EL COLEGIO DE MÉXICO
CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS

MAESTRÍA EN ECONOMÍA

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN ECONOMÍA

MEDICIÓN MULTIDIMENSIONAL DE LA POBREZA A TRAVÉS DE UNA MATRIZ DE INTERACCIONES

LUIS ALFONSO ORTEGA SÁINZ

PROMOCIÓN 2015-2017

ASESOR:

DR. ANTONIO YÚNEZ NAUDE

OCTUBRE 2017

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo de tesis es proponer una metodología de medición multidimensional de la pobreza, que sea sensible ante la presencia simultánea de dos o más carencias, y ante la interacción entre las carencias y el entorno. Se desarrolla una propuesta con base en el esquema axiomático descrito por Alkire et al. (2015) que, de forma adicional, incorpora una matriz de interacciones para extender el análisis propuesto por estos autores. Esta nueva metodología, sustentada en la evaluación participativa de la pobreza, presenta algunas ventajas respecto al enfoque tradicional de medición multidimensional de la pobreza para el desarrollo de la acción pública, y representa una mejor aproximación desde el paradigma de la complejidad.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El hombre es la medida de todas las cosas
Protágoras

La medición de la pobreza ha sufrido cambios sustanciales a través de la historia. El reconocimiento de complejidad del problema; la continua transformación de la sociedad, y el acceso a nuevas fuentes de información y a nuevas herramientas para su análisis; han exigido ajustes a los procedimientos establecidos en esta materia. Esto ha dado lugar al desarrollo de una gran cantidad de propuestas alternativas para evaluar la pobreza, propuestas que divergen en métodos y criterios, presentan distintas ventajas y deficiencias, pero se complementan unas a otras. Sin embargo, existen factores que podrían profundizar en el conocimiento y medición la experiencia de la pobreza, pero que aún no han sido incorporados en los análisis.

Los estudios especializados han propuesto dos vías para estimar la pobreza: las medidas objetivas, calculadas a partir de datos observables, y las medidas subjetivas, calculadas a partir de información sobre la percepción de los individuos respecto a su propia situación. Por su parte, el establecimiento de los parámetros empleados para darle forma a los métodos de medición también ha sido discutido en términos de objetividad y subjetividad, particularmente en el debate en torno a las necesidades básicas y a las relativas.

En el presente trabajo de tesis se propone una metodología para medir la pobreza situando al hombre y su experiencia en el centro del problema, propuesta concebida en torno a dos preguntas: ¿Cómo cambia el sufrimiento de las personas en situación de pobreza ante la presencia simultánea de dos o más carencias?, ¿cuál es la relación entre el sufrimiento por carencias y el entorno o contexto en el que vive un individuo? Al centrar la atención en el sufrimiento en lugar de estudiar las carencias por sí mismas, se considera implícitamente que la pobreza no puede evaluarse únicamente a través de cifras, sino que debe buscarse en los ojos de quien la ve y en el cuerpo de quien la vive.

Se considera que las preguntas anteriores son relevantes en la investigación económica debido a que nuestra representación de la pobreza, y de cómo ésta debería medirse, determinan la forma en la que el problema es atendido dentro de la sociedad. Al utilizar una metodología basada en una matriz de interacciones para evaluar la intensidad de la experiencia de la pobreza, se pretende ofrecer una herramienta que sea útil para el desarrollo de la acción pública, haciendo posible la identificación de aquellas carencias o características del entorno que deberían ser atendidas como prioridad debido a que profundizan la gravedad de la situación a través de su interacción con las demás.

Una ventaja de la metodología planteada en el presente proyecto es que puede ser empleada bajo conceptualizaciones de la pobreza diferentes a las ideas vertidas en esta introducción. Sin embargo, se ha considerado relevante presentar la perspectiva a parir de la cual se ha concebido el proyecto, ya que de ésta depende la factibilidad de su aplicación.

En el primer capítulo se presenta una revisión de la literatura sobre la medición de la pobreza. Al inicio se describe brevemente el contexto que dio origen a los métodos multidimensionales. Más adelante, se detallan las nociones básicas que son utilizadas en estos métodos y se da una revisión general de los indicadores más importantes que han sido utilizados en los últimos años. Posteriormente, se muestra cómo estos métodos han sido utilizados para la evaluación de la pobreza en México. Por último, se explica en qué consiste el enfoque de las evaluaciones participativas de la pobreza.

En el segundo capítulo se da a conocer la propuesta de medición de la pobreza que se desarrolla en el presente trabajo, explicando cada uno de sus componentes y describiendo los que constituyen una nueva aportación como parte de la metodología: la matriz de interacciones, los agravantes y los mitigantes. Posteriormente, se demuestra que esta medida es una generalización de otras propuestas que han sido utilizadas con anterioridad.

En el tercer capítulo se demuestra cómo esta metodología satisface gran parte de los axiomas de medición de la pobreza recopilados por Alkire y Foster, se demuestra cómo no satisface a causa de algunas propiedades de la matriz de interacción, y se proponen nuevos axiomas que esta propuesta satisface en relación con los elementos que pueden agravar o mitigar la experiencia de la pobreza. Por último, la tesis contiene una serie de reflexiones finales.

CAPÍTULO I

1.1 Revisión de la literatura

La erradicación de la pobreza, desde mediados del siglo pasado, ha sido uno de los objetivos principales de todos los países independientes y de algunas organizaciones internacionales, llegando a establecerse como uno de los objetivos del milenio. Sin embargo, el enfoque unidimensional que fue empleado para medir la pobreza durante la mayor parte del siglo XX, por los países desarrollados, fue insuficiente para responder ante las necesidades de los individuos en situación de pobreza dentro de los países en desarrollo, quienes parecen concebir el problema desde múltiples dimensiones (Palomar Lever, 2007).

La necesidad de reconocer la importancia de factores distintos a la renta o ingreso al conceptualizar la pobreza, es que estos pueden orientar el desarrollo y la implementación de políticas públicas que tengan como objetivo erradicar este problema (Green, 2006). Por esta razón, se ha buscado proponer nuevas alternativas para definir la pobreza; utilizando diferentes métodos, dimensiones y umbrales con la intención de ofrecer información útil para atender diferentes aspectos relacionados con la pobreza.

Una de las propuestas más relevantes, que fue concebida con la intención de complementar aquellos aspectos rezagados bajo el enfoque tradicional, consiste en definir la pobreza como una privación de capacidades (Sen, 2000). Esta propuesta reconoce que la medición de la pobreza no puede basarse únicamente en el nivel de renta recibido por una familia, sino que debe incorporar las carencias que presenta cada individuo en relación con otros elementos, como sus características fisiológicas o las características sociales y culturales de su entorno, ya que estas estructuran las posibilidades que tiene cada persona para desarrollarse plenamente.

A partir de la discusión que surge en torno al tipo de consideraciones planteadas por Sen, se producen diferentes propuestas de medición de la pobreza, tanto unidimensionales como multidimensionales. Sin embargo, existen algunas nociones que son compartidas por la mayoría de ellas.

1.2 Nociones básicas

De acuerdo con Alkire et. al. (2014), la mayoría de las metodologías de medición de la pobreza sobre d dimensiones se construyen a partir de las siguientes nociones: una sociedad constituida por n personas, una matriz de logros $\boldsymbol{X}$ donde cada entrada x_{ij} muestra la realización de la persona i en la dimensión j, z_j es la línea de pobreza sobre la dimensión j, $I_{(x_{ij}<z_j)}$es una función de identificación de la pobreza, g_{ij} es la brecha de la persona i en la dimensión j, w_j es el peso asignado a la dimensión j, α es una medida de aversión ante la privación. $\rho(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{z})$ es una función de identificación de los pobres que se calcula a partir del vector de carencias del individuo $\boldsymbol{x}_i$, q es el número de individuos identificados como pobres y Z es el conjunto de estos. Por último, P es el índice de privación.

Bajo estas nociones se han producido diferentes metodologías para medir la pobreza durante los últimos años (Boltvinik, 2003; Mendoza Enríquez, 2011; Nahmad, Carrasco, & Nava, 2009). Estas propuestas difieren en su nivel de complejidad y en los propósitos para los cuales fueron creadas, por lo que tienen diferentes alcances y limitaciones. A continuación, se presenta un resumen de las principales metodologías empleadas en este tipo de análisis.

1.3 Principales metodologías para medir la pobreza

Los métodos unidimensionales para medir la pobreza se concentran en una única dimensión como criterio para definirla. Las siguientes metodologías se describen de acuerdo con Taylor (2015).

Índice de conteo y severidad de pobreza

Uno de los métodos más simples para medir la pobreza consiste en contar el número de individuos que se encuentran debajo de una línea de pobreza y dividirlo entre el total de la población de la siguiente forma: $P_H = {}^{q}/_{n}$. Una extensión del método anterior de medición, que permite comprender el nivel de pobreza de una sociedad en función de su distancia respecto a la línea de pobreza, consiste en sumar la diferencia entre este parámetro de referencia y el ingreso de cada individuo u hogar del conjunto. Este índice se denomina *Poverty Gap* o *Brecha de Pobreza* y se estima de la siguiente forma: $PG = \sum_{i=1}^{q}(z - Y_i)$.

Foster-Greer-Thorbecke

Un método que generaliza las dos formas de medición expuestas anteriormente, toma la brecha de pobreza como punto de partida para el cálculo, pero utiliza un parámetro α como exponente de la brecha con la intención de incorporar la severidad de esta brecha en la ponderación. Este método se estima a partir de la siguiente fórmula:

$$FGT_{\alpha} = \frac{1}{nz^{\alpha}} \sum_{i=1}^{q} (z - Y_i)^{\alpha}$$

Modelos multidimensionales

Respecto a los métodos multidimensionales de evaluación de la pobreza, también se han desarrollado un gran número de propuestas. A continuación, se muestran las que han sido más reconocidas por la literatura por su relevancia de acuerdo con Alkire y Foster (2009, 2011), y con Alkire et. al. (2014, 2015).

Panel de indicadores

Se trata de la evaluar el nivel de privación de cada dimensión por separado y presentar la información en un vector d-dimensional. Este análisis permite observar el nivel de privación agregado de cada dimensión, lo que hace posible realizar análisis muy completos sobre los cambios específicos en la pobreza de una sociedad a través de sus múltiples dimensiones. Un panel de indicadores se representa de la siguiente forma: $DI = (P_1(x^1; z_1), \ldots, P_1(x^d; z_d))$

Índices compuestos

Es una función que convierte d privaciones en un número real. Con este proceso se busca agregar la información de todas las dimensiones para reducirlas a una medida, pero no hace ninguna distinción entre ellas, por lo que no refleja la distribución conjunta de éstas ni permite identificar quiénes son los pobres o cuántos son, ya que el proceso de agregación se realiza en el ámbito de las privaciones y no de los individuos. Los índices compuestos se representan de la siguiente forma: $CI = P_1(x^1; z_1) \times P_1(x^2; z_2) \dots \times\ P_1(x^d; z_d)$

Diagramas de Venn

Mediante el uso de diagramas de Venn para evaluar la pobreza, se busca ilustrar el conjunto de individuos que sufre privaciones en cada dimensión y la intersección entre estos conjuntos. La principal ventaja de este tipo de análisis es que logra exponer con mayor claridad visual el número de individuos que presentan determinadas carencias, así como la intersección entre estos conjuntos. Sin embargo, este método carece de un criterio de agregación que permita comparar dos sociedades distintas.

Enfoque de dominancia

Encontrar una relación de dominancia entre dos poblaciones significa que el orden establecido entre ellas debe permanecer sin importar el conjunto de medidas o umbrales utilizados para ello, esto implica que la comparación entre ellas es insensible ante cambios en los criterios de medición. Formalmente, se dice que una sociedad que presenta una matriz de realización X domina estocásticamente a una sociedad que presenta una matriz Y, o XPY, si $P(X; z) \leq P(Y; z)\ \forall\ z$ y $P(X; z) < P(Y; z)$ para algún conjunto de umbrales de pobreza z. La herramienta más utilizada para este tipo de análisis es la dominancia estocástica, que consiste en comparar la función de distribución conjunta acumulada de ambas poblaciones, en caso de que la función de distribución conjunta acumulada de X se encuentre por debajo de la función de distribución conjunta acumulada de Y se dice que XPY.

Enfoque estadístico

Los análisis estadísticos sobre la pobreza pueden dividirse en dos categorías: métodos descriptivos y métodos basados en modelos. Los métodos descriptivos buscan resumir la información contenida un conjunto de datos de forma que pueda ser comprendida con mayor facilidad. Entre los métodos más empleados en la investigación sobre la pobreza se encuentran los siguientes: análisis de clusters, análisis de componentes principales y análisis de correspondencias múltiples. Por otra parte, los métodos basados en modelos, o modelos de variable latente, tienen la finalidad de realizar inferencias respecto a la población. Los métodos que más se utilizan son los siguientes: análisis de clases latentes, análisis de factores y modelos de ecuaciones estructurales.

Enfoque de conjuntos difusos

Mediante este método se busca extender la construcción de las categorías que dividen a la población entre quienes son pobres y quienes no lo son. Para ello se introduce una función de membrecía que puede tomar valores entre cero y uno, la cual se entiende como el grado de pertenencia de un sujeto respecto a un conjunto determinado, que en este caso se trata del conjunto de individuos en situación de pobreza.

1.4 Medición de la pobreza en México

En México la medición de la pobreza también ha sufrido variaciones a través del tiempo. De acuerdo con Boltvinik (2013), en América Latina se empleaba el método de conteo por ingresos y el método de Necesidades Básicas Insatisfechas desde los años setentas hasta 1990, cuando se incorporó el método de la Variante Original del Método de Medición Integrada. Esta propuesta presentada por Boltvinik (2010) contempla, para el proceso de identificación de los pobres, la utilización de dos índices complementarios: el *indicador de intensidad de pobreza de ingreso estable equivalente* y el *índice de privación de necesidades básicas insatisfechas*.

El indicador de intensidad de pobreza de ingreso estable equivalente (YEE) utiliza dos parámetros para su construcción: el ingreso corriente total estable equivalente (YED), y una línea de pobreza (LP) como función que depende del número de habitantes del hogar P_i y de sus necesidades por grupos de edad expresadas como proporción de las necesidades de un varón adulto VAE_i.

$$YEE_i = \frac{YED_i - LP^{P_i,VAE_i}}{LP^{P_i,VAE_i}}$$

La construcción del índice de necesidades básicas insatisfechas (NBI) considera la incorporación del nivel de privación en las siguientes dimensiones: Educación (PEH), Calidad y Espacio de la Vivienda (PCEV), Servicios sanitarios (PS), Eliminación de basura (PEB), Energía doméstica (PCE), Comunicaciones (PCm), Acceso a alimentos (PAA) y Acceso a servicios de salud (PASS). Se crean indicadores de bienestar para estas variables cuyos valores están restringidos entre -1 y 1.

$$NBI_i = PEH_i(K^E) + PCEV_i(K^V) + PS_i(K^S) + PEB_i(K^B)$$
$$+PCE_i(K^{En}) + PCm_i(K^{Cm}) + PAA_i(K^A) + PASS_i(K^{SS})$$

Finalmente, ambos indicadores se suman para construir el Índice de Pobreza Integrado (IMIP), utilizando los ponderadores K^{YEE} y K^{NBI}, el cual clasifica a los hogares como pobres, cuando su valor es positivo, y no pobres, cuando es menor o igual a cero.

$$I(MIP)_i = I(YEE)_i(K^{YEE}) + I(NBI)_i(K^{NBI})$$

CONEVAL

En el 2010, a raíz de la publicación de la nueva Ley General de Desarrollo Social (LGDS) el CONEVAL estableció una nueva metodología oficial para medir la pobreza a partir de un enfoque multidimensional considerando la opinión de un gran número de autores (Boltvinik, 2010; Foster, 2007). Mediante este nuevo enfoque se busca cumplir con la LGDS que establece que la pobreza debe ser evaluada en función de los siguientes indicadores: Ingreso corriente per cápita; Rezago educativo promedio en el hogar; Acceso a los servicios de salud; Acceso a la seguridad social; Calidad y espacios de la vivienda; Acceso a los servicios básicos en la vivienda; Acceso a la alimentación nutritiva y de calidad; Grado de cohesión social, y Grado de Accesibilidad a carretera pavimentada.

La metodología propuesta por el CONEVAL (Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social, 2014) puede entenderse como la combinación de dos índices diferentes: un índice de privación por ingresos y un índice de privación social. Considerando el ingreso del hogar y el índice de privación social, cada persona es clasificada en algunas de las siguientes categorías de acuerdo con su nivel de privación: Pobres multidimensionales, quienes tienen un ingreso menor a la Línea de Bienestar y por lo menos una carencia social; vulnerables por carencias sociales, quienes tienen un ingreso superior a la Línea de Bienestar pero al menos una carencia social; vulnerables por ingresos, quienes no presentan carencias sociales pero su ingreso es inferior a la Línea de Bienestar; y no pobre multidimensional y no vulnerable, el resto de la población.

Estimación de la pobreza en México por medio de métodos estadísticos

Con la finalidad de explicar de forma más simple la presencia simultánea de las carencias que se presentan en la sociedad mexicana, se ha empleado el método de Análisis de Componentes Principales Comunes utilizando doce componentes entre el 2004 y el 2006 (Hernández Cid & Soto de la Rosa, 2010). Este método permite obtener estimadores consistentes a través del tiempo a diferencia de los métodos estadísticos tradicionales. Los resultados muestran que existe una mejoría respecto a la incidencia de la pobreza durante el periodo de tiempo de análisis, a pesar de que el cambio entre 2005 y 2006 no es significativo. Resulta interesante destacar que el primer componente encontrado en el análisis asigna un mayor peso a dimensiones que están relacionadas con la calidad de los servicios de salud y con el rezago educativo del hogar, que con el ingreso que éste percibe.

Pobreza difusa multidimensional en México

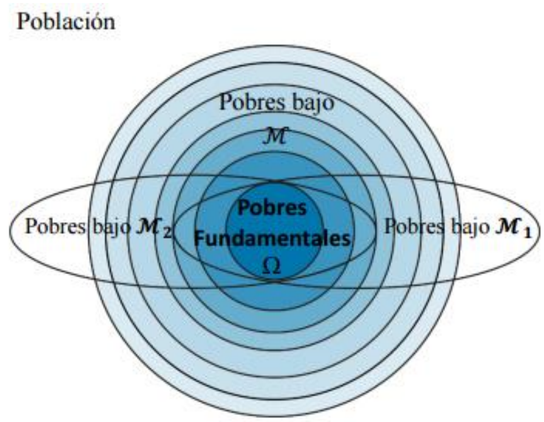
El enfoque de conjuntos difusos también ha sido empleado como método de medición en estudios sobre la pobreza en el país. Uno de estos estudios analiza el nivel de pobreza en las zonas rurales utilizando información sobre el ingreso equivalente; la calidad de los materiales de construcción de la vivienda y sus condiciones; el nivel de hacinamiento; el acceso a seguro de salud; el tipo de combustible empleado para cocinar; y la escolaridad del jefe de familia, así como su capacidad de hablar español (López-Feldman, Refugio Vallejo, & Fonseca, 2009). El enfoque de conjuntos difusos también ha sido empleado para analizar cómo han cambiado las condiciones de pobreza en México entre 1994 y 2006 utilizando como dimensiones el ingreso y la propiedad o el acceso de un hogar a bienes de carácter privado y a bienes de carácter público (Morales Ramos, 2009). Los resultados de estos estudios muestran que, aun cuando el ingreso es la dimensión más importante para determinar si una persona es o no pobre en el país, la consideración de los demás elementos dentro del análisis tiene un gran impacto en la medición, especialmente en el sector rural donde hay mayores carencias en dimensiones no monetarias.

La pobreza multidimensional en México en el contexto de América Latina

Adicionalmente, existen estudios en los que se busca comparar el desempeño del país en materia de la superación de la pobreza, con los resultados obtenidos en la región de América Latina. Uno de estos estudios compara la pobreza en Argentina, Brasil, Chile, El Salvador, México y Uruguay a partir de la combinación de un enfoque parecido al de las Necesidades Básicas Insatisfechas y una medida basada en el ingreso entre 1992 y 2006 (Battiston, Cruces, López-Calva, Lugo, & Santos, 2013). Los resultados muestran que existe una reducción importante de la pobreza dentro de la región en general. Sin embargo, se destaca que México, en particular, es un país en el que existe una gran cantidad de individuos que padecen carencias simultáneas.

Pobreza Fundamental

Ante una falta de consenso sobre la metodología más adecuada para medir la pobreza en nuestro país, Hernández-Solano (2015) propone encontrar el conjunto de individuos que sufren la pobreza con mayor intensidad por medio de la intersección de los conjuntos estimados a partir de cada uno de los diferentes métodos.



Fuente: Hernández (2015)

1.5 Participatory Poverty Assessments

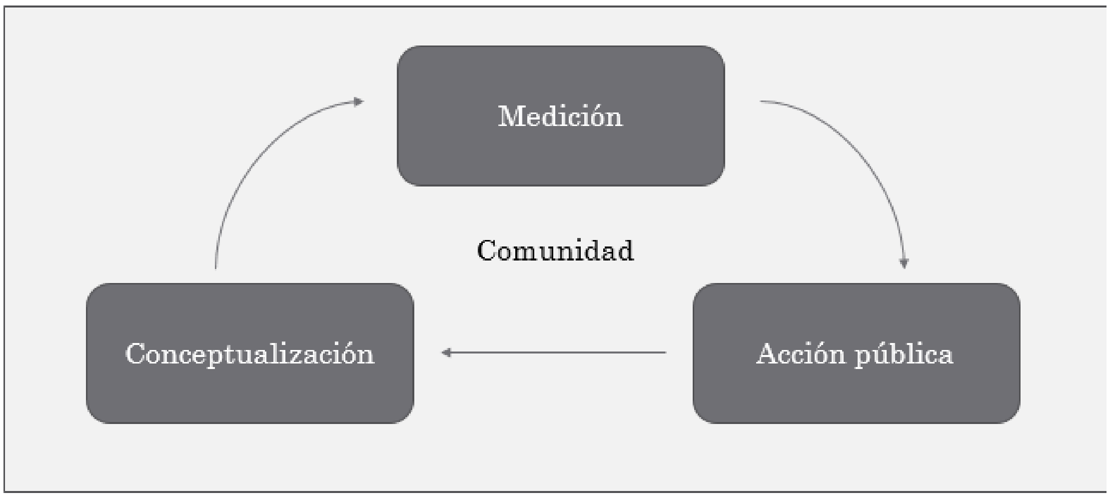
A pesar de que la definición de Sen pretenda ser objetiva, en tanto que establece sus criterios de medición en torno a los medios que pueden servir a un conjunto de fines equivalentes para toda sociedad, el autor admite que la naturaleza del establecimiento de aquellos criterios no es uniforme, si se considera que los medios de realización pueden variar entre cada sociedad, por lo que su reconocimiento debe producirse a través de un proceso de valoración social (Calderón, 2016).

Con el título de Participatory Poverty Assessments (PPA), el Banco Mundial impulsó una serie de proyectos de investigación de campo, realizados dentro de los países que obtenían apoyo por parte de la institución, con la finalidad de conocer los rasgos característicos de la población que se encontraba por debajo de la línea de pobreza (Norton A. , 2001). Al carecer de una metodología homóloga, los proyectos realizados en cada país podían emplear un procedimiento diferente para evaluar y analizar la información recuperada a través de las encuestas. Sin embargo, este conjunto de proyectos fue realizado bajo el precepto de que el estudio de la pobreza debe incorporar la opinión de las personas que se encuentran en esa situación, para poder comprender por completo el problema y plantear soluciones más adecuadas para enfrentarlo.

Una de las observaciones más importantes de esta serie de ejercicios sugiere que la experiencia de las personas que viven en situación de pobreza no sólo se constituye por múltiples dimensiones de carencia, sino que éstas se interrelacionan formando redes de desventajas que se refuerzan unas a otras. Esta interrelación puede representarse como una red con doce nodos como se muestra en la Figura 1 en la sección de anexos: pobreza material; vulnerabilidad e inseguridad; malas relaciones sociales; debilidad física y agotamiento; ubicación; carencia de tiempo; dimensión estacional; capacidades; inferioridad legal; falta de información; falta de influencia política (Chambers, 2007). También se señala que cuatro dimensiones han sido descuidadas por la mayor parte de los estudios cuantitativos de la pobreza: la estacionalidad tropical; el lugar donde viven y trabajan las personas en situación de pobreza; su tiempo y energía, y su fortaleza y salud corporal. Esto refuerza la noción de que la experiencia de la pobreza es multidimensional: constituida por la interacción entre múltiples necesidades insatisfechas dependiendo del contexto y el proceso de vida de cada grupo de individuos (Narayan, Patel, Schafft, Rademacher, & Koch-schulte, 2000).

Bajo esta consideración, la propuesta del presente trabajo de tesis se plantea como una herramienta de medición multidimensional de la pobreza cuyas ponderaciones, tanto las individuales como las de sus interacciones, puedan ser actualizadas como se muestra en el siguiente esquema: a partir de la conceptualización de la pobreza que emerge de una comunidad, se generan criterios de medición que pueden ser utilizados posteriormente para el emprendimiento de una acción social. En un nuevo ciclo, una nueva forma de conceptualizar la pobreza surge de las necesidades que prevalecen dentro de la comunidad que ha procurado mitigar el problema de acuerdo con los criterios considerados previamente, lo que da lugar a que deban proponerse nuevas ponderaciones dentro de la *matriz de interacción multidimensional* que se muestra en el siguiente capítulo.

A pesar de que la nueva estimación no sea comparable con la anterior debido a que, con cada ciclo, los parámetros de medición serían modificados, si se cuenta con la información de cada periodo es posible volver a estimar la pobreza en periodos anteriores utilizando los nuevos parámetros o estimar la pobreza actual utilizando los parámetros anteriores. Esto permitiría evaluar la efectividad de los programas que han sido utilizados para su mitigación en función de los criterios establecidos previamente. Sin embargo, cabe recordar que el objetivo principal de esta propuesta es el establecimiento de objetivos para la acción pública, al reconocer las prioridades de la comunidad y no el establecimiento de medidas invariantes.



Fuente: elaboración propia

CAPITULO II

2.1 Propuesta metodológica

Siguiendo el esquema propuesto por Alkire y Foster (2014, 2015) consideramos una *sociedad* conformada por n individuos para la cual hay d dimensiones relevantes para el análisis de la pobreza. x_{ji} denota la medida que el individuo i perteneciente al grupo $G(i)$ dentro de la *sociedad* posee de la dimensión j. $z_{jG(i)}$ indica el umbral de pobreza y $\alpha_{jG(i)}$ la sensibilidad ante la carencia de esta misma dimensión en el grupo $G(i)$. Aplicando una transformación sobre cada dimensión se construye el vector $\boldsymbol{g}_i$ en el que cada entrada indica el nivel de carencia que sufre el individuo i para una de las dimensiones: $g_{ji} = \left(\frac{z_{jG(i)} - x_{ji}}{z_{jG(i)}}\right)$ que es multiplicada por una función indicadora $I_{(x_{ji} < z_{jG(i)})}$ que toma el valor de una unidad cuando la realización del individuo es menor a la línea de pobreza, y cero en otro caso.

$$\boldsymbol{g}_i = \begin{pmatrix} {g_{1i}}^{\alpha_{1G(i)}} \cdot I_{(x_{1i}<z_{1G(i)})} \\ {g_{2i}}^{\alpha_{2G(i)}} \cdot I_{(x_{2i}<z_{2G(i)})} \\ \vdots \\ {g_{di}}^{\alpha_{dG(i)}} \cdot I_{(x_{di}<z_dG(i))} \end{pmatrix}$$

El caso en el que la sensibilidad ante una carencia es nula, cuando $\alpha_{jG(i)} = 0$, la j-ésima entrada del vector es sustituida por la función indicadora de esa dimensión. De esta forma se evita que se calculen valores que no estén determinados matemáticamente, y se obtiene una estimación consistente con los objetivos de una medida con esa sensibilidad: considerar que exista o no una carencia.

El empleo de una medida que considere las interacciones entre las entradas de un vector, permite incorporar un conjunto de elementos que normalmente no serían considerados como constitutivos de la pobreza, pero que pueden agravar (agravantes) su experiencia o mitigarla (mitigantes). La metodología desarrollada en el presente trabajo considera, en su planteamiento, el nivel de realización de cada individuo sobre k agravantes a_{ji} y sobre l mitigantes m_{ji}, con los que se construyen los vectores $(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i})$ y $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i}$ cuyas entradas expresan el nivel alcanzado por los agravantes y los mitigantes respecto a un nivel máximo de interacción con las carencias ${a_{jG(i)}}^M$ y ${m_{jG(i)}}^M$ apartir de las siguientes fórmulas: $g_{a_{ji}} = \left(\frac{{a_{jG(i)}}^M - a_{ji}}{{a_{jG(i)}}^M}\right)$ y $g_{m_{ji}} = \left(\frac{{m_{jG(i)}}^M - m_{ji}}{{m_{jG(i)}}^M}\right)$

$$\boldsymbol{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i} = \begin{pmatrix} 1 - {g_{a_{1i}}}^{\beta_{1G(i)}} \cdot I_{(a_{1i}<{a_{1G(i)}}^M)} \\ 1 - {g_{a_{2i}}}^{\beta_{2G(i)}} \cdot I_{(a_{2i}<{a_{2G(i)}}^M)} \\ \vdots \\ 1 - {g_{a_{ki}}}^{\beta_{kG(i)}} \cdot I_{(a_{ki}<{a_{kG(i)}}^M)} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i} = \begin{pmatrix} {g_{m_{1i}}}^{\gamma_{1G(i)}} \cdot I_{(m_{1i}<{m_{1G(i)}}^M)} \\ {g_{m_{2i}}}^{\gamma_{2G(i)}} \cdot I_{(m_{2i}<{m_{2G(i)}}^M)} \\ \vdots \\ {g_{m_{li}}}^{\gamma_{lG(i)}} \cdot I_{(m_{li}<{m_{lG(i)}}^M)} \end{pmatrix}$$

El vector que será utilizado para calcular la medida resulta de concatenar los vectores de carencias, agravantes y mitigantes $\boldsymbol{g}_i || \boldsymbol{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i} || \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i}$:

$$\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i} = \begin{pmatrix} {g_{1i}}^{\alpha_{1G(i)}} \cdot I_{(x_{1i}<z_{1G(i)})} \\ {g_{2i}}^{\alpha_{2G(i)}} \cdot I_{(x_{2i}<z_{2G(i)})} \\ \vdots \\ {g_{di}}^{\alpha_{dG(i)}} \cdot I_{(x_{di}<z_dG(i))} \\ 1-{g_{a_{1i}}}^{\beta_{1G(i)}} \cdot I_{(a_{1i}<{a_{1G(i)}}^M)} \\ 1-{g_{a_{2i}}}^{\beta_{2G(i)}} \cdot I_{(a_{2i}<{a_{2G(i)}}^M)} \\ \vdots \\ 1-{g_{a_{ki}}}^{\beta_{kG(i)}} \cdot I_{(a_{ki}<{a_{kG(i)}}^M)} \\ {g_{m_{1i}}}^{\gamma_{1G(i)}} \cdot I_{(m_{1i}<{m_{1G(i)}}^M)} \\ {g_{m_{2i}}}^{\gamma_{2G(i)}} \cdot I_{(m_{2i}<{m_{2G(i)}}^M)} \\ \vdots \\ {g_{m_{li}}}^{\gamma_{lG(i)}} \cdot I_{(m_{li}<{m_{lG(i)}}^M)} \end{pmatrix}$$

Con la información previa se calcula el nivel de pobreza del individuo i como la razón de la norma $||(\cdot)||_w$ del vector $\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i}$ sobre la misma norma de un vector $\mathbf{1}_{d\times 1}||\mathbf{1}_{k\times 1}||\mathbf{1}_{l\times 1}$ que corresponde a los individuos más vulnerables de la sociedad, individuos que presentan todas las carencias y los agravantes en su máxima realización, y no presentan ningún mitigante.

$$p_i = \frac{\left\|\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i}\right\|_w}{\|\mathbf{1}_{d\times 1}||\mathbf{1}_{k\times 1}||\mathbf{1}_{l\times 1}\|_w}\rho(\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i;\boldsymbol{z})$$

$$= \frac{(\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})^T\boldsymbol{W}_{G(i)}(\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})}{{\mathbf{1}_{d+k+l\times 1}}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}_{d+k+l\times 1}}\rho(\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i;z)$$

La *matriz de interacción multidimensional* $\boldsymbol{W}_{G(i)\ (d+k+l)\times(d+k+l)}$ pondera la relevancia de cada elemento del vector como componente de la medición de la pobreza, y su interacción con el resto de ellos. También les otorga un peso a los agravantes y mitigantes que interactúan con cada una de las dimensiones. En específico, el término w_{ij} expresa cómo la carencia en la dimensión j afecta la experiencia de las personas en situación de pobreza por su carencia en la dimensión i. Por ejemplo, es posible que, si se carece de salud y además se carece de trabajo, entonces la pobreza debida a ambas carencias deba ser mayor que la suma de cada una de las carencias de manera aislada. Los términos u_{ij} y v_{ij} expresan cómo el agravante y el mitigante j afectan la experiencia por la carencia i.

$$\boldsymbol{W}_{G(i)} = \begin{pmatrix} w_{11g(i)} & w_{12g(i)} & \cdots & w_{1dg(i)} & 0 & \dots & 0 \\ w_{21g(i)} & w_{22g(i)} & \cdots & w_{2dg(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{d1g(i)} & w_{d2g(i)} & \cdots & w_{ddg(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{11g(i)} & u_{12g(i)} & \cdots & u_{1dg(i)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{11g(i)} & u_{11g(i)} & \cdots & u_{11g(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ v_{11g(i)} & v_{11g(i)} & \cdots & u_{11g(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{11g(i)} & v_{11g(i)} & \cdots & v_{11g(i)} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Para ilustrar cómo actúan los términos de interacción, en el anexo B se muestra gráficamente la relación entre los términos del vector de realización de un individuo a partir de medidas en las cuales la metodología considera dos dimensiones, los umbrales $z_1 = z_2 = 1$, los ponderadores $w_{11} = w_{22} = 1$, y la función de identificación $\rho(\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i;\boldsymbol{z}) = 1$; $w_{12} = w_{21}$ y toman los siguientes valores: 0, $1/2$, 1 y 2. Posteriormente se muestra la relación entre la realización en una dimensión con un agravante y con un mitigante que toman los valores $1/2$, 1 y 2.

Esta matriz podría construirse mediante diferentes métodos, ya sea a partir de una propuesta generada por el propio investigador o a través de un debate público. Una forma de hacerlo que sería consistente con el paradigma de las evaluaciones participativas de la pobreza, consistiría en considerar la información sobre la experiencia de los individuos que podrían ser el objetivo de una acción social, para construir la matriz de interacciones por grupos tomando, como referencia su propia opinión. Esto se consigue al minimizar la suma de las distancias entre la matriz definida por cada unidad de análisis $\boldsymbol{W}_{p\,i}$, respecto de la matriz constituida por los parámetros a estimar.

$$\boldsymbol{W}_{G(i)\ (d+k+l)\times(d+k+l)} = \underset{w_{jk_{G(i)}}, a_{jk}, m_{jk}}{Min} \sum_{S_{G(i)}} \mathbf{1}_{d+k+l}{}^{T} \left| \boldsymbol{W}_{p\,i} - \boldsymbol{W}_{G(i)} \right| \mathbf{1}_{d+k+l}$$

Después de llevar a cabo el proceso de agregación a nivel individual, se calcula la medida de la pobreza en la sociedad $P(S)$, como el promedio de las medidas individuales p_i al dividir su suma entre el número de individuos que constituye esa sociedad que puede expresarse como la cardinalidad de su conjunto $\#S$:

$$P(S) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\#S}$$

2.2 Compatibilidad con otras metodologías

Consideramos que la propuesta metodológica establecida en el presente trabajo es una generalización capaz de ofrecer la misma información que una gran cantidad de mediciones como puede mostrarse en los siguientes ejemplos:

Tasa de conteo de pobreza

$$P_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(y_i < z)$$

Esta medida puede recrearse a través de la norma de pobreza si consideramos un vector con una única entrada, debido a que esta forma de medida emplea únicamente una dimensión, haciendo $\alpha_1 = 0$ y $\boldsymbol{W}_{G(i)} = 1$

Brecha de pobreza

$$P_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (z - y_i) \cdot I(y_i < z)$$

Al igual que con el criterio de medición anterior, la medida de la brecha de pobreza puede recrearse a través la metodología presentada en esta propuesta, nuevamente podemos considerar un vector con una única entrada, se hace $\alpha_1 = 1/2 \ y \, \boldsymbol{W}_{G(i)} = 1$

Foster-Greer-Thorbecke

$$P_\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{z-y_i}{z}\right)^{\alpha} \cdot I(y_i < z)$$

Para representar la definición anterior se requiere hacer algunos cambios adicionales. Es este caso se construye con $\alpha_1 = \alpha/2$ y $\boldsymbol{W}_{G(i)} = 1$

Familia de medidas de Alkire y Foster

Se considera también que la propuesta desarrollada en el presente estudio puede ser también una generalización de la familia de medidas presentadas por Alkire y Foster

$$M_\alpha = \frac{1}{nd}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} w_j (\frac{z_j - x_{ij}}{z_j})^{\alpha} * \rho_k(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{z}) * I(x_{ij} < z_j)$$

A continuación, se presenta la demostración de que la medida propuesta en el presente estudio es una generalización de la fórmula planteada por Alkire y Foster. $a_i = \emptyset \; m_i = \emptyset$

$$p = \frac{\begin{pmatrix} {g_{1i}}^{\alpha_{1G(i)}} \cdot I_{(x_{1i} < z_{1G(i)})} \\ {g_{2i}}^{\alpha_{2G(i)}} \cdot I_{(x_{2i} < z_{2G(i)})} \\ \vdots \\ {g_{di}}^{\alpha_{dG(i)}} \cdot I_{(x_{di} < z_dG(i))} \end{pmatrix}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \begin{pmatrix} {g_{1i}}^{\alpha_{1G(i)}} \cdot I_{(x_{1i} < z_{1G(i)})} \\ {g_{2i}}^{\alpha_{2G(i)}} \cdot I_{(x_{2i} < z_{2G(i)})} \\ \vdots \\ {g_{di}}^{\alpha_{dG(i)}} \cdot I_{(x_{di} < z_dG(i))} \end{pmatrix}}{{\boldsymbol{1}_{d\times 1}}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \boldsymbol{1}_{d\times 1}} \rho_k(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{z})$$

Hacemos $W_{g(i)} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_d \end{pmatrix}$, $a_i = \emptyset$ y sustituimos

$$= \frac{\begin{pmatrix} {g_{1i}}^{\alpha_{1G(i)}} \cdot I_{(x_{1i}<z_{1G(i)})} \\ {g_{2i}}^{\alpha_{2G(i)}} \cdot I_{(x_{2i}<z_{2G(i)})} \\ \vdots \\ {g_{di}}^{\alpha_{dG(i)}} \cdot I_{(x_{di}<z_{d}G(i))} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {g_{1i}}^{\alpha_{1G(i)}} \cdot I_{(x_{1i}<z_{1G(i)})} \\ {g_{2i}}^{\alpha_{2G(i)}} \cdot I_{(x_{2i}<z_{2G(i)})} \\ \vdots \\ {g_{di}}^{\alpha_{dG(i)}} \cdot I_{(x_{di}<z_{d}G(i))} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} \rho_k(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{z})$$

$$p = \frac{\sum_{j=1}^{k} w_j \left(\left(\frac{z_{jG(i)} - x_{ji}}{z_{jG(i)}} \right)^{\alpha_{jG(i)}} \cdot I_{(x_{ji}<z_{jG(i)})} \right)^2}{\sum_{j=1}^{k} w_j} \rho_k(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{z})$$

Por lo tanto

$$P(S) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\#S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j=1}^{d} w_j \left(\frac{z_{jG(i)} - x_{ji}}{z_{jG(i)}} \right)^{2\alpha_j} \cdot I_{(x_{ji}<z_{jG(i)})}}{\#S \cdot \sum_{j=1}^{d} w_j} \rho_k(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{z})$$

$$P(S) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j=1}^{d} w_j \left(\frac{z_{jG(i)} - x_{ji}}{z_{jG(i)}} \right)^{2\alpha_j} \cdot I_{(x_{ji}<z_{jG(i)})}}{\sum_{j=1}^{d} w_j} \rho_k(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{z})$$

Haciendo $\sum_{j=1}^{k} w_j = d$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_d = \alpha/2$ tenemos

$$P(S) = \frac{1}{nd} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} w_j \left(\frac{z_j - x_{ij}}{z_j} \right)^{\alpha} \cdot I_{(x_{ji}<z_{ji})} \rho_k(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{z})$$

Que es una expresión similar a la que presentan Alkire y Foster.

CAPÍTULO III

3.1 Satisfacción de los axiomas para las medidas de pobreza

A continuación, se demuestra que la medida establecida propuesta en el presente trabajo cumple con los axiomas propuestos por Foster (2008) para cualquier medida de pobreza $M(x;z)$ que se construya a partir de la información de los logros de una sociedad x y que considere el conjunto de umbrales $\boldsymbol{z}$. Este conjunto de axiomas, que deben satisfacer los métodos de evaluación de la pobreza de acuerdo con la discusión que se ha desarrollado durante los últimos años.

Descomponibilidad. Para cualquier par de matrices x y y, se tiene que

$$M(x,y;z) = \frac{n(x)}{n(x,y)}M(x;z) + \frac{n(y)}{n(x,y)}M(y;z)$$

Por demostrar

$$P(x,y) = \frac{\#S_x}{\#S_x + \#S_y}\left(\frac{\sum_{S_x} pi}{\#S_x}\right) + \frac{\#S_y}{\#S_x + \#S_y}\left(\frac{\sum_{S_y} pi}{\#S_y}\right) = P(S)$$

Demostración

$$P(x,y) = \frac{\sum_{S_x} pi}{\#S_x + \#S_y} + \frac{\sum_{S_y} pi}{\#S_x + \#S_y}$$

$$P(x,y) = \frac{\sum_{S_x} pi + \sum_{S_y} pi}{\#S_x + \#S_y}$$

$$P(x,y) = \frac{\sum_{S} pi}{\#S} = P(\mathrm{S}) \blacksquare$$

Invarianza ante Replicación. Si x es obtenida de y a través de un proceso de replicación, tal que $x = (y, y, y, \dots y)$, entonces

$$M(x; z) = M(y; z)$$

Por demostrar

$$P(x) = \frac{\sum_{S_x} pi}{\#S_x} = \frac{\sum_{S_y, S_y, S_y \dots S_y} pi}{\#\{S_y, S_y, S_y \dots S_y\}} = P(y)$$

Demostración

$$P(x) = \frac{\sum_{S_y, S_y, S_y \dots S_y} pi}{\#\{S_y, S_y, S_y \dots S_y\}}$$

$$P(x) = \frac{\sum_{S_y} pi + \sum_{S_y} pi + \sum_{S_y} pi + \cdots \sum_{S_y} pi}{\#S_y + \#S_y + \#S_y + \cdots \#S_y}$$

$$P(x) = \frac{n \sum_{S_y} pi}{n \#S_y}$$

$$P(x) = \frac{\sum_{S_y} pi}{\#S_y} \; P(y) \; \blacksquare$$

Enfoque en la Pobreza Si x es obtenida de y por un incremento simple entre los no-pobres (el incremento en la realización de alguna dimensión), entonces

$$M(x; z) = M(y; z)$$

Por demostrar

$$P(x) = \frac{\sum_{S_x} pi}{\#S_x} = \frac{\sum_{S_{y^+}} pi^+}{\#S_{y^+}} = P(y);$$

$$donde\ S_{y^+}\ es\ el\ conjunto\ sobre\ el\ cual\ se\ realizó\ el\ incremento$$

Demostración

$$p_i{}^+ = \frac{(\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})^{+^T}\boldsymbol{W}_{G(i)}(\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})^+}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}}\rho((\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i)^+;\boldsymbol{z})\ ;$$

$$pero\ \rho((\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i)^+;\boldsymbol{z})\ = \rho(\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i;\boldsymbol{z})\ = 0\ \forall\ i \in S_{y^+}$$

$$\therefore P(x) = \frac{\sum_{S_{y^+}} pi^+}{\#S_{y^+}} = \frac{\sum_{S_y} pi}{\#S_y} = P(y)\blacksquare$$

Enfoque en la Privación. Si x es obtenida de y por un incremento simple de quienes no tienen privaciones, entonces

$$M(x; z) = M(y; z)$$

Por demostrar

$$P(x) = \frac{\sum_{S_x} pi}{\#S_x} = \frac{\sum_{S_{y^+}} pi^+}{\#S_{y^+}} = P(y);$$

$$donde\ S_{y^+}\ es\ el\ conjunto\ sobre\ el\ cual\ se\ realizó\ el\ incremento$$

Demostración

$$p_i{}^{+} = \frac{(\boldsymbol{g}_i||\boldsymbol{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})^{+^T}\boldsymbol{W}_{G(i)}(\boldsymbol{g}_i||\boldsymbol{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})^{+}}{\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\boldsymbol{1}}\rho((\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i)^{+};\boldsymbol{z});$$

$$pero\ I_{(x^{+}{}_{ji}<z_{jG(i)})} = I_{(x_{ji}<z_{jG(i)})} = 0$$

$$por\ lo\ tanto\ x_i{}^{+} = x_i\ y$$

$$p_i{}^{+} = \frac{\left(\boldsymbol{g}_i||\boldsymbol{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i}\right)^{+^T}\boldsymbol{W}_{G(i)}\left(\boldsymbol{g}_i||\boldsymbol{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i}\right)^{+}}{\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\boldsymbol{1}}\rho((\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i)^{+};\boldsymbol{z})$$

$$= \frac{(\boldsymbol{g}_i||\boldsymbol{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})^{T}\boldsymbol{W}_{G(i)}(\boldsymbol{g}_i||\boldsymbol{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})}{\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\boldsymbol{1}}\rho(\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i;\boldsymbol{z}) = p_i$$

$$\therefore P(x) = \frac{\sum_{S_{y^+}} pi^{+}}{\#S_{y^+}}\frac{\sum_{S_y} pi}{\#S_y} = P(y)\blacksquare$$

Monotonicidad Débil. Si x es obtenida de y por un incremento simple entre los pobres, entonces

$$M(x;z) \leq M(y;z)$$

Por demostrar

$$P(x^{+}) = P(x)\ si\ x_j \geq z_j, \qquad \frac{\partial P(x)}{\partial x_j} < 0\ si\ x_j < z_j;$$

$$donde\ S_{x^+} es\ el\ conjunto\ sobre\ el\ cual\ se\ realizó\ el\ incremento\ (pobres)$$

Demostración

$$si\ x_j \geq z_j\ entonces\ I_{(x_j<z_j)} = 0\ y\ \ P(x^{+}) = P(x)$$

$$si\ x_j < z_j\ entonces\ \frac{\partial P(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\sum_{S_x} pi}{\#S_x} = \frac{1}{\#S_x}\sum \frac{\partial p_i}{\partial x_j}$$

$$= \frac{1}{\#S_x}\sum \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{(\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})^T \boldsymbol{W}_{G(i)}(\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}}\rho(\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i;\boldsymbol{z})$$

$$= \frac{1}{\#S_x\mathbf{1}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}}\sum \frac{\partial {x_i}^T}{\partial x_j}\boldsymbol{W}_{G(i)}\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i}\,\rho$$

$$= \frac{1}{\#S_x\mathbf{1}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}}\sum \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} {g_{1i}}^{\alpha_{1G(i)}} \cdot I_{(x_{1i}<z_{1G(i)})} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j} {g_{ji}}^{\alpha_{jG(i)}} \cdot I_{(x_{\mathrm{j}i}<z_{\mathrm{j}G(i)})} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(1-{g_{a_{1i}}}^{\beta_{1G(i)}}) \cdot I_{(a_{1i}<{a_{1G(i)}}^{max})} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j} {g_{m_{li}}}^{\beta_{lG(i)}} \cdot I_{(m_{li}<{m_{lG(i)}}^{max})} \end{pmatrix}^T \boldsymbol{W}_{G(i)}\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i}\,\rho$$

$$= \frac{1}{\#S_x\mathbf{1}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}}\sum \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\alpha_j\left(\frac{z_{jG(i)}-x_{\mathrm{j}i}}{z_{jG(i)}}\right)^{\alpha_j-1} \cdot I_{(x_{ji}<z_{jG(i)})} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{W}_{G(i)}\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i}\rho$$

$$= \frac{-1}{\#S_x\mathbf{1}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}}\sum \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha_j {g_{ji}}^{\alpha_{jG(i)}-1} \cdot I_{(x_{ji}<z_{jG(i)})} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{W}_{G(i)}\boldsymbol{g}_i||\mathbf{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i}\rho \leq 0\blacksquare$$

Monotonicidad. Si M satisface monotonicidad débil y x es obtenida de y por un incremento en una dimensión con privaciones entre los pobres, entonces

$$M(x;z) < M(y;z)$$

Por demostrar

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_j} < 0 \; si \; x_j < z_j;$$

Demostración

$$Fue\ demostrado\ junto\ con\ el\ axioma\ anterior$$

Monotonicidad Dimensional. Si x es obtenida de y por un incremento dimensional entre los pobres (remover una dimensión en la que se presenta una privación), entonces

$$M(x;z) < M(y;z)$$

Por demostrar

$$Sea\ j\ una\ dimensión\ en\ la\ que\ el\ individuo\ i\ presenta\ una\ privación, entonces$$

$$P\left(x_{1i}, x_{2i}, \dots x_{j-1i}, 0, x_{j+1i}, \dots x_{di}\right) < P(x)$$

Demostración

$$Se\ deriva\ del\ axioma\ de\ Monotonicidad$$

No-trivialidad. M puede tomar al menos dos valores

$Por\ contradicción$: $es\ posible\ enumerar\ una\ infinidad\ de\ ejemplos\ que\ cumplen\ la\ condición$

Normalización. M puede tomar un valor mínimo de 0 y un valor máximo de 1

Por demostrar

$$Min\ P(S) = 0;\ Max\ P(S) = 1$$

Demostración

Dado que $\boldsymbol{W}_{G(i)}$ y $\boldsymbol{1}_{d+k+l\times 1}$ son constantes en $P(S)$, el valor mínimo y el valor máximo dependen de las entradas del vector x_i. Por construcción, el mínimo se alcanza cuando cada $x_{ji} \geq z_{jG(i)}$ sobrepasando el límite establecido en la medida, obteniendo

$$\boldsymbol{g}_i = \begin{pmatrix} {g_{1i}}^{\alpha_{1G(i)}} \cdot 0 \\ {g_{2i}}^{\alpha_{2G(i)}} \cdot 0 \\ \vdots \\ {g_{di}}^{\alpha_{dG(i)}} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}_{dx1}$$

Entonces tenemos

$$p_i = \frac{(\boldsymbol{0}_{d\times 1}||\boldsymbol{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})^T \boldsymbol{W}_{G(i)} (\boldsymbol{0}_{d\times 1}||\boldsymbol{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})}{{\boldsymbol{1}_{d+k+l\times 1}}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \boldsymbol{1}_{d+k+l\times 1}} \rho(\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i; \boldsymbol{z}) = 0\ \ \forall\ i$$

Por lo tanto

$$P(S) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 0}{n} = 0$$

Del mismo modo, el máximo se alcanza cuando cada $x_{ij} = 0\ \forall\ j$, representando a un individuo que tuviese carencias absolutas:

$$\boldsymbol{g}_i = \begin{pmatrix} \left(\frac{z_{1G(i)}}{z_{1G(i)}}\right)^{\alpha_{1G(i)}} \cdot 1 \\ \left(\frac{z_{2G(i)}}{z_{2G(i)}}\right)^{\alpha_{2G(i)}} \cdot 1 \\ \vdots \\ \left(\frac{z_{dG(i)}}{z_{dG(i)}}\right)^{\alpha_{dG(i)}} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_{d\times 1}$$

y cada $a_{ji} = a^M{}_{ji}$ y $m_{ji} = 0 \; \forall \, j$, vectores correspondientes a los de un individuo con el máximo valor de agravantes y sin ningún mitigante presente:

$$\mathbf{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i} = \begin{pmatrix} 1 - g_{a_{1i}}{}^{\beta_{1G(i)}} \cdot 0 \\ 1 - g_{a_{2i}}{}^{\beta_{2G(i)}} \cdot 0 \\ \vdots \\ 1 - g_{a_{di}}{}^{\beta_{dG(i)}} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_{kx1} \quad \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i} = \begin{pmatrix} \left(\frac{m^M{}_{1G(i)}}{m^M{}_{1G(i)}}\right)^{\gamma_1} \cdot 1 \\ \left(\frac{m^M{}_{2G(i)}}{m^M{}_{2G(i)}}\right)^{\gamma_2} \cdot 1 \\ \vdots \\ \left(\frac{m^M{}_{lG(i)}}{m^M{}_{lG(i)}}\right)^{\gamma_l} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_{l\times 1}$$

Entonces tenemos

$$p_i = \frac{(\mathbf{1}_{d\times 1}||\mathbf{1}_{k\times 1}||\mathbf{1}_{l\times 1})^T \boldsymbol{W}_{G(i)} (\mathbf{1}_{d\times 1}||\mathbf{1}_{k\times 1}||\mathbf{1}_{l\times 1})}{\mathbf{1}_{d+k+l\times 1}{}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}_{d+k+l\times 1}} \rho(\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i; \boldsymbol{z}) = 1 \;\; \forall \, i$$

Por lo tanto

$$P(S) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n 1}{n} = \frac{n}{n} = 1 \blacksquare$$

3.2 Axiomas que no se satisfacen

En esta sección se ofrecen ejemplos que demuestran la imposibilidad de la medida propuesta en el presente trabajo para cumplir con los axiomas.

Simetría. Si x es obtenida de y a través de un proceso de permutación, tal que $x = \Pi y$, entonces

$$M(x; z) \neq M(y; z)$$

Por demostrar

$$P(x) = \frac{\sum_{S_x} pi}{\#S_x} \neq \frac{\sum_{S_{\Pi y}} pi}{\#S_{\Pi y}} = P(y)$$

A pesar de que cualquier diferencia en los criterios establecidos por grupos podría producir una alteración en la medida, si la permutación ocurre entre dos individuos que pertenecen a grupos distintos, el ejemplo siguiente muestra un caso en el que la diferencia se produce por una variación de la matriz de interacciones.

Se propone y como una sociedad en la cual el único criterio que varía entre dos individuos son los términos de interacción entre carencias, el vector de carencias del primer individuo es $\boldsymbol{g}_1 = \binom{1}{1}$ con $x_{11} = 0$ y $x_{21} = 0$, y el del segundo individuo es $\boldsymbol{g}_2 = \binom{0}{0}$ con $x_{12} = z_1$ y $x_{22} = z_2$, y se propone x como una sociedad en la que se realiza una permutación a partir de y mediante la cual el primer individuo y el segundo intercambian sus recursos, con lo que la asignación correspondiente sería la siguiente: $\boldsymbol{g}^*{}_1 = \binom{0}{0}$ y $\boldsymbol{g}^*{}_2 = \binom{1}{1}$. Si $\boldsymbol{W}_{G(1)} = \begin{pmatrix} 1 & w \\ w & 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{W}_{G(2)} = \begin{pmatrix} 1 & w' \\ w' & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$P(y)=\frac{1}{2}\frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1 & w\\ w & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\mathbf{1}_{2\times 1}{}^T\boldsymbol{W}_{G(1)}\mathbf{1}_{2\times 1}}+\frac{1}{2}\frac{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1 & w'\\ w' & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{\mathbf{1}_{2\times 1}{}^T\boldsymbol{W}_{G(2)}\mathbf{1}_{2\times 1}}=\frac{1}{2}\frac{1}{(2+2w)}$$

$$P(x)=\frac{1}{2}\frac{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1 & w\\ w & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{\mathbf{1}_{2\times 1}{}^T\boldsymbol{W}_{G(1)}\mathbf{1}_{2\times 1}}+\frac{1}{2}\frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1 & w'\\ w' & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\mathbf{1}_{2\times 1}{}^T\boldsymbol{W}_{G(2)}\mathbf{1}_{2\times 1}}=\frac{1}{2}\frac{1}{(2+2w')}$$

$$entonces\ P(x)\geq P(y)\ si\ w\geq w'\blacksquare$$

Los siguientes axiomas fueron propuestos con la finalidad de distinguir el conjunto de medidas sensibles ante la desigualdad en la distribución de los recursos. Estas medidas asignarán un valor más alto mientras mayor sea la diferencia en la realización de cualquier dimensión entre dos individuos. En el primer caso, cuando mediante una nivelación de realizaciones, los logros entre cualquier conjunto de individuos son redistribuidos. En el segundo caso, mediante un reordenamiento de asociación decreciente, se intercambia de uno en uno los logros de un individuo con menores niveles de carencia a otro con niveles más altos.

Transferencia débil. Si x es obtenido de y mediante una nivelación de realizaciones entre las personas en situación de pobreza, entonces

$$M(x;z)\leq M(y;z)$$

Por demostrar

$$\exists\ x\ tal\ que\ P(x)=\frac{\sum_{S_x} pi}{\#S_x}>\frac{\sum_{S_{y^*}} pi^*}{\#S_{y^*}}=P(y)$$

$$donde\ S_{y^*}\ es\ el\ conjunto\ sobre\ el\ cual\ se\ realizó\ la\ nivelación$$

Demostración

Se propone y como una sociedad en la cual $\boldsymbol{g}_1 = \binom{0}{1}$ cuando $x_{11} = z_1$ y $x_{21} = 0$, y $\boldsymbol{g}_2 = \binom{1}{0}$ cuando $x_{12} = 0$ y $x_{22} = z_2$, y se propone x como una sociedad en la que se realiza una transferencia desde y mediante la cual el primer individuo cede la mitad de sus recursos al segundo en la primera dimensión, con lo que la asignación correspondiente sería la siguiente: $\boldsymbol{g}^*{}_1 = \binom{0.5}{1}$ y $\boldsymbol{g}^*{}_2 = \binom{0.5}{0}$

$$P(y) = \frac{1}{2}\frac{\binom{0}{1}^T \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \binom{0}{1}}{\mathbf{1}_{2\times 1}{}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}_{2\times 1}} + \frac{1}{2}\frac{\binom{1}{0}^T \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \binom{1}{0}}{\mathbf{1}_{2\times 1}{}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}_{2\times 1}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{w_{22} + w_{11}}{\mathbf{1}_{2\times 1}{}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}_{2\times 1}}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}\frac{\binom{0.5}{1}^T \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \binom{0.5}{1}}{\mathbf{1}_{2\times 1}{}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}_{2\times 1}} + \frac{1}{2}\frac{\binom{0.5}{0}^T \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \binom{0.5}{0}}{\mathbf{1}_{2\times 1}{}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}_{2\times 1}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{0.5(w_{11} + w_{21} + w_{12}) + w_{22}}{\mathbf{1}_{2\times 1}{}^T \boldsymbol{W}_{g(i)} \mathbf{1}_{2\times 1}}$$

$$entonces\ P(x) \geq P(y)\ si\ 0.5(w_{11} + w_{21} + w_{12}) + w_{22} \geq w_{22} + w_{11}$$

$$\text{ó } 0.5(w_{21} + w_{12}) \geq w_{11} \blacksquare$$

Este ejemplo demuestra que una transferencia incrementa el nivel de pobreza en la medida en la que la presencia simultánea de carencias se vuelve más importante.

Reordenamiento débil. Si x se obtiene de y mediante un reordenamiento de asociación decreciente entre las personas en situación de pobreza, entonces

$$M(x;z) \leq M(y;z)$$

Por demostrar

$$\exists\ x\ tal\ que\ P(x) = \frac{\sum_{S_x} pi}{\#S_x} > \frac{\sum_{S_{y^*}} pi^*}{\#S_{y^*}} = P(y)$$

$$donde\ S_{y^+}\ es\ el\ conjunto\ sobre\ el\ cual\ se\ realizó\ el\ reordenamiento$$

Demostración

Se propone y como una sociedad en la cual $\boldsymbol{g}_1||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_1} = \binom{0^+}{1}$ cuando $x_{11} = z_1$ y $a_{11} = 0$, y $\boldsymbol{g}_2||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_2} = \binom{1}{0}$ cuando $x_{12} = 0$ y $a_{12} = z_2$, y se propone x como una sociedad en la que se realiza una transferencia desde y, mediante la cual el primer individuo cede sus recursos al segundo en la primera dimensión, con lo que la asignación correspondiente sería la siguiente: $\boldsymbol{g}^*{}_1||\boldsymbol{g}^*{}_{\boldsymbol{a}_1} = \binom{1}{1}$ y $\boldsymbol{g}^*{}_1||\boldsymbol{g}^*{}_{\boldsymbol{a}_1} = \binom{0^+}{0}$

$$P(y) = \frac{1}{2}\frac{\begin{pmatrix}0^+\\1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}w_{11} & 0\\u_{21} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0^+\\1\end{pmatrix}}{\mathbf{1}_{2\times1}{}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}_{2\times1}} + \frac{1}{2}\frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}w_{11} & 0\\u_{11} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\mathbf{1}_{2\times1}{}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}_{2\times1}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{w_{11}}{\mathbf{1}_{2\times1}{}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}_{2\times1}}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}\frac{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}w_{11} & 0\\u_{11} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{\mathbf{1}_{2\times1}{}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}_{2\times1}} + \frac{1}{2}\frac{\begin{pmatrix}0^+\\0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}w_{11} & 0\\u_{11} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0^+\\0\end{pmatrix}}{\mathbf{1}_{2\times1}{}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}_{2\times1}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{w_{11} + u_{11}}{\mathbf{1}_{2\times1}{}^{T}\boldsymbol{W}_{G(i)}\mathbf{1}_{2\times1}}$$

$$entonces\ P(x) \geq P(y)\ si\ w_{11} + u_{11} \geq w_{11}$$

$$ó\ \ u_{11} \geq 0 \blacksquare$$

Este ejemplo demuestra que si el reordenamiento ocurre entre un individuo que no presenta agravantes y un individuo que sí los presenta, el nivel de pobreza incrementa en la medida en la que el efecto del agravante tiene un mayor peso.

3.3 Axiomas adicionales

Simetría bajo igualdad de criterios. Si x es obtenida de y a través de un proceso de permutación, tal que $x = \Pi y$, entonces

$$M(x; z) = M(y; z)$$

Por demostrar

$$P(x) = \frac{\sum_{S_x} pi}{\# S_x} = \frac{\sum_{S_{\Pi y}} pi}{\# S_{\Pi y}} = P(y)$$

Demostración

$$P(x) = \frac{\sum_{S_{\Pi y}} pi}{\# S_{\Pi y}}; pero\ S_{\Pi y} = S_y$$

$$\therefore P(x) = \frac{\sum_{S_y} pi}{\# S_y} = P(y)\ \blacksquare$$

La estructura presentada en el trabajo actual sugiere que deben proponerse dos axiomas adicionales en relación con los agravantes y mitigantes.

Monotonicidad sobre los agravantes puros. Si $x||a$ es obtenida de $x||a^*$ por un incremento de un agravante puro entre la población en situación de pobreza que presenta agravantes, entonces

$$M(x||a;z) \geq M(x||a^*;z)$$

Por demostrar

$$\frac{\partial P(x)}{\partial a_j} \geq 0 \; si \; a_j < a^M{}_j;$$

Demostración

$$si \; a_j < a^M{}_j \; entonces \; \frac{\partial P(x)}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j}\frac{\sum_{S_x} pi}{\#S_x} = \frac{1}{\#S_x}\sum \frac{\partial p_i}{\partial a_j}$$

$$= \frac{1}{\#S_x}\sum \frac{\partial}{\partial a_j}\frac{(\boldsymbol{g}_i||\boldsymbol{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})^T \boldsymbol{W}_{G(i)}(\boldsymbol{g}_i||\boldsymbol{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})}{\boldsymbol{1}_{d+k+l\times 1}{}^T \boldsymbol{W}_{G(i)}\boldsymbol{1}_{d+k+l\times 1}}\rho(\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{a}_i||\boldsymbol{m}_i;\boldsymbol{z})$$

$$= \frac{1}{\#S_x\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\boldsymbol{1}}\sum \frac{\partial x_i{}^T}{\partial a_j}\boldsymbol{W}_{G(i)}\boldsymbol{g}_i||\boldsymbol{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i}\rho$$

$$= \frac{1}{\#S_x\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{W}_{G(i)}\boldsymbol{1}}\sum \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_j}(1-g_{a_{ji}}{}^{\beta_{jG(i)}})\cdot I_{(a_{ji}<a_{jG(i)}{}^M)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{W}_{G(i)}\boldsymbol{g}_i||\boldsymbol{1}-\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i}||\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i}\rho$$

$$= \frac{1}{\#S_x \mathbf{1}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}} \sum \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{{a_{jG(i)}}^M - a_{ji}}{{a_{jG(i)}}^M} \right)^{\beta_{jG(i)}} \cdot I_{(a_{ji} < {a_{jG(i)}}^M)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \boldsymbol{g}_i || \mathbf{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i} || \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i} \rho$$

$$= \frac{1}{\#S_x \mathbf{1}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}} \sum \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \beta_{jG(i)} {g_{a_{ji}}}^{\beta_{jG(i)} - 1} \cdot I_{(a_{ji} < {a_{jG(i)}}^M)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \boldsymbol{g}_i || \mathbf{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i} || \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i} \rho$$

$$= \frac{\sum \sum \beta_{jG(i)} {g_{ri}}^{\alpha_{rG(i)}} {g_{a_{ji}}}^{\beta_{jG(i)} - 1} w_{rj}}{\#S_x {\mathbf{1}_{d+k+l \times 1}}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}_{d+k+l \times 1}} \rho(\boldsymbol{x}_i || \boldsymbol{a}_i || \boldsymbol{m}_i; z) \geq 0 \blacksquare$$

Monotonicidad sobre los mitigantes puros. Si $x||m$ es obtenida de $x||m^*$ por un incremento de un mitigante puro entre la población en situación de pobreza y que presenta mitigantes, entonces

$$M(x; z) \leq M(y; z)$$

Por demostrar

$$\frac{\partial P(x)}{\partial m_j} \leq 0 \; si \; m_j < {m^{max}}_j;$$

Demostración

$$si \; m_j < {m^M}_j \; entonces \; \frac{\partial P(x)}{\partial m_j} = \frac{\partial}{\partial m_j} \frac{\sum_{S_x} pi}{\#S_x} = \frac{1}{\#S_x} \sum \frac{\partial p_i}{\partial m_j}$$

$$= \frac{1}{\#S_x} \sum \frac{\partial}{\partial m_j} \frac{(\boldsymbol{g}_i || \mathbf{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i} || \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})^T \boldsymbol{W}_{G(i)} (\boldsymbol{g}_i || \mathbf{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i} || \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i})}{{\mathbf{1}_{d+k+l \times 1}}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}_{d+k+l \times 1}} \rho(\boldsymbol{x}_i || \boldsymbol{a}_i || \boldsymbol{m}_i; \boldsymbol{z})$$

$$= \frac{1}{\#S_x \mathbf{1}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}} \sum \frac{\partial x_i{}^T}{\partial m_j} \boldsymbol{W}_{G(i)} \boldsymbol{g}_i || \mathbf{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i} || \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i} \rho$$

$$= \frac{1}{\#S_x \mathbf{1}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}} \sum \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial m_j} g_{m_{ji}}{}^{\gamma_{jG(i)}} \cdot I_{(m_{ji} < m_{jG(i)}{}^M)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \boldsymbol{g}_i || \mathbf{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i} || \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i} \rho$$

$$= \frac{1}{\#S_x \mathbf{1}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}} \sum \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial m_j} \left(\frac{m_{jG(i)}{}^M - m_{ji}}{m_{jG(i)}{}^M} \right)^{\gamma_{jG(i)}} \cdot I_{(m_{ji} < m_{jG(i)}{}^M)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \boldsymbol{g}_i || \mathbf{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i} || \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i} \rho$$

$$= \frac{1}{\#S_x \mathbf{1}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}} \sum \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\gamma_{jG(i)} g_{m_{ji}}{}^{\gamma_{jG(i)}-1} \cdot I_{(m_{ji} < m_{jG(i)}{}^M)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \boldsymbol{g}_i || \mathbf{1} - \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{a}_i} || \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}_i} \rho$$

$$= -\frac{\sum \sum \gamma_{jG(i)} g_{ri}{}^{\alpha_{rG(i)}} g_{m_{ji}}{}^{\gamma_{jG(i)}-1} w_{rj}}{\#S_x \cdot \mathbf{1}_{d+k+l\times 1}{}^T \boldsymbol{W}_{G(i)} \mathbf{1}_{d+k+l\times 1}} \rho(\boldsymbol{x}_i || \boldsymbol{a}_i || \boldsymbol{m}_i; \boldsymbol{z}) \leq 0 \blacksquare$$

CONCLUSIONES

La medición de la pobreza ha sufrido cambios importantes durante las últimas décadas. Éstos han obedecido a la necesidad de proponer nuevos métodos que puedan ser útiles para el desarrollo de políticas públicas con el objetivo de mitigar el sufrimiento causado por esta situación. Mediante una *matriz de interacción multidimensional*, en el presente trabajo se muestra una forma de medir la pobreza que consigue incorporar la interacción entre las carencias, y entre las carencias y otros elementos del entorno, con la finalidad de ofrecer una herramienta capaz de establecer cuáles son los aspectos más relevantes que conforman la experiencia de vivir en una situación de pobreza.

Esta metodología puede entenderse como una extensión de la familia de medidas de Alkire y Foster, la cual fue construida a partir del cumplimiento de una serie de axiomas establecidos por convención entre algunos académicos dedicados al estudio de la pobreza. Al demostrar que esta metodología satisface diez de estos axiomas, se prueba su utilidad en función de los criterios establecidos en la literatura.

Por otra parte, su incapacidad para satisfacer los dos axiomas de distribución, no debe considerarse como una desventaja necesariamente, debido a que al utilizar un esquema más completo para comprender cómo algunas carencias interactúan con otras, puede entenderse que en una sociedad cuya distribución respecto a un activo es más equitativa, la experiencia de las personas en situación de pobreza puede ser peor, si el excedente sirve para mitigar el padecimiento por la presencia de carencias simultáneas. Por lo tanto, el presente trabajo ofrece un nuevo marco teórico para comprender la relevancia de las políticas de atención focalizada.

Sin embargo, la propuesta presentada en este trabajo aún es susceptible de ser perfeccionada con la intención de que esta la metodología pueda ser implementada. Uno de sus principales problemas es que, al complejizar la realización del cálculo, se incrementa la dificultad de hacerlo a través de un algoritmo simple, a pesar de que la estimación continúa siendo más sencilla que se realiza a través de otras metodologías. Una de las ventajas del método tradicional de medición propuesto por Alkire y Foster es que se calcula mediante un procedimiento que puede replicarse con facilidad, pero se sacrifica la posibilidad de realizar una medición más completa que permita establecer prioridades con mayor precisión.

Las características de esta metodología abren la posibilidad de explorar nuevas formas de comprender el fenómeno de la pobreza. Es posible formalizar estas características como nuevos axiomas, que pueden ser propuestos más adelantes y que permitirían ampliar abordar el problema de forma más eficiente. Además, por la estructura de su planteamiento, la propuesta desarrollada puede ser más efectiva para generar otras que permitan atender los problemas comunes de cualquier sociedad. Por ejemplo, la propuesta elaborada para la presednte tesis puede ser más útil que la que fue planteada en el documento *México hacia una economía verde* del PNUMA (2011) para dirigir la atención del estado entre la protección al medio ambiente y la atención a las personas en situación de pobreza, debido a que parte de un principio distinto de valoración que considera un conjunto de preferencias establecidas socialmente, el cual puede ser actualizado a través del tiempo, además de que ofrece una guía para el establecimiento de políticas basadas en teorías cuyos resultados puedan ser verificables empíricamente.

Una forma de proponer un esquema con el cuál sería posible promover el desarrollo sustentable de una región, consistiría en elegir un conjunto de criterios de pobreza que incorpore diferentes medidas e indicadores de desarrollo social, y vincular esta medición con la fase reflexiva de Norton, Costanza y Bishop (1998), como una herramienta que permita representar los objetivos sociales establecidos a partir del consenso y facilitar el proceso de revaloración y discusión de las preferencias, así como clasificar los problemas ambientales y comprender su impacto económico, y social a través de modelos que involucren múltiples criterios. Mediante este enfoque sería posible extender los criterios que son empleados en las mediciones de pobreza multidimensional, para incluir una "versión personalizable" de los indicadores de desarrollo sustentable, como una forma de considerar la calidad del entorno en el que cada individuo desarrolla su vida. Esto es consistente con la definición de pobreza de Amartya Sen si consideramos que el entorno limita el desarrollo individual.

Por esto es posible concluir que la metodología desarrollada en el presente trabajo de tesis no sólo es útil para la medición de la pobreza de acuerdo con los criterios que han sido propuestos por diferentes académicos y que se encuentran resumidos en la propuesta axiomática de Foster, sino que presenta ventajas para la ejecución de acciones públicas al ofrecer información más detallada sobre la interacción entre las distintas carencias y su entorno. Un ejemplo práctico de la aplicación de esta metodología puede encontrarse en el trabajo de tesis de Carlos Calderón Angeles (2017), donde se demuestra que la interacción de las carencias es relevante en la medición debido a que puede alterar la posición de algunos estados en la jerarquía de pobreza, mientras que se demuestra también que los resultados de su aplicación dominan estocásticamente a los de la medida tradicional.

Referencias

Alkire, S., & Foster, J. (2009). Counting and Multidimensional Poverty Measurement. *OPHI Working Papers*.

Alkire, S., & Foster, J. (2011). Undestandings and Misunderstandings of Multidimensional Poverty Measurement. *OPHI Working Papers*.

Alkire, S., Foster, J. E., Seth, S., Santos, M. E., Roche, J. M., & Ballon, P. (2014). Multidimensional Poverty Measurement and Analysis: Chapter 1 - Introduction. *OPHI Working Papers*.

Alkire, S., Foster, J. E., Seth, S., Santos, M. E., Roche, J. M., & Ballon, P. (2015). Multidimensional Poverty Measurement and Analysis: Chapter 2 - The Framework. *OPHI Working Papers*.

Alkire, S., Foster, J. E., Seth, S., Santos, M. E., Roche, J. M., & Ballon, P. (2015). Multidimensional Poverty Measurement and Analysis: Chapter 3 - Overview of Methods for Multidimensional Poverty Assesment. *OPHI Working Papers*.

Battiston, D., Cruces, G., López-Calva, L. F., Lugo, M. A., & Santos, M. E. (2013). Income and Beyond: Multidimensional Poverty in six Latin American countries. *Social indicators research, 112(2)*, 291-314.

Boltvinik, J. (2003). Tipología de los métodos de medición de la pobreza . *Comercio Exterior*, 453-465.

Boltvinik, J. (2010). Principios de la medición multidimensional de la pobreza. En M. Mora (Coord.), *Medición multidimencional de la pobreza en México* (págs. 43-280). México, D.F.: El Colegio de México, Centro de Estudios Sociológicos : Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social.

Boltvinik, J. (2013). Medición multidimensional de pobreza. América Latina de precursora a rezagada. *Sociedad & Equidad*, 4-29.

Calderón, C. (2017). Análisis de la pobreza en México a partir de una matriz de interacciones. Maestría en Economía, CEE-COLMEX, promoción 2015-2017.

Calderón, M. (2016). Normas sociales y umbrales de pobreza. *Acta Sociológica*, 73-98.

Chambers, R. (2007). Participation, Pluralism and Perceptions of Poverty. En *The Many Dimensions of Poverty* (págs. 140-164). Palgrave Macmillan UK.

Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social. (2014). *Metodología para la medición multidimensional de la pobrza en México (segunda edición).* México DF: CONEVAL.

Foster, J. E. (2007). A Report on Mexican Multidimensional Poverty Measurement. *OPHI Working Papers*.

Green, M. (2006). Representing poverty and attacking representations: some anthropological perspectives on poverty in development. *The Journal of Development Studies*.

Hernández Cid, R., & Soto de la Rosa, H. (2010). Metodología estadística de la medición multidimensional de la pobreza en México. En M. Mora (Coord.), *Medición multidimensional de la pobreza en México* (págs. 499-650). México, D.F.: El Colegio de México, Centro de Estudios Sociológicos : Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social.

Hernández Solano, A. (2015). Pobreza y Cambio Climático: El Caso de México. Doctorado en Economía, CEE-COLMEX, promoción 2012-2015. Capítulo 1

López-Feldman, A., Refugio Vallejo, J., & Fonseca, C. (2009). Descomposición de la pobreza multidimensional mediante el enfoque de conjuntos difusos: Una aplicación para el México rural. *Centro de Investigación y Docencia Económicas (CIDE), División de Economía, Documento de trabajo No. 464*.

Mendoza Enríquez, H. (2011). El concepto de pobreza y su evolución en la política social del gobierno mexicano. *Estudios Sociales*.

Morales Ramos, E. (2009). La evoluci´on de la pobreza difusa multidimensional en México, 1994-2006. *Documento de Investigación del Banco de México No. 2009-04*.

Nahmad, S., Carrasco, T., & Nava, E. (2009). Elementos para la Construcción de una Tipología de la Pobreza Rural en México. En *Retos para la Integración Social de los Pobres.* Buenos Aires: CLACSO.

Narayan, D., Patel, R., Schafft, K., Rademacher, A., & Koch-schulte, S. (2000). *Voices of the Poor. Can Anyone Hear Us?* Oxford University Press.

Norton, A. (2001). *A rough guide to PPAs.* Overseas Development Institute.

Norton, B., Costanza, R., & Bishop, R. (1998). The evolution of preferences Why 'sovereign' preferences may not lead to sustainable policies and what to do about it. *Ecological Economics*, 193-211.

Palomar Lever, J. (2007). The Subjective Dimension of Poverty: A Psychological Viewpoint. En *The Many Dimensions of Poverty* (págs. 75-85). Palgrave Macmillan UK.

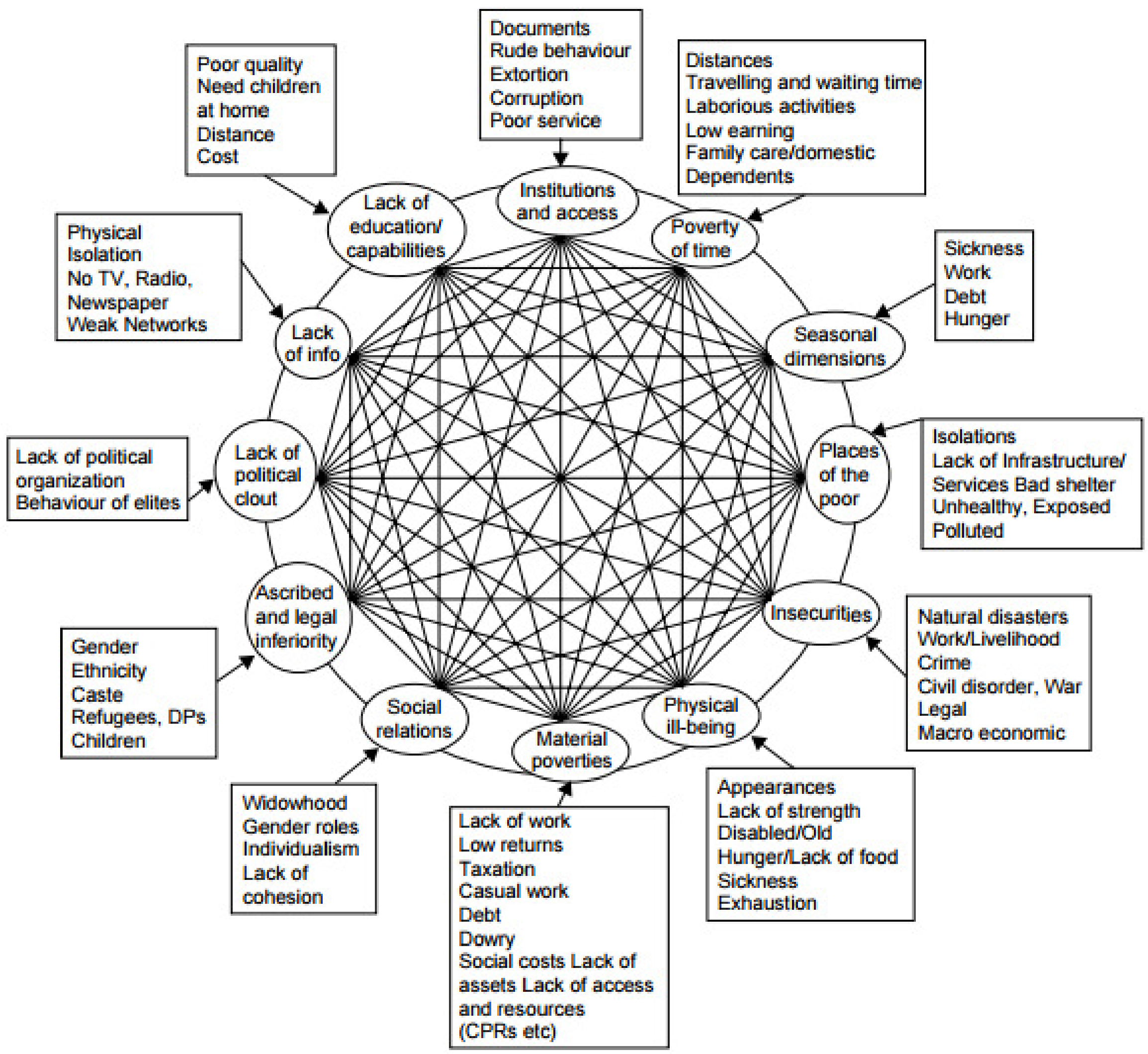
PNUMA. (2011). *Hacia una economía verde: Guía para el desarrollo sostenible y la erradicación de la pobreza.* Síntesis para los encargados de la formulación de políticas. www.unep.org/greeneconomy.

Sen, A. (2000). Capítulo 4, La Pobreza como privación de capacidades. En *Desarrollo y Libertad* (págs. 114-141). Buenos Aires: Editorial Planeta S.A.

Taylor, J. E. (2015). *Essentials of Development Economics.* Univ of California Press.

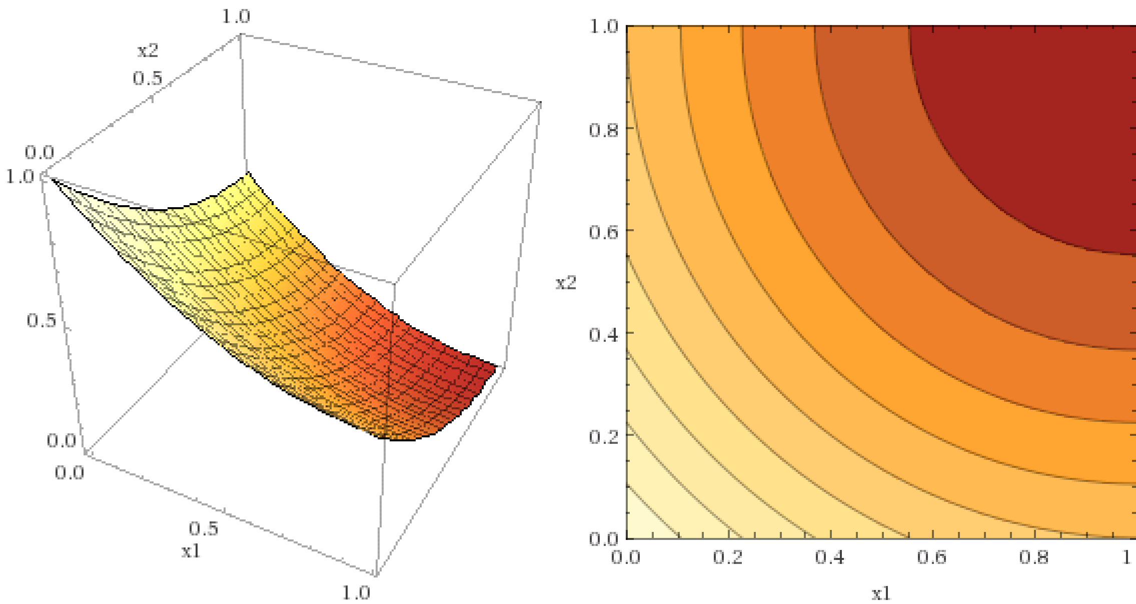
ANEXO A

Figura 1. Dimensiones de la pobreza y sus interacciones.



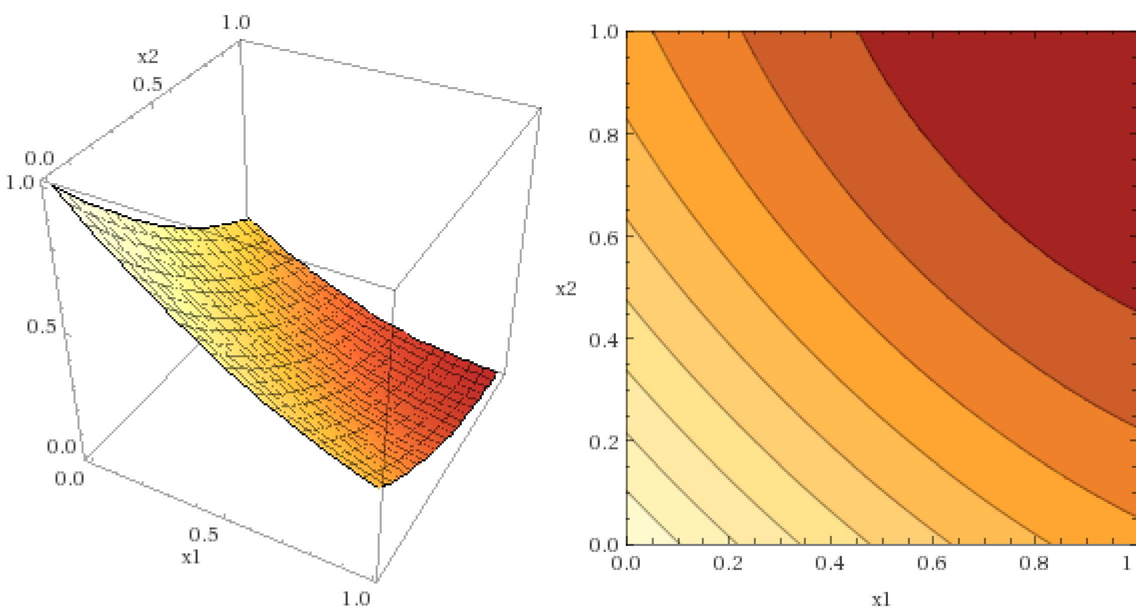
Fuente: (Chambers, 2007)

ANEXO B



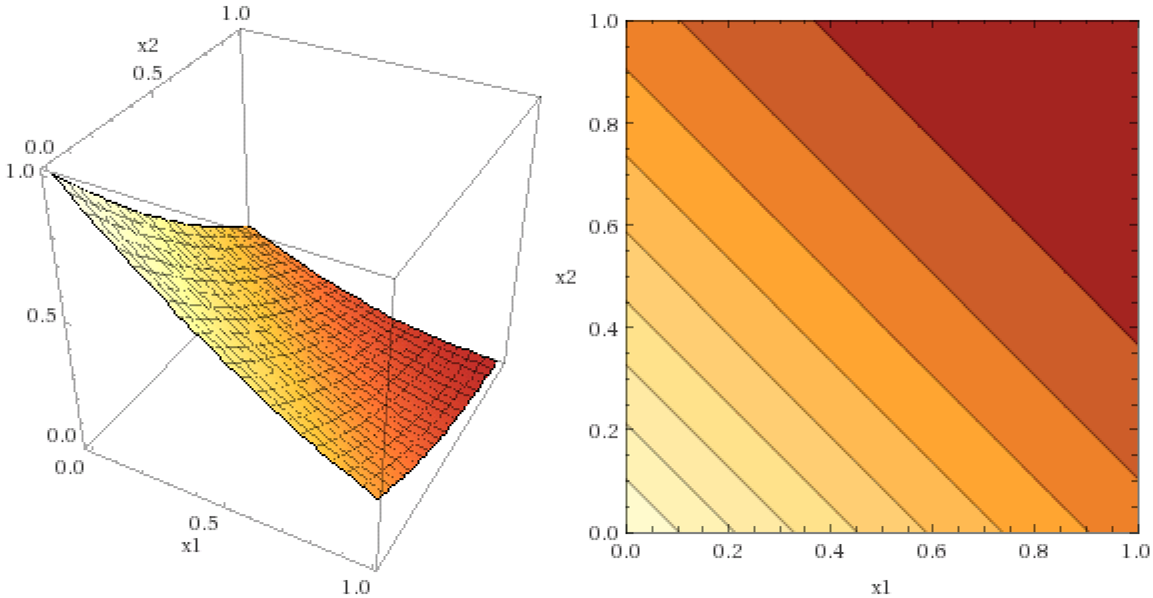
$w_{12} = w_{21} = 0$

Fuente: elaboración propia



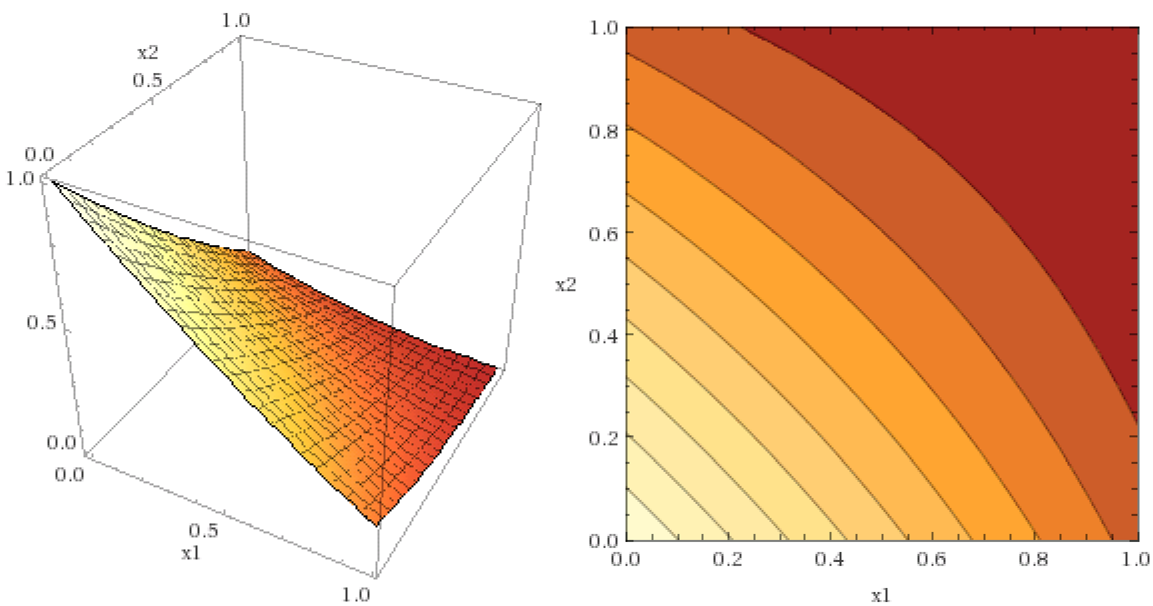
$w_{12} = w_{21} = 1/2$

Fuente: elaboración propia



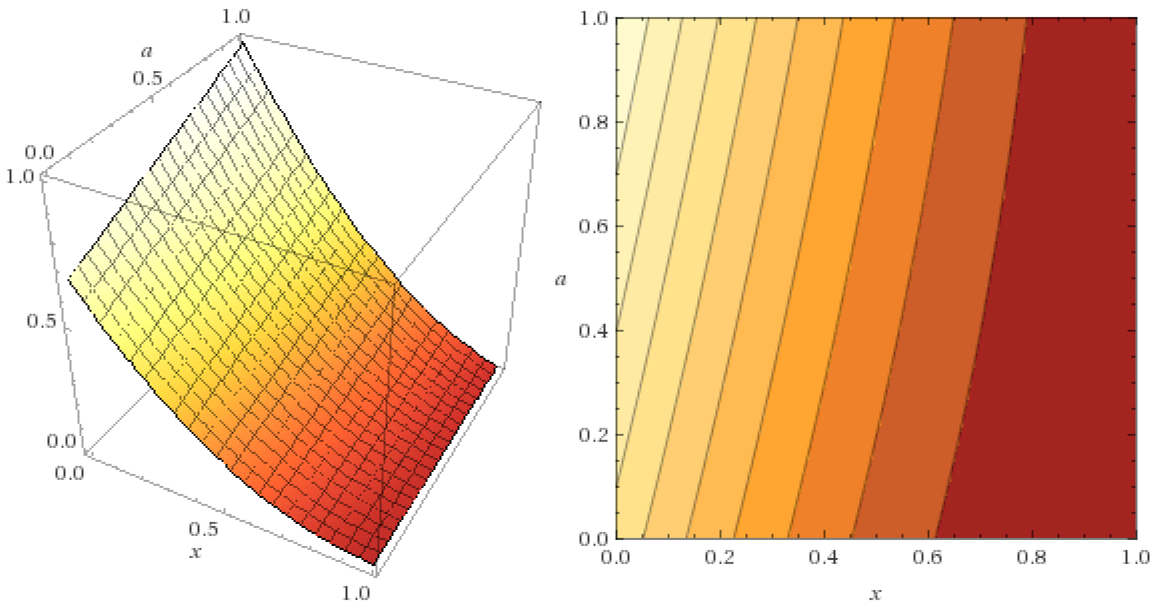
$w_{12} = w_{21} = 1$

Fuente: elaboración propia



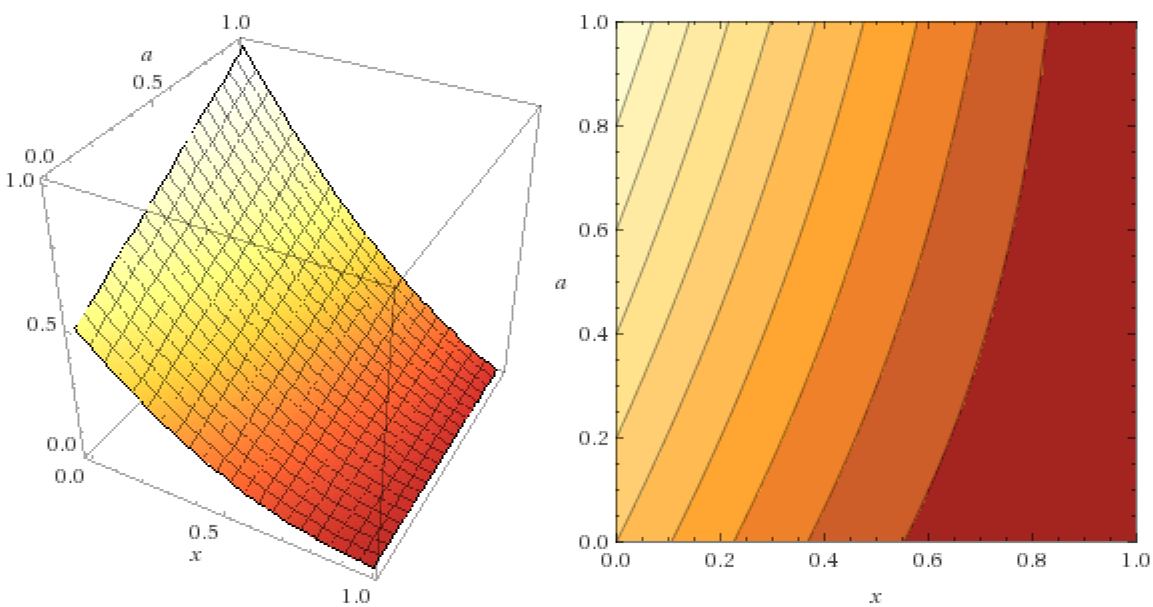
$w_{12} = w_{21} = 2$

Fuente: elaboración propia



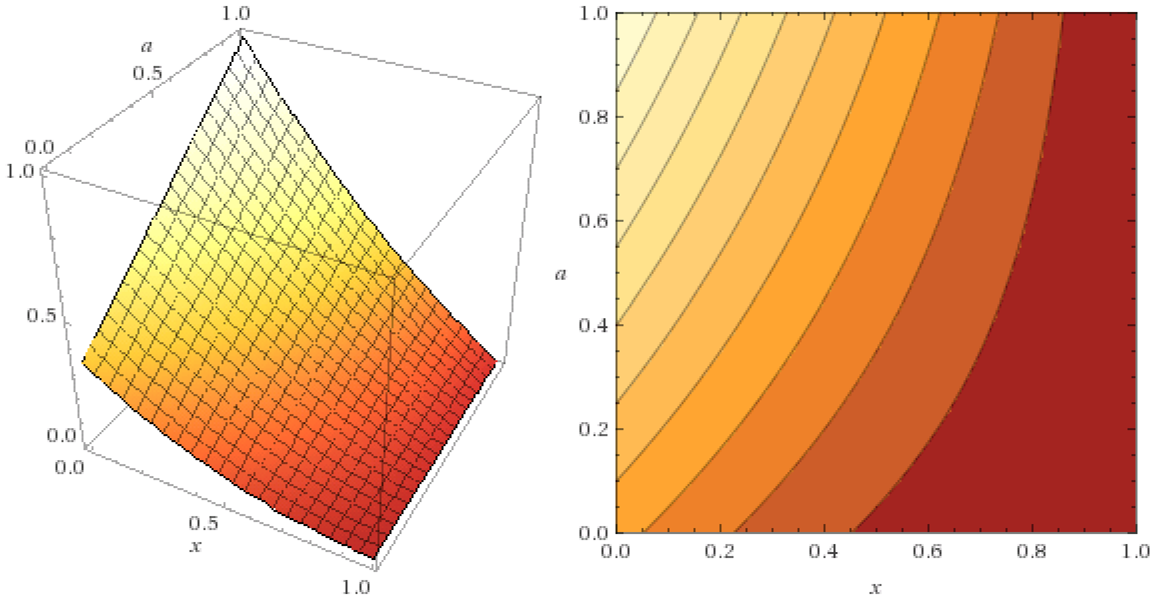
$a = 1/2$

Fuente: elaboración propia



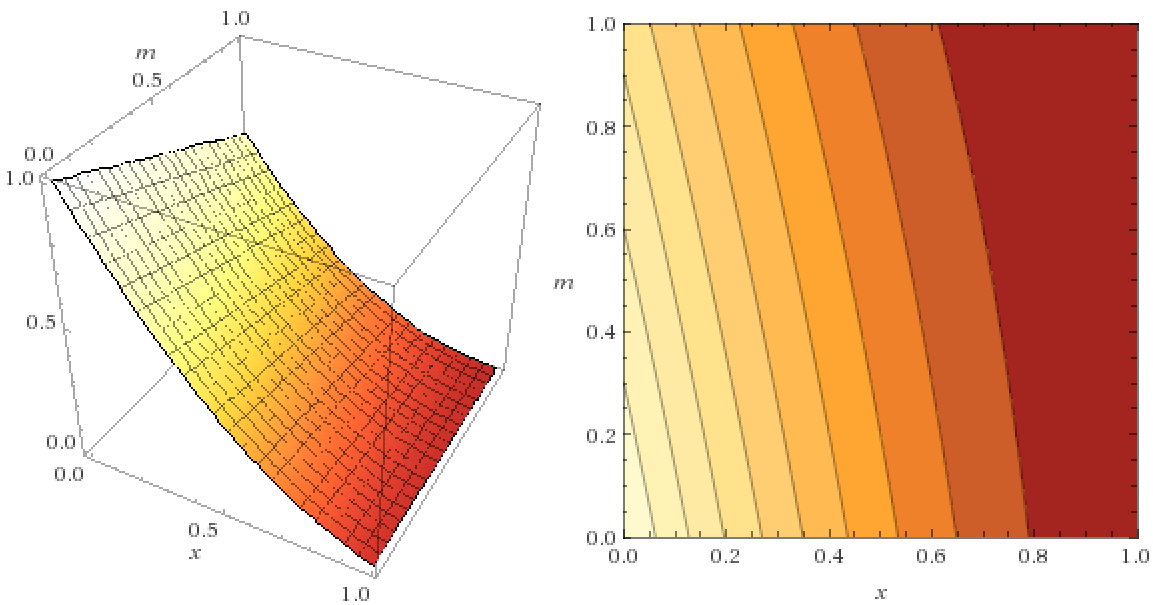
$a = 1$

Fuente: elaboración propia



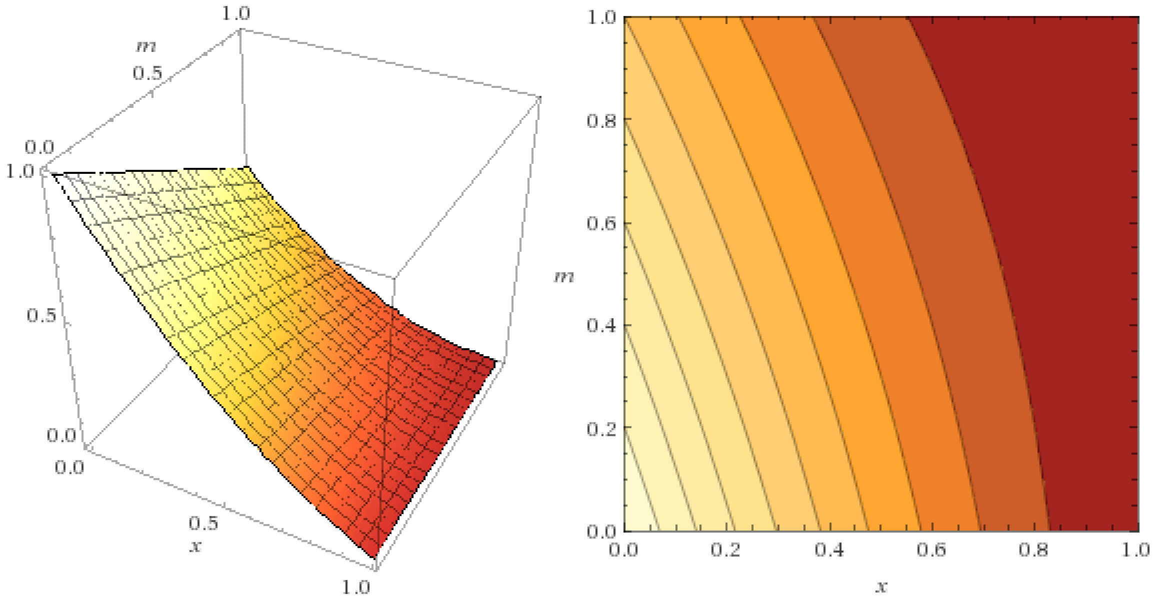
$a = 2$

Fuente: elaboración propia



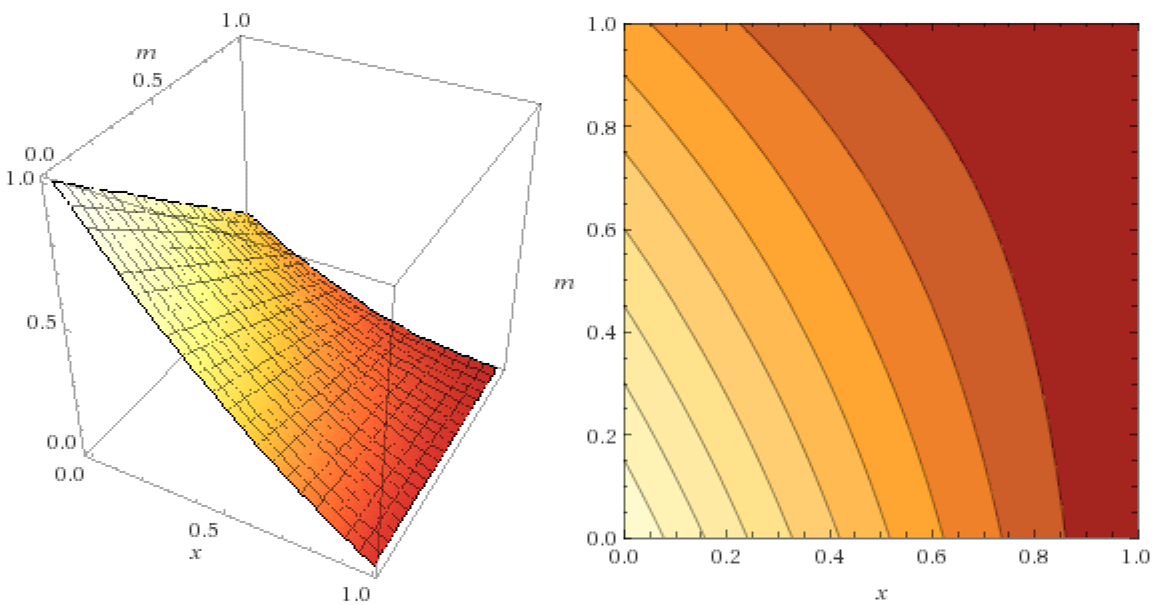
$m = 1/2$

Fuente: elaboración propia



$m = 1$

Fuente: elaboración propia



$m = 2$

Fuente: elaboración propia