgo de un activo a través de la covarianza de éste con el rendimiento de un portafolio de mercado. En comparación con el CCAPM que mide el riesgo de un activo por medio de la covarianza de su rendimiento con el consumo per cápita.

Es sabido que los activos riesgosos tienen tanto un mayor rendimiento esperado, como una mayor varianza de sus rendimientos. El CAPM tiene sus bases en la teoría moderna del portafolio y establece una relación entre el riesgo y el rendimiento esperado. Sus principales características son:

- Los agentes toman en cuenta cierta información estadística -media, varianza, covarianza- del rendimiento del activo para tomar sus decisiones y no existe la vinculación del sector financiero con el sector real de la economía.
- Tiene como supuesto que la oferta de los activos existentes es igual a la demanda de los mismos y que por lo tanto, los precios observados son los de equilibrio.
- Expresa el equilibrio en términos de las relaciones existentes entre las funciones de distribución de los rendimientos de los activos individuales y el rendimiento del portafolio que contiene a todos esos activos.

En el CAPM se consideran agentes con expectativas homogéneas, además de que existe un activo libre de riesgo que da una tasa de rendimiento r_f . Esto garantiza que el portafolio óptimo de todos los agentes tenga la misma estructura: una fracción de la riqueza inicial que es invertida en el activo libre de riesgo y el resto en el portafolio de mercado, T (*Market portofolio*)³.

² El riesgo no diversificable es aquel que no se puede reducir o eliminar, mediante la adición de activos a un portafolio diversificado.

³ El portafolio de mercado es el portafolio tangente que está formado por todos los activos, cuya proporción invertida en cada activo corresponde a su valor relativo de mercado. El valor relativo de mercado es igual al valor agregado del mercado de este activo, dividido entre la suma del valor agregado del mercado de todos los activos.

Sea w_{ij} la proporción que el individuo i invierte en el activo j de su riqueza inicial Y_{0i} . Entonces, si existieran I individuos en la economía, el valor total del activo j sería $\sum_{i=1}^I w_{ij} Y_{0i}$ que se interpretaría como la demanda de ese activo.

En el equilibrio se debe obtener que $\sum_{i=1}^I w_{ij} Y_{0i} = p_j Q_j$, donde p_j es el precio de equilibrio del activo j , Q_j es el número total de títulos activo j que están en circulación. Por lo tanto, $p_j Q_j$ es la capitalización de mercado del activo j .

Debido a que todos los inversionistas tienen la misma estructura del portafolio T y a que no realizan otras inversiones riesgosas, entonces todos los activos riesgosos existentes, deben estar en T . Es decir, si existiera otro activo riesgoso que no estuviera en T , entonces no habría demanda para el mismo.

El rendimiento esperado de un activo j , según el CAPM, está dado por:

$$E(r_j) = r_f + \frac{Cov(r_j, r_m)}{Var(r_m)} E(r_m - r_f)$$

donde:

$E(r_j)$ es la tasa de rendimiento esperada de capital sobre el activo j .

$E(r_m - r_f)$ es el exceso de rendimiento del portafolio de mercado.

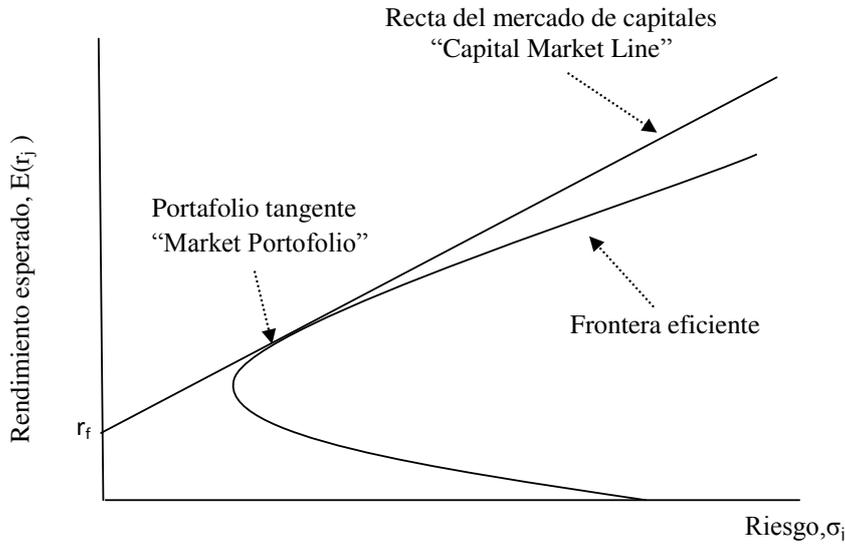
r_m es el rendimiento del mercado.

r_f es el rendimiento del activo libre de riesgo.

En el CAPM, el exceso de rendimiento del activo j , será una proporción del exceso de rendimiento del portafolio de mercado.

En la figura 1 se muestra la representación gráfica del CAPM.

Gráfica 1. Capital Asset Pricing Model (CAPM)



Es interesante notar que el CAPM tiene ciertas limitaciones por ser un modelo de equilibrio parcial estático. Sin embargo, existe el modelo estático Arrow-Debreu para valuación de activos que se enfoca en un equilibrio total, aplicable para múltiples periodos. Este último, no requiere supuestos sobre las preferencias de los agentes o sobre la distribución de los rendimientos.

Suponga que existen dos tiempos $t=0,1$ y que existen N posibles estados de la naturaleza en el tiempo 1 que se denotarán como $\theta=1,2,\dots,N$ con probabilidad π_θ cada uno. Además, sólo existe un bien no duradero para el consumo.

En esta economía, existen K agentes, $k=1,2,\dots,K$ cuyas preferencias están denotadas por $U_0^k(c_0^k) + \delta^k \sum_{\theta=1}^N \pi_\theta U^k(c_\theta^k)$ y cada agente tiene como dotación $\{e_0^k, (e_\theta^k)_{\theta=1,2,\dots,N}\}$.

c_θ^k denota el consumo del agente k en el único bien de consumo en el estado θ , U es la representación de la utilidad sobre las preferencias y δ^k es el factor de descuento subjetivo del agente k .

Esta teoría permite que se utilicen preferencias cuya función de utilidad sea intertemporalmente separables, $U^k(c_0^k, c_{\theta 1}^k, c_{\theta 2}^k, \dots, c_{\theta N}^k)$.

Existe una sola unidad de un solo activo θ , cuyo precio es q_θ , que paga una unidad de consumo si ocurre el estado θ y cero en otro caso. El consumo de un agente k , si ocurre el estado θ , es igual al número de unidades del activo θ que haya comprado. De aquí se desprende que comprar el activo θ es la única manera de asegurarse consumo futuro, ya que el bien es no duradero.

El problema del agente en el modelo Arrow-Debreu es:

$$\max_{(c_0^k, c_1^k, c_2^k, \dots, c_N^k)} U_0^k(c_0^k) + \delta^k \sum_{\theta=1}^N \pi_\theta U^k(c_\theta^k)$$

s.a.

$$c_0^k + \sum_{\theta=1}^N q_\theta c_\theta^k \leq e_0^k + \sum_{\theta=1}^N q_\theta e_\theta^k$$

$$c_0^k, c_1^k, c_2^k, \dots, c_N^k \geq 0$$

Aunque esta teoría es la más general, es poco útil en la práctica porque requiere identificar los estados de la naturaleza individuales; y aún cuando un estado es identificado, no siempre se puede verificar su ocurrencia.

Tanto el CAPM como el modelo Arrow-Debreu son modelos estáticos con dos periodos: 0 y 1. Las decisiones de compra de los activos, sólo se hacen en el periodo cero. En la realidad, los activos son comerciados conforme la nueva información se va haciendo disponible y los agentes hacen sus decisiones de manera secuencial, siempre teniendo en cuenta que la decisión de hoy afectará las oportunidades de mañana.

El modelo CCAPM está hecho bajo un entorno dinámico, donde se asume que la población está conformada por muchos hogares, que son idénticos entre ellos. Por lo tanto, se reduce a analizar a uno de ellos -a un agente representativo. De aquí subyace la idea de que ningún agente puede comerciar con otro. Si un agente quisiera pedir prestado, como todos son idénticos, todos los demás agentes querrían pedir prestado también y ninguno estaría dispuesto a prestar. Por consiguiente, el comercio de activos debe venir de negocios, bancos, etc.

En el CCAPM, igual que en el modelo Arrow-Debreu, la posesión de activos permite asegurar consumo en el futuro, debido a que los bienes en la economía son no duraderos.

Para analizar modelo CCAPM se utiliza a un agente representativo que enfrenta el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max_{\xi} \quad & u(c_t) + E_t[\beta u(c_{t+1})] \\ \text{s.a.} \quad & \\ & c_t = e_t - p_t \xi \\ & c_{t+1} = e_{t+1} + X_{t+1} \xi \end{aligned}$$

donde:

β es el factor de descuento subjetivo que captura la impaciencia del agente

$u(\cdot)$ es la función de utilidad instantánea del agente

c_t es el consumo en el tiempo t

e_t es el nivel original de consumo en el tiempo t (si el agente no compra ningún activo)

p_t es el precio del activo en el tiempo t

ξ es la cantidad del activo que compra

X_{t+1} es el pago del activo en el tiempo $t+1$

Obteniendo las condiciones de primer orden del problema de maximización:

$$p_t u'(c_t) = E_t[\beta u'(c_{t+1}) X_{t+1}] \dots\dots\dots (1)$$

La ecuación (1) implica que la pérdida de utilidad, si el inversionista compra otra unidad del activo, se ve compensada con el incremento descontado de la utilidad esperada de un pago extra en el tiempo t+1.

Despejando p_t de la ecuación (1), se obtiene:

$$p_t = E_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} X_{t+1}\right] \dots\dots\dots (2)$$

La ecuación (2) es la fórmula central de la valuación de activos. Relaciona una variable endógena, el precio, con otras dos variables exógenas, el consumo y el pago del activo.

La idea principal de la ecuación (2) es que dado un pago (X_{t+1}) y una vez que se conoce la decisión de consumo del agente (c_t y c_{t+1}) se podría saber qué precio esperar (p_t).

Sea $m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$ el factor de descuento estocástico. Sustituyéndolo en la ecuación (2), se puede expresar p_t como:

$$p_t = E_t[m_{t+1} X_{t+1}] \dots\dots\dots (3)$$

La ecuación (3) se puede reescribir como:

$$E_t[m_{t+1} X_{t+1} - p_t] = 0 \dots\dots\dots (4)$$

La ecuación (4) estaría proporcionando las condiciones de momentos para utilizar el Método Generalizado de Momento en la estimación.

El Método Generalizado de Momentos lo introdujo Hansen en 1982 y desde entonces ha sido ampliamente utilizado para el análisis financiero y económico. El GMM tiene dos principales ventajas sobre el Método de Máxima Verosimilitud (MLE por sus siglas en inglés):

- a) El MLE provee buenos estimadores si la distribución asumida está correctamente especificada. Pero la teoría económica, rara vez proporciona la especificación completa de la distribución de probabilidad de los datos. Una solución, es elegir una distribución de manera arbitraria, pero se corre el riesgo de que el estimador resultante no sea óptimo y esto lleve a hacer inferencias incorrectas.
- b) Sólo en algunos casos, el modelo económico coincide con la función de distribución conjunta de los datos; pero el problema surge cuando se trata de estimar la función de verosimilitud ya que es complicada de evaluar numéricamente. En otros casos, el modelo teórico sólo cubre algunos aspectos de la función de distribución y para completar las estimaciones es necesario estimar parámetros adicionales.

En contraste, el GMM es un método computacionalmente conveniente, ya que no requiere una especificación de la función de verosimilitud.

La piedra angular del GMM es establecer una serie de condiciones que se deducen de los supuestos del modelo econométrico. La naturaleza de estas condiciones, difiere de aplicación a aplicación. Sin embargo, la validez de éstas es esencial para las propiedades del estimador resultante.

Suponga θ_0 un vector de parámetros desconocidos, v_t un vector de variables aleatorias y $f(\cdot)$ un vector de funciones, entonces las condiciones de momentos poblacionales estarán dadas por:

$$E[f(v_t, \theta_0)] = 0 \text{ para toda } t \dots\dots\dots (5)$$

El estimador del GMM basado en la ecuación (5) es el valor de θ que minimice:

$$Q_T(\theta) = T^{-1} \sum_{t=1}^T f(v_t, \theta) W_T T^{-1} \sum_{t=1}^T f(v_t, \theta) \dots\dots\dots (6)$$

donde W_T es una matriz positiva semi-definida que depende de los datos, pero que converge en probabilidad a una matriz positiva definida de constantes.

La matriz W_T asegura que $Q_t(\theta) \geq 0$ para cualquier θ y que $Q_t(\hat{\theta}_T) = 0$, si $T^{-1} \sum_{t=1}^T f(v_t, \hat{\theta}_T) = 0$. Sin embargo, la condición de que sea positiva semi-definida deja abierta la posibilidad de que $Q_t(\hat{\theta}_T) = 0$ para un valor de $\hat{\theta}_T$ que no satisfaga las condiciones de momentos muestrales.

Si el número de condiciones excede al número de parámetros a estimar, entonces la elección de la matriz W es fundamental para asegurar que el estimador sea de mínima varianza.

Una manera de analizar si el modelo está correctamente especificado es a través de una prueba de hipótesis.

$$H_0 : E[g(v_t, \theta_0)] = 0 \text{ vs. } H_a : E[g(v_t, \theta_0)] \neq 0 \dots\dots\dots (7)$$

En el CCAPM el vector de parámetros a estimar es $b = \{\beta, \gamma\}$, antes llamado θ , que está en función del factor de descuento subjetivo y de la forma de la función de utilidad.

Sean $u_{t+1}(b) = m_{t+1}(b) X_{t+1} - p_t$ los errores, cuya media debe ser cero. Sustituyendo los errores en la ecuación (4), se tiene que:

$$E_t[u_{t+1}(b)] = 0 \dots\dots\dots (8)$$

Definiendo $g_T(b)$ como la media muestral de los errores, implica que:

$$g_T(b) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t(b) = E_t[u_{t+1}(b)] = E_t[m_{t+1} X_{t+1} - p_t] \dots\dots\dots (9)$$

La primera etapa del GMM consiste en estimar b , tal que minimice la forma cuadrática de la media muestral de los errores.

$$\hat{b}_1 = \underset{\{b\}}{\operatorname{argmin}} g_T \hat{b}' W g_T \hat{b} \dots\dots\dots (10)$$

Generalmente, en esta primera etapa se utiliza la matriz identidad como W . El estimador de \hat{b}_1 es consistente y asintóticamente normal

En la segunda etapa del GMM se elige una matriz de ponderación, W , bajo ciertas consideraciones estadísticas. La matriz de covarianza de g_T es la varianza de la media muestral.

Explotando el supuesto de que $E_t[u_{t+1}(b)] = 0$ y que $u_{t+1}(b)$ es estacionario, se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(g_T) &= \operatorname{Var}\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t\right) \\ &= \frac{1}{T^2} [T E(u'_t u_t) + (T-1) (E(u'_t u_{t-1}) + E(u'_t u_{t+1})) + \dots] \dots\dots (11) \end{aligned}$$

Cuando $T \rightarrow \infty$, entonces $\frac{(T-j)}{T} \rightarrow 1$. Utilizando esto en la ecuación (11):

$$\text{Var}(g_T) \rightarrow \frac{1}{T} \sum_{t=-\infty}^{\infty} E(u'_t u_t) = \frac{1}{T} S \dots\dots\dots (12)$$

Lo anterior sugiere que la inversa de S podría ser una buena matriz de ponderación en la segunda etapa para asegurar que el estimador tenga varianza mínima. Utilizando el estimado de la primera etapa, \hat{b}_1 , se estima S como:

$$S = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} E(u'_t(b) u_{t-j}(b)) \dots\dots\dots (13)$$

Una vez estimada S, se obtiene:

$$\hat{b}_2 = \underset{\{\hat{b}\}}{\text{argmin}} g_T \hat{b}_1' S^{-1} g_T \hat{b}_1 \dots\dots\dots (14)$$

\hat{b}_2 es un estimador consistente, asintóticamente normal y asintóticamente eficiente del vector de parámetros, $\begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix}$.

De la ecuación (4) se observa que el escenario ideal sería que $E_t[m_{t+1} X_{t+1}] - E_t[p_t] = 0$.

La prueba de sobreidentificación examina qué tan grandes son los errores entre los precios predichos y los precios observados. El estadístico de prueba es:

$$TJ_T = T[g_T \hat{b}' S^{-1} g_T \hat{b}] \sim \chi^2_{(\# \text{momentos} - \# \text{parámetros})}$$

Dividiendo la ecuación (4) por p_t y renombrando $R_{t+1} = \frac{X_{t+1}}{p_t}$ como el rendimiento bruto, se tiene que:

$$E_t[m_{t+1}(b) R_{t+1} - 1] = 0 \dots\dots\dots (15)$$

Reescribiendo la ecuación (15), se obtiene:

$$E_t[m_{t+1}(b) R_{t+1}] = 1 \dots\dots\dots (16)$$

Para una variable Z_t observada en el tiempo t , utilizando la ecuación (16) y antes de tomar esperanzas no condicionales:

$$E[m_{t+1}(b) R_{t+1} Z_t] = E(Z_t) \dots\dots\dots (17)$$

Reescribiendo la ecuación (17):

$$E\{[m_{t+1}(b) R_{t+1} - 1] Z_t\} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

3. Estimación del modelo

Como ya se señaló anteriormente, el GMM resulta adecuado para estimar el CCAPM.

En este trabajo se utilizan dos funciones de utilidad para estimar el factor de descuento estocástico. Las funciones son:

- a) Hansen y Singleton (1983), función aditivamente separable de CARRC.**

Posiblemente, la función de utilidad más utilizada en el contraste empírico del CCAPM.

Se deriva de considerar una economía con agentes idénticos que eligen su consumo e inversión tales que maximicen el valor esperado de una función de utilidad intertemporalmente separable von Neumann-Morgenstern, donde la distribución

conjunta del consumo y los rendimientos se asume como lognormal y las preferencias exhiben CARRC.

Considere $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, donde c_t es el consumo real agregado per cápita.

Dada esta función, el factor de descuento estocástico a estimar será:

$$m_{t+1} = \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \dots\dots\dots (19)$$

Sustituyendo la ecuación (19) en la (15), se obtiene:

$$E_t[\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} R_{t+1} - 1] = 0 \dots\dots\dots (20)$$

Donde β es el factor de descuento subjetivo y γ es el coeficiente de aversión relativo al riesgo, y su inverso es la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo.

b) Abel (1990), función de utilidad con formación externa de hábitos.

Abel introdujo una función de utilidad que engloba tres aspectos:

- Separable intertemporalmente
- Funcion de utilidad "*catching up with the Joneses*" que depende del nivel de consumo individual relativo al promedio del nivel de consumo rezagado
- Formación de hábitos.

Se asume que el crecimiento del consumo es independiente e idénticamente distribuido.

Considere la siguiente función de utilidad:

$$u(c_t, c_{t-1}) = \frac{(c_t)^{1-\gamma}}{(c_{t-1})^{1-\gamma}} .$$

El factor de descuento estocástico a estimar es:

$$m_{t+1} = \beta \frac{(c_{t+1})^{-\gamma}}{(c_t)^{-\gamma}} \frac{(c_t)^{-\gamma}}{(c_{t-1})^{-\gamma}} \dots \dots \dots (21)$$

Sustituyendo la ecuación (21) en la (15), se obtiene:

$$E_t[\beta \frac{(c_{t+1})^{-\gamma}}{(c_t)^{-\gamma}} \frac{(c_t)^{-\gamma}}{(c_{t-1})^{-\gamma}} R_{t+1} - 1] = 0 \dots \dots \dots (22)$$

Donde β es el factor de descuento subjetivo y γ es el coeficiente de aversión relativo al riesgo, y su inverso es la elasticidad de sustitución intertemporal del consumo.

4. Datos

Los datos del consumo se obtuvieron del Sistema de Cuentas Nacionales de México publicado por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía. Se consideraron los gastos de consumo privado en bienes no duraderos y servicios a precios de 1993 con frecuencia trimestral, para el periodo de 1993:01 a 2007:04.

La tabla 1 muestra los principales estadísticos de la tasa de crecimiento trimestral del consumo de bienes no duraderos y servicios (CBNDYS).

Tabla 1. Principales estadísticos de la tasa de crecimiento del CBNDDYS	
Media	0.00719
Mediana	0.01072
Desviación estándar	0.02323
Asimetría	-0.76172
Curtosis	3.64378

Para obtener la tasa de rendimiento de los activos financieros se utilizó el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC)⁴ de la Bolsa Mexicana de Valores para el periodo de 1993-2007.

La prima de riesgo es calculada como la tasa de rendimiento real del IPC menos la tasa de rendimiento real de los activos libres de riesgo. En la gráfica 5, se presenta el comportamiento de la prima de riesgo.

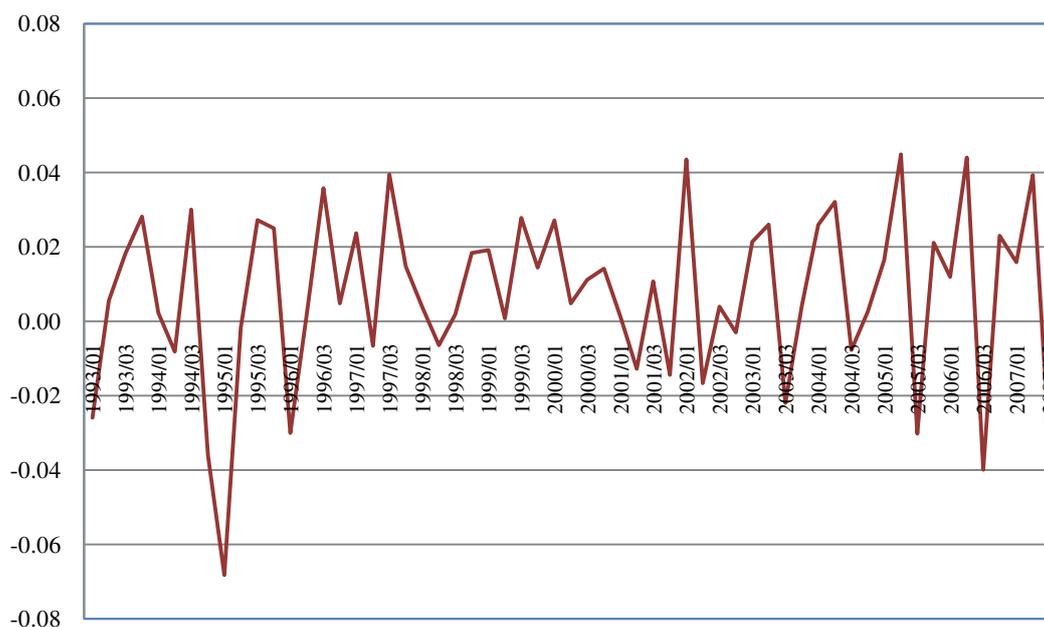
En la tabla 2 se recogen los principales estadísticos de la tasa de rendimiento trimestral del IPC.

Tabla 2. Principales estadísticos de la tasa de rendimiento del IPC	
Media	1.06005
Mediana	1.07501
Desviación estándar	0.13609
Asimetría	0.14892
Curtosis	2.96329

En la gráfica 2 se observa la evolución de la tasa de crecimiento trimestral del CBNDDYS para el periodo ya señalado.

⁴ A partir del 1° de julio de 2002 se utilizó el Índice de Rendimiento Total (IRT) que tiene su base en octubre de 1978. Antes de esta fecha, comparte histórico con el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC). El IRT quedó como la contraparte de Rendimiento Total del IPC considerando además de las fluctuaciones del mercado accionario del IPC, los ajustes correspondientes por Dividendos en Efectivo decretados, debido a que el IPC dejó de ajustar su nivel por dividendos en efectivo decretados

Gráfica 2. Tasa de crecimiento del CBN DYS

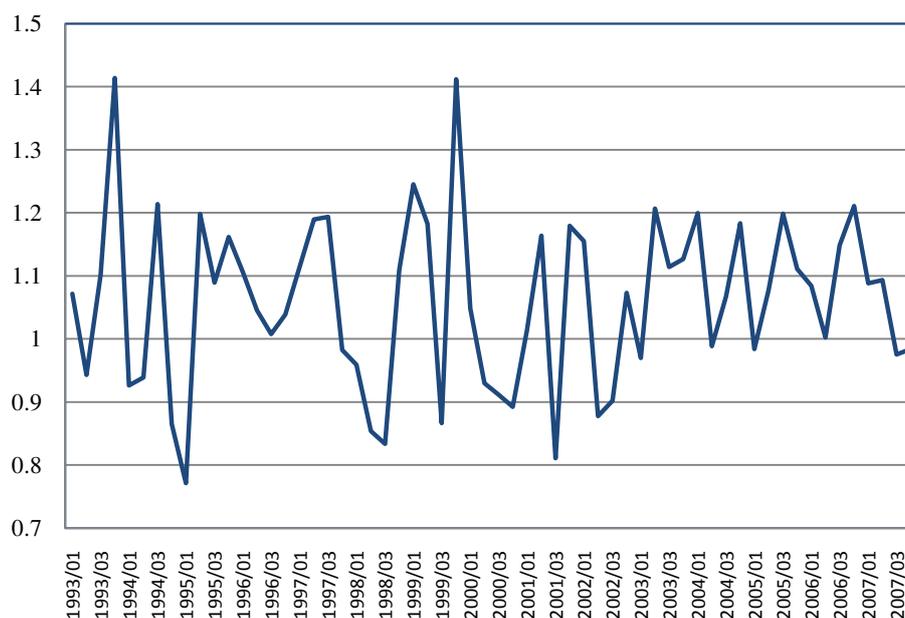


El deflactor es obtenido del Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC) con base en 2002 para el periodo de 1993-2007. La tasa libre de riesgo está dada por el rendimiento trimestral de la tasa de rendimiento en CETES a 28 días. Ambos publicados por el Banco de México. En la tabla 3 se muestran los principales estadísticos de la inflación trimestral obtenida a partir del INPC y de la tasa libre de riesgo.

Tabla 3. Principales estadísticos de la tasa libre de riesgo y de la inflación		
	Inflación	Tasa libre de riesgo
Media	0.02765	0.16339
Mediana	0.01686	0.14000
Desviación estándar	0.03034	0.11877
Asimetría	2.61313	1.70949
Curtosis	10.8127	5.87446

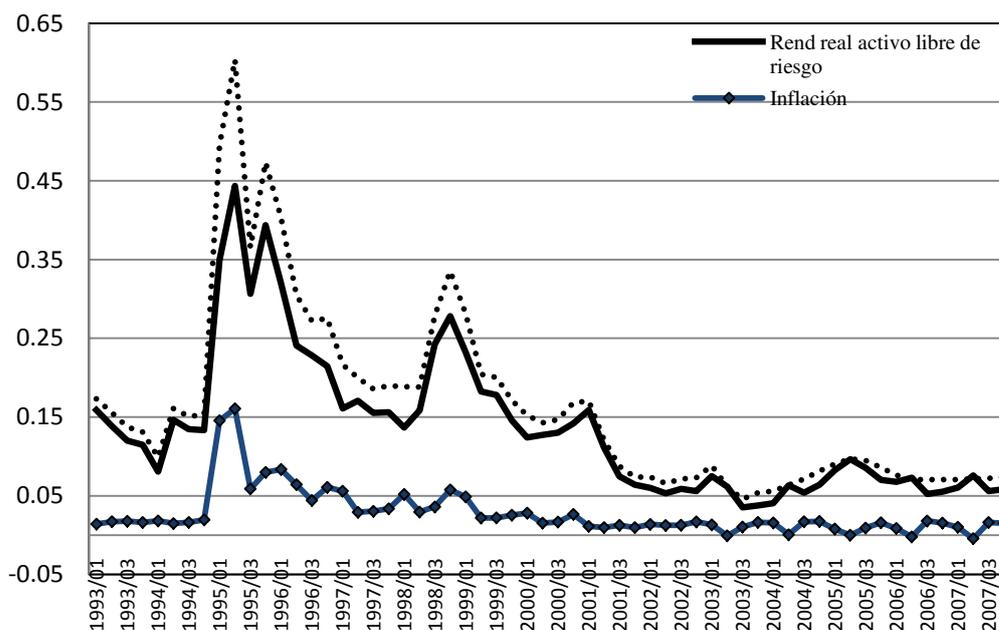
En la gráfica 3 se muestran las tasas de rendimiento bruta del IPC con frecuencia trimestral.

Gráfica 3. Tasa de rendimiento del IPC



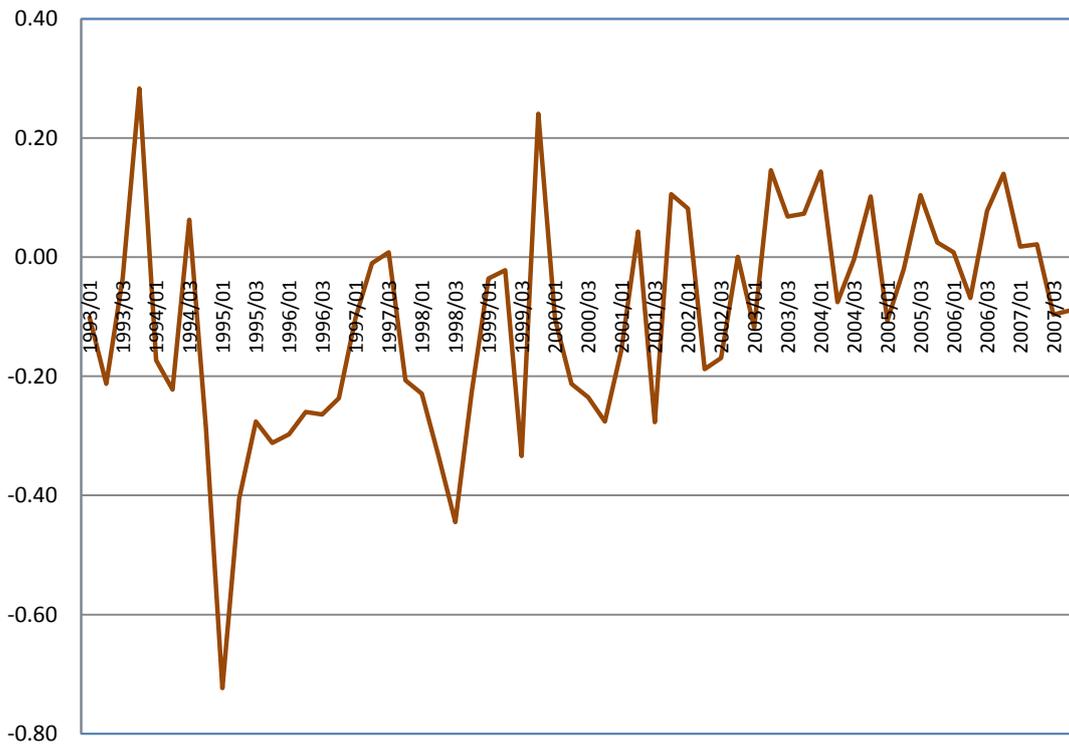
Para obtener el rendimiento real de un activo libre de riesgo se utiliza el deflactor correspondiente a cada periodo. En la gráfica 4 se muestra la evolución trimestral de la inflación, de la tasa libre de riesgo y del rendimiento real de un activo libre de riesgo.

Gráfica 4. Rendimiento real de los activos libres de riesgo



La prima de riesgo es calculada como la tasa de rendimiento real del IPC menos la tasa de rendimiento real de los activos libres de riesgo. En la gráfica 5, se presenta el comportamiento de la prima de riesgo.

Gráfica 5. Prima de riesgo



5. Resultados

La serie de CBNDDYS se desestacionalizó utilizando el método de *ratio to moving average*.

Recordando que para asegurar que el estimador del GMM sea eficiente, se utiliza la inversa de S como matriz de ponderación, $W=S^{-1}$. Donde $S=\frac{1}{T}\sum_{j=-\infty}^{\infty}E(u'_t(b)u_{t-j}(b)')$.

De la ecuación (16), el valor estimado del vector de parámetros b es:

$$\hat{b}_2 = \operatorname{argmin}_{\{\hat{b}\}} g_T \hat{b}_1' S^{-1} g_T \hat{b}_1^5$$

De acuerdo a la metodología utilizada por Hansen y Singleton (1982), en el presente trabajo se utilizan como variables instrumentales rezagos el cambio en el consumo y del rendimiento del IPC, donde el número de rezagos utilizados son de 1, 2, 4 y 6.

En la siguiente tabla, se presentan los resultados para la función de utilidad intertemporalmente separable de Hansen y Singleton, donde la ecuación estimada es:

$$E_t[\beta (\frac{c_{t+1}}{c_t})^{-\gamma} R_{t+1} - 1] = 0$$

Tabla 4. Estimación con GMM de la función Hansen & Singleton						
No.de rezagos	$\hat{\beta}$	SE $\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	SE $\hat{\gamma}$	Grados de libertad ⁶	Prob ⁷ .
1	0.9818	0.0242	2.1253	1.8402	1	0.6799
2	0.9551	0.0221	0.0475	1.4557	3	0.3073
4	0.9440	0.0139	-0.2586	0.8125	7	0.4771
6	0.9372	0.0125	-0.5632	0.8083	11	0.7464

Los principales resultados son:

- i. El factor de descuento subjetivo es significativo en todos los casos y menor que la unidad. Además de no ser sensible al número de rezagos considerados.
- ii. El CARR, γ , estimado no es estadísticamente distinto de cero en ningún caso.

⁵ Donde \hat{b}_1 es el estimador de la primera etapa, cuando se utiliza $W=I$.

⁶ Se refiere a los grados de libertad de la chi cuadrada estimada para la prueba de sobreidentificación de restricciones del GMM.

⁷ Se refiere a la probabilidad de que una variable chi cuadrada, con los grados de libertad indicados en la columna anterior, sea menor que el valor calculado del estadístico de prueba bajo la hipótesis de que las restricciones (15) son satisfechas.

- iii. De acuerdo al test de sobreidentificación el modelo no se puede rechazar en ningún caso.

En la tabla 5, se presentan los resultados para la función de utilidad de Abel con formación externa de hábitos. Recordando que la ecuación estimada es:

$$E_t[\beta \frac{(\frac{c_{t+1}}{c_t})^{-\gamma}}{(\frac{c_t}{c_{t-1}})^{1-\gamma}} R_{t+1} - 1] = 0$$

Tabla 5. Estimación con GMM de la función de Abel						
No.de rezagos	$\hat{\beta}$	SE $\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	SE $\hat{\gamma}$	Grados de libertad	Prob.
1	0.9746	0.0160	1.3836	0.4878	1	0.9412
2	0.9655	0.0162	1.0476	0.4386	3	0.2840
4	0.9552	0.0106	0.7715	0.3643	7	0.5173
6	0.9474	0.0092	0.9786	0.2845	11	0.7431

Los principales resultados son:

- i. El factor de descuento subjetivo es significativo en todos los casos y los valores estimados de β son muy similares a los arrojados por la función de utilidad anterior (mayor que 9 y menor que la unidad) que resultan similares a los estimados por Hansen y Singleton (1982).
- ii. En este caso, los coeficientes estimados de γ son significativos al 5% en todos los casos considerados. Los valores estimados son muy sensibles a los instrumentos utilizados, dichos valores están entre 0.7 y 1.3
- iii. De acuerdo al test de sobreidentificación el modelo no se rechaza en ningún caso.

Siguiendo el trabajo de Mehra y Prescott (2003) se verifica si se presenta el enigma de la prima de riesgo para el caso de México durante el periodo considerado.

Suponiendo que la tasa de crecimiento del consumo se distribuye de forma lognormal, entonces:

$$\ln R_f = -\ln\beta + \gamma\mu_x - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_x^2 \dots\dots\dots (23)$$

donde:

R_f es la media de la tasa libre de riesgo

β es el factor de descuento subjetivo

γ es el coeficiente de aversión relativa al riesgo

μ_x es la media de la tasa de crecimiento del consumo

σ_x^2 es la varianza de la tasa de crecimiento del consumo

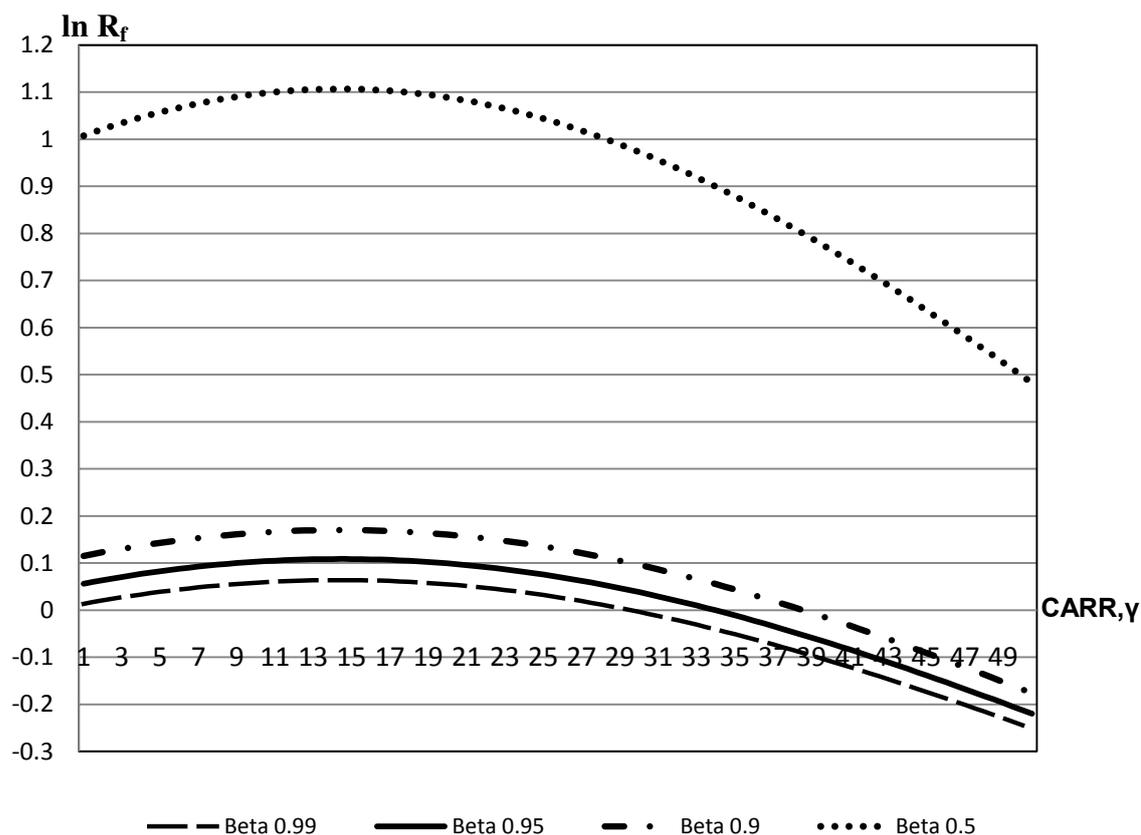
El primer término del lado derecho de la ecuación (23), $-\ln\beta$, representa la impaciencia de los agentes. Si $\beta < 1$, entonces el agente prefiere el consumo presente al consumo futuro. Entonces, en un contexto sin incertidumbre y sin crecimiento del consumo, la única tasa de interés en la economía sería $R_f = 1/\beta$.

El segundo término, $\gamma\mu_x$, surge debido al crecimiento del consumo. Entre mayor sea la curvatura de la función de utilidad y mayor sea la tasa de crecimiento del consumo, se incrementará el deseo de suavizar el consumo. Resultando, en el equilibrio, en una mayor tasa de interés.

El tercer término, $\frac{1}{2}\gamma^2\sigma_x^2$, aparece debido a la demanda de ahorro precautorio. En un mundo con incertidumbre, los agentes se protegen contra el consumo futuro poco favorable a través de stocks de bienes de consumo. En el equilibrio, la tasa de interés debe disminuir para contrarrestar estos ahorros precautorios.

En la figura 5 se muestra la ecuación (23) para diversos valores de β y γ , considerando $\mu_x = 0.0072$ y $\sigma_x = 0.232$.

Gráfica 6. Gamma vs Tasa libre de riesgo



Recordando que la media del rendimiento de la tasa libre de riesgo es 16.3%, entonces los valores plausibles -de acuerdo a los datos de consumo considerados- serían $5 < \gamma < 7$ y $\beta \approx 0.9$. En las estimaciones anteriores el valor más grande estimado del coeficiente de aversión relativa al riesgo es de 2.12 y el promedio del factor de descuento subjetivo es de 0.95. Con estos datos el rendimiento de la tasa libre de interés sería de 5% que está muy por debajo de lo que muestran los datos en el periodo estudiado.

6. Conclusiones

En este trabajo se probó empíricamente el modelo de valuación de activos basado en el consumo (CCAPM) para el caso de México para el periodo de 1993-2007. Se utilizó principalmente la metodología utilizada por Hansen & Singleton (1983) que involucra el Método Generalizado de Momentos para la estimación. Se ocuparon los datos de consumo privado en bienes no duraderos y servicios, así como del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores.

En cuanto a las funciones de utilidad consideradas, se comprobó que la función de utilidad intertemporalmente separable y con coeficiente de aversión relativo al riesgo, γ , o constante es incapaz de modelar de manera correcta lo que los datos mexicanos reflejan, ya que en ninguno de los casos considerados el coeficiente de aversión relativo al riesgo resultó estadísticamente distinto de cero. Sin embargo, cuando se utilizó la función de utilidad con formación de hábitos, se encontró que el valor estimado del coeficiente de aversión relativo al riesgo resultaba muy sensible al número de rezagos utilizados. Las estimaciones del factor de descuento subjetivo resultaron robustas a la función de utilidad y al número de rezagos, arrojando un valor aproximado de 0.95.

Por otro lado, si se considera la media del crecimiento del consumo y su desviación estándar, ambas resultan muy bajas para explicar el rendimiento de la tasa de interés libre de riesgo, durante el periodo considerado. Entonces, para empatar lo observado con lo estimado, se requeriría un coeficiente de aversión relativo al riesgo mucho mayor al estimado y un factor de descuento subjetivo ligeramente menor al encontrado. Debido a lo anterior, estaríamos en el caso del enigma de la prima de riesgo.

7. Bibliografía

Abel, A., 1990, "Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses", *American Economic Review*, vol. 80, 38-42.

Arango, M. & Ramírez, A., 2007, "Aversión al riesgo y tasa subjetiva de descuento: el caso colombiano, 1970-2003", *Revista de Ingenierías Universidad de Medellín*, vol. 6, 93-99.

Breeden, Douglas T., 1979, "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities", *Journal of Financial Economics*, vol. 7, 265-296.

Cochrane, John H., 2001, *Asset Pricing*, Princeton Press.

Danthine, J.. & Donald, J., 2001, *Intermediate Financial Theory*, Prentice Hall.

Gordon, S. & Samson, L., 2002, "Comparing Consumption-Based Asset-Pricing Models", *Canadian Journal of Economics*, vol. 35, 586-610.

Hall, Alastair, 2005, *Generalized Method of Moments*, Oxford University Press.

Hall, Robert, 1978, "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence", *Journal of Political Economy*, vol. 86, 971-987.

Hall, Robert, 1985, "Real Interest and Consumption", *National Bureau of Economic Research*, no. 1964.

Hansen, Lars P. & Singleton, Kenneth J., 1982, "Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectations models", *Econometrica*, vol. 50, 1269-1286.

Hansen, Lars P. & Singleton, Kenneth J., 1983, "Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns", *Journal of Political Economy*, vol. 91, 249-265

Ho, Kun, 2009, "Time Varying Risk Aversion", Working Paper, University of Chicago.

Javid, A. & Ahmad, E., 2009, "Testing Multifactor Capital Asset Pricing Model in Case of Pakistani Market", *International Research Journal of Finance and Economics*, vol. 25, 114-138.

Kubota, K., Tokunaga, T. & Wada, K., 2008, "Consumption Behavior, Asset Returns, and Risk Aversion: Evidence from Japanese Household Surveys," *Japan and World Economy*.

Li, Bin, 2007, "Testing Consumption-based Asset Pricing Models in Australia, Working Paper, University of Queensland.

Lucas, Robert, 1976, "Econometric Policy Evaluation: A Critique." *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, vol. 1, 19–46.

Márquez, E., 2004, "El modelo CCAPM y el consumo de bienes duraderos: una primera aproximación para el mercado de valores español", *Documento de trabajo*, Universidad Complutense de Madrid.

Mehra, R., & Prescott, E., 1985, "The Equity Premium: A Puzzle", *Journal of Monetary Economics*, vol. 15, 145-161.

Mehra, R. & Prescott, E., 2003, "The Equity Premium in Retrospect", *Handbook of the Economics of Finance*, vol. 14, 888-915.

Merton, Robert C., 1973, "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica*, vol. 41, 867-887.

Pessoa, M. & Bonomo, M., 2007, "Reproducing the Return Moments of Brazilian's Financial Assets with Generalized Disappointment Aversion", *Fourth Workshop of the Latin Finance Network*.