TRABAJO DE INVESTIGACION PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN ECONOMIA

CENTRO DE ESTUDIOS ECONOMICOS

EL COLEGIO DE MEXICO

Un modelo de ciclos reales para la economía mexicana

Jesús Serrano Landeros

PROMOCION 1992-1994

Mayo, 1995.

ASESOR: Dr. Raúl Aníbal Feliz Ortiz

Indice

Presentación

El objetivo del presente trabajo es calibrar un modelo de ciclos reales que emule adecuadamente las fluctuaciones cíclicas observadas en el pasado reciente de la economía mexicana y proporcione información e intuición económica útil para la comprensión de la misma.

En el primer capítulo, se presenta una descripción de lo que son los modelos de ciclos reales, sus fundamentos y resultados más importantes, así como consideraciones de teoría económica relacionadas con el tema. En Capítulo II se describen los métodos que la literatura ofrece para la solución de modelos del tipo intertemporal, al cual pertenecen los modelos de ciclos reales.

En el siguiente capítulo se hacen algunas consideraciones econométricas para la estimación de modelos del tipo de los tratados, dando particular atención al procedimiento de calibración, que es el usado para la estimación de los modelos propuestos en este trabajo. A continuación, en el Capítulo IV, se plantean y calibran dos modelos que tratan de explicar las variaciones cíclicas de la economía mexicana, comparándose los resultados obtenidos con ambas especificaciones.

Finalmente, se exponen las principales conclusiones que se derivan de los resultados obtenidos en este trabajo.

CAPITULO I

Los Modelos de Ciclos Reales

Tal vez la aportación más importante de los modelos de ciclos reales, aún en sus formas más sencillas, es que han demostrado que los modelos de equilibrio no son necesariamente inconsistentes con muchas de las características atribuidas a los ciclos económicos.

Dos de los rasgos principales de estos modelos son, que incluyen de manera explícita la incertidumbre y sus fuentes, así como agentes que tienen un comportamiento consistente con los principios de la microeconomía. El segundo rasgo, como es sabido, fué causa de fuertes críticas a la macroeconomía Keynesiana.

Los modelos de ciclos reales tratan de responder dos preguntas básicas: ¿cómo responden individuos racionales maximizadores de su utilidad a lo largo de toda su vida a cambios en el ambiente económico? y ¿qué implicaciones tienen esas respuestas para los valores de equilibrio de las variables macroeconómicas?

Para contestar estas preguntas es necesario especificar el ambiente económico y como cambia a lo largo del tiempo. También se requiere especificar los criterios que los agentes económicos usan para elegir los patrones de variables tales como el consumo, la inversión y el empleo. Es importante notar que cuando se habla de ciclos económicos frecuentemente se piensa acerca de nociones de persistencia o correlación serial en las variables económicas agregadas, movimiento conjunto entre las actividades económicas y diferentes amplitudes y volatilidades de varias series. Así, el objetivo de cualquier modelo de ciclos económicos es proporcionar una comprensión coherente de cómo y porqué surgen estas características en las series de tiempo de las variables económicas.

El modelo básico de la dinámica económica es el neoclásico de acumulación de capital. Frecuentemente ha sido interpretado como un modelo de crecimiento económico; sin embargo, el modelo neoclásico genera fluctuaciones en respuesta a alteraciones exógenas que recuerdan a los ciclos económicos. En consecuencia, es natural considerarlo como el punto de referencia para entender, tanto las fluctuaciones económicas, como el crecimiento. Es notable que las implicaciones para las fluctuaciones económicas del enfoque neoclásico no habían sido exploradas seriamente hasta fechas recientes.

Un ambiente económico simple a considerar es una economía poblada por muchos agentes idénticos que viven para siempre. La utilidad de cada agente es alguna función del consumo y el ocio que espera disfrutar a lo largo de su vida. Se considera que cada agente tiene acceso a una tecnología para el único bien de ésta economía. La producción requiere de capital, que se deprecia con el tiempo, y trabajo. La tecnología se considera sujeta a variaciones temporales de productividad o cambios tecnológicos que producirán la fuente de variación en el ambiente económico a la cual los agentes deben responder. Las elecciones que cada consumidor debe hacer son: cómo distribuir su tiempo entre trabajo y ocio y cómo distribuir el bien producido entre inversión en capital futuro y consumo presente.

Este modelo es claramente simple e irrealista, pero no tiene la intención de capturar la realidad compleja, sino solo proveer un punto de referencia de las características de un equilibrio de mercado dinámico. Es un modelo puramente real, conducido por alteraciones a la productividad o a la tecnología y de aquí que haya sido etiquetado como un modelo de ciclos reales.

Los trabajos acerca del equilibrio general de Debreu(1954) y Prescott y Lucas(1972) permiten interpretar, bajo los supuestos usuales, las elecciones de consumo, inversión y trabajo derivadas de la maximización de utilidad del agente representativo como los resultados per capita de una economía de mercado competitiva, sin distorsiones ni fallas de mercado. Las cantidades óptimas también implican precios de mercado para el trabajo (salario real), para los préstamos de un solo período (una tasa de interés real) y también puede valuarse cualquier activo financiero incluyendo los activos contingentes.

Otra característica importante de estos modelos es que, en la ausencia de alteraciones a la productividad, la elección de consumo, trabajo, inversión y producto del agente representativo convergerá, bajo un conjunto amplio de condiciones, a un valor constate o estado estacionario.

Para ilustrar el tipo de razonomaniento económico implícito en estos modelos, imagine que el agente representativo observa un alto valor de productividad temporal, ¿cómo responderá? Una opción para el sería consumir por encima del valor normal manteniendo la inversión y el tiempo dedicado al trabajo constantes, esto implicaría que los choques son totalmente absorbidos en un período y no tienen implicaciones para decisiones futuras. Sin embargo, un momento de reflexión nos sugiere que el agente representativo asigna un valor al consumo y ocio futuros adicionalmente al consumo presente, por lo que preferiría consumir más tanto en el presente como en el futuro. Esta transferencia intertemporal puede ser alcanzada en este sentido debido a que la función de producción permite al agente representativo invertir en capital que ayudará en el futuro a producir output. Así la inversión responderá positivamente al shock. El efecto sobre el tiempo destinado al trabajo es ambiguo. La productividad presente es temporalmente alta, lo que estimula la sustitución intertemporal de trabajo presente por trabajo futuro y la sustitución intertemporal de consumo presente por ocio. Por otro lado, la riqueza es mayor y actúa para reducir el trabajo presente y futuro. Para parametrizaciones plausibles del modelo el efecto sustitución domina de manera que el tiempo dedicado a trabajo en el presente se incrementa. Así el choque temporal es propagado hacia adelante y los efectos del choque se mostrarán como un mayor producto, consumo y ocio en el futuro.

Este simple ejemplo ilustra porqué variables como el producto y el consumo están posiblemente correlacionados serialmente aun cuando los choques al ambiente estén no correlacionados y sean puramente temporales.

Si el choque percibido por el agente representativo es persistente, entonces sus repuestas serían diferentes. Por ejemplo un incremento en la productividad más persistente tendería a incrementar la riqueza mas significativamente debido al incremento del producto futuro. El incentivo del agente representativo a incrementar la inversión sería reducido y el incentivo a incrementar el consumo presente sería incrementado.

Habría un menor incentivo a trabajar más hoy debido a que el efecto riqueza es más fuerte y el efecto de substitución intertemporal es reducido. Los resultados cuantitativos requieren de una formulación más específica.

Recordemos que en esta economía no hay fallas de mercado, así que las respuestas del agente representativo a los cambios en productividad son óptimas y la economía es Pareto eficiente en todos los instantes de tiempo.

En modelos más ricos que incluyen gobierno estas reglas de decisión también dependerían de las acciones presentes y futuras del gobierno.

Es común referirse a estos modelos de ciclos reales como modelos que son conducidos por "choques de oferta" agregada. Si bien, la mayoría de los análisis a la fecha se han enfocado en el modelo donde las variaciones en la tecnología son la fuente de los cambios en el ambiente, uno podría fácilmente especificar cambios que surgen como consecuencia de variaciones en las preferencias y en los gustos. Esto llevaría a modelos de ciclos reales conducidos por lo que alguien llamaría "choques de demanda". Además, el modelo puede ser extendido para incluir un sector gubernamental y un sector externo que también podrían ser considerados como fuente de "choques de demanda". Así, no hay nada inherente en el modelo de ciclos reales que lo limite al análisis de variaciones en la tecnología o la oferta.

Ha sido práctica común el apoyarse en lo que es llamado equivalencia determinista. Este procedimiento toma las reglas de decisión lineales obtenidas para la solución aproximada del modelo determinista y reemplaza los cambios futuros de productividad con sus valores esperados condicionales dada la información disponible en el instante t.

Crecimiento Económico y los Ciclos Reales

El modelo neoclásico de acumulación de capital predice que los valores per cápita del producto, capital y consumo, en ausencia de perturbaciones a la productividad convergerán a constantes o valores de estado estacionario. La evidencia empírica, sin embargo, es que los valores per cápita crecen continuamente a lo largo del tiempo, en consecuencia, el modelo neoclásico básico no ofrece una explicación de este crecimiento sostenido en los valores per cápita.

Robert Solow(1957) en su artículo clásico concluye que alrededor del 85 por ciento del crecimiento real per cápita durante el período 1909-1949 para Estados Unidos fue debido a cambios tecnológicos o a la productividad y alrededor de 15% debido a incrementos en el capital por trabajador. Desde el trabajo seminal de Solow ha sido común pensar en el crecimiento económico como algo que puede ser estudiado independientemente de las fluctuaciones económicas. O para ponerlo de otra manera, es frecuente suponer que los factores que influyen el crecimiento tienen sólo un efecto de segundo orden en las fluctuaciones económicas.

En este sentido, Nelson y Plosser (1982) arguyen que el producto per cápita, al igual que muchas otras series de tiempo económicas, se comportan como si tuvieran componentes que describen una senda aleatoria (random walk). Las sendas aleatorias tienen la importante propiedad de que no hay una tendencia en el proceso estocástico a regresar a un nivel particular o tendencia lineal una vez que es desplazada. Así, choques a la productividad no pronosticados alteran permanentemente el nivel de productividad. Los mismos autores también alegan que las series de tecnología de Solow también se comportan como una senda aleatoria.

La observación que la productividad sigue una senda aleatoria con paso (drift), tiene algunas implicaciones importantes. Primera, una senda aleatoria es un proceso estocástico no estacionario. Las sendas aleatorias también son referidas como tendencias estocásticas debido a que mientras ellas pueden exhibir crecimiento no fluctúan alrededor de un patrón determinista. Si los choques de productividad son permanentes, cada uno determina una nueva trayectoria de crecimiento. Entonces, el quitar la tendencia a las series de tiempo económicas con una tendencia determinista y suponer que las desviaciones de la tendencia exhibirán una tendencia a regresar a la línea de tendencia sería econométricamente incorrecta y puede ser engañosa.

Segundo, el hecho de que la productividad crezca a lo largo del tiempo trae complicaciones adicionales para el modelo neoclásico. Si la productividad está creciendo, entonces, el producto, el consumo y el capital per cápita, también tenderán a crecer a lo largo del tiempo. Si, por ejemplo, el producto y el consumo per cápita crecen a diferentes tasas, en el largo plazo la relación consumo/producto se acercaría a cero o uno. Para evitar esto, en general se requiere que estas variables per cápita converjan a tasas de crecimiento constantes pero iguales. Además, el tiempo destinado al trabajo no puede crecer en el estado estacionario debido a que el tiempo que se puede disponer para el trabajo está acotado tanto por arriba como por abajo. Para que estas restricciones sean satisfechas deben imponerse condiciones adicionales a la forma del proceso de producción y de la función de utilidad. Es de particular importancia que el progreso tecnológico permanente sea expresado como un aumento en el trabajo o neutral en el sentido de Harrod.

Tercero, King, Plosser y Rebelo(1988) y King, Plosser, Stock y Watson(1987) muestran que el modelo neoclásico con progreso tecnológico que sigue una senda aleatoria implica que el producto, el consumo y la inversión per cápita contendrán una componente común de senda aleatoria o tendencia estocástica. Esta estructura es consistente con las observaciones empíricas de Nelson y Plosser discutidas anteriormente. Además King, Plosser, Stock y Watson (1988) investigan la implicación de una tendencia estocástica común para el producto, el consumo y la inversión y concluyen que proporciona una representación razonable de los datos.

Si estos cambios que aumentan la productividad del trabajo pueden se caracterizados como el motor del crecimiento económico. Además del cambio en estado estacionario originado por un aumento permanente en productividad, hay una dinámica de transición asociada a este cambio, la cual es importante para entender las fluctuaciones. Ellas son iniciadas por la necesidad de la economía de moverse hacia un acervo de capital permanentemente mayor. Para alcanzarlo requiere de incrementos substanciales en la inversión, también habrá incrementos graduales en el consumo y en el producto hacia sus niveles mayores de estado estacionario. El tiempo dedicado al trabajo será temporalmente más alto durante la transición. En el corto plazo la tasa de interés real se incrementa que induce la substitución intertemporal de trabajo presente por trabajo futuro. Las respuestas, y en consecuencia las fluctuaciones que están presentes en el modelo son el resultado de los mismos factores que generan el crecimiento económico.

Solución de los Modelos de Ciclos Reales

Una de las estrategias más comúnmente empleadas es elegir una forma funcional explícita para la función de utilidad del agente representativo y la función de producción y, entonces, calcular el equilibrio aproximado del producto, consumo, inversión, tiempo dedicado al trabajo y salarios implicados por el modelo cuando los cambios en la tecnología son calculados siguiendo a Solow. Estos valores pronosticados pueden ser comparados con el comportamiento observado de la economía.

Una elección natural para la función de producción que también satisface los requerimientos necesarios para el crecimiento de estado estacionario es la forma de Cobb-Douglas. King, Plosser y Rebelo(1988) derivan la clase de funciones de utilidad si la economía debe poseer crecimiento en el estado estacionario. Las condiciones impuestas sobre la función de utilidad para que el crecimiento en el estado estacionario sea compatible con el equilibrio estacionario son: (i) la elasticidad de sustitución intertemporal en el consumo debe ser invariante a la escala del consumo (ii) los efectos ingreso y sustitución asociados con el crecimiento sostenido en la productividad del trabajo no deben alterar la oferta de trabajo. Una de estas es la función de utilidad logarítmica.

Es sumamente sorprendente que un modelo simple sin gobierno, sin dinero, sin fallas de mercado de cualquier especie, con expectativas racionales, sin costos de ajuste y agentes idénticos podría replicar bien la experiencia real. Esto es especialmente cierto dado que la mucha de la investigación macroeconómica durante cincuenta años subrayó la importancia de uno o más de los factores arriba citados en la explicación de las fluctuaciones económicas.

La presencia de impuestos distorsionadores generalmente rompe la liga entre las decisiones óptimas del agente representativo y la distribución Pareto eficiente, puesto que el retirar las distorsiones generalmente elevará el bienestar. Sin embargo el equilibrio competitivo puede ser calculado y analizado. La línea de razonamiento es que en una economía con muchos agentes cada uno de ellos toma el gasto del gobierno y las políticas impositivas como exógenas a su problema de elección.

La intuición subyacente a los efectos de compras no productivas del gobierno(como se suponen en la mayoría de análisis Keynesianos) son presentados básicamente en Barro (1981) y Hall(1980). Estos autores enfatizan dos tipos de influencias. La primera, el aumento de las compras del gobierno induce un efecto riqueza negativo que actúa para reducir el consumo y aumentar el tiempo destinado al trabajo y el producto. La segunda, el aumento de las compras del gobierno induce a una substitución intertemporal cuando el incremento es temporal. Este resultado de menor consumo, menor inversión, mayor tiempo destinado a la producción y un mayor producto. La relativa importancia de los efectos riqueza y de substitución intertemporal permanece aún sin resolver. Barro y Hall suponen que el efecto substitución es cuantitativamente más importante ante cambios temporales en las compras del gobierno que el efecto riqueza. Baxter y King(1988) han investigado estos efectos dentro de un modelo de ciclo real y han concluido que para los valores plausibles de los parámetros cambios más persistentes en las compras de gobierno tienen "multiplicadores" de producto mayores que los de cambios menos persistentes.

Por otro lado, las compras temporales tienen un mayor impacto más negativo en la inversión que las compras con una mayor persistencia.

Cuando los ingresos impositivos están basados en un impuesto al producto y el gasto del gobierno es distribuido como transferencias de suma fija, un cambio positivo en la productividad positivo requiere una reducción de la tasa impositiva con objeto de mantener el presupuesto balanceado. Esta reducción en la tasa impositiva refuerza los efectos del choque productivo sobre la productividad del trabajo después de impuestos y además incrementa el tiempo destinado al trabajo en respuesta a un choque tecnológico. Así el tiempo destinado al trabajo (y la inversión, por razones análogas) son más volátiles en esta economía.

Modificaciones al Modelo Básico

Como ya se mencionó, el modelo hasta aquí discutido es sumamente simplificado, por lo que varias adiciones con objeto de captar mejor la realidad han sido propuestas, a continuación se mencionan las más importantes.

Long y Plosser (1983) exploran un modelo de múltiples sectores con objeto de entender los movimientos conjuntos entre sectores en respuesta a choques que potencialmente son específicos a un sector. La motivación de este modelo es que se ha observado que varios sectores de la economía tienden a moverse juntos pero algunos sectores van adelante y otros van rezagados respecto al estado general de la economía.

Black(1987) argumenta que los modelos multisectoriales con importantes, particularmente cuando se trata de explicar el desempleo. Basa su argumento en la noción de que tanto el capital físico como el humano son altamente especializados. Choques sobre las preferencias o la tecnología generalmente requerirán recursos en la forma de movimientos de capital y trabajo entre sectores. Puesto que los insumos son especializados, será costoso hacer este ajuste y, como resultado, puede ser esperado que el desempleo crezca por encima de su nivel de largo plazo.

Un enfoque usado por Kydland y Prescott (1988) subraya la importancia de la estructura de las preferencias que no son separables en el tiempo. En su formulación la utilidad presente del ocio depende del ocio pasado en forma explícita. Esto permite un incremento en la sustituibilidad intertemporal del ocio que en consecuencia hace que las horas trabajadas sean más volátiles.

Rogerson(1988) y Hanson(1985) exploran las consecuencias de indivisibilidades de la decisión de oferta de trabajo que requiere de los agentes trabajar tiempo completo o no hacerlo. El resultado es que la volatilidad de las horas trabajadas en respuesta a los cambios en productividad se incrementa significativamente.

Otro enfoque para mejorar la respuesta de las horas trabajadas en el modelo es el permitir heterogeneidad de los agentes en la economía. Ejemplos de este enfoque se pueden encontrar en Cho y Rogerson (1988) Kydland (1984), King, Plosser y Rebelo (1988). Estos artículos sugieren que puede haber importantes sesgos hacia abajo en los estimados de la elasticidad de la oferta de trabajo agregada cuando hay agentes con diferentes habilidades.

La tesis del ensayo de Kydland y Prescott (1982) es que el supuesto de construcción en multiples periodos es crucial para explicar las fluctuaciones agregadas. Fabricas y barcos a medio construir no son parte del acervo de capital productivo. Los movimientos conjuntos de las variables del modelo ajustado para las datos trimestrales de U.S.A. de la posguerra son cuantitativamente consistentes con los correspondientes comovimientos de los datos de U.S.A. Además las correlaciones seriales de producto cíclico para el modelo se ajustan bien con las de los datos. Encuentran más variabilidad en las horas trabajadas que en la productividad pero no tanto como se observa en los datos. Consideran que la discrepancia no es grande por la dificultad para medir el empleo, puede ser también porque los shocks sólo son de productividad. Los mismos autores presentan evidencia de que aún con costos de ajuste la tecnología de inversión de un sólo período es inadecuada.

La opinión de muchos investigadores de ciclos reales es que el papel del dinero en una teoría de equilibrio del crecimiento y las fluctuaciones económicas no está bien comprendido. Algunos investigadores como King y Plosser (1984), Kydland (1987) y Eichenbaum y Singleton (1986), han explorado formas de incorporar el dinero y sus implicaciones en un modelo de ciclos reales. Sin embargo, hay poco acuerdo sobre cual es el enfoque más fructífero.

Modelos de Crecimiento Endógeno y Ciclos Reales

El modelo de crecimiento exógeno no ha sido satisfactorio para algunos economistas, en particular podemos mencionar lo expresado por Arrow (1962)[1]

"Una visión del Crecimiento Económico que depende tan grandemente de una variable exógena, le da uno la tranquilidad de que la dificultad para medir como la cantidad de conocimiento, es difícilmente intelectualmente satisfactoria. Desde un punto de vista cuantitativo, empírico, nos deja con el tiempo como una variable explicativa. Ahora las predicciones de tendencia, aunque pueden ser necesarias en la práctica, son básicamente una confesión de ignorancia, y, lo que es peor desde un punto de vista práctico, no son variables de política".

Los trabajos de Uzawa(1965), Romer (1986), Lucas (1988), Rebelo(1990) y Barro(1990), entre otros, modifican el modelo

---

[1]Citado por Sala-i-Martin (1990).

básico neoclásico para permitir que el crecimiento sea un producto endógeno de la tecnología. La idea es permitir que el capital humano (cambio tecnológico que aumenta el trabajo) sea producido usando capital físico y capital humano como insumos con una tecnología de rendimientos constantes a escala. En estos modelos un cambio en la tecnología puramente temporal puede tener efectos permanentes sobre el nivel de la actividad económica. La razón es que un cambio en la productividad que resulte en un mayor producto provocará generalmente un incremento en los recursos destinados a la producción de capital humano adicional. En este sentido las decisiones de distribución de recursos afectan el nivel de la tecnología y el crecimiento de la economía. Otras implicaciones adicionales de estos modelos es que variables como el producto, el consumo y la inversión son procesos integrados y poseen tendencias estocásticas. Este resultado es atractivo a la luz de lo encontrado por Nelson y Plosser (1982) en la descomposición con tendencia de senda aleatoria (random walk) que hacen del producto norteamericano.

Evaluación de la Política Económica y Modelos de Ciclos Reales

Los modelos como los descritos podrían ser usados para predecir las consecuencias de una regla de política en particular sobre las características operativas de la economía. Debido a que se estima la estructura de preferencias-tecnología, los parámetros estructurales serán invariantes a la regla de política seleccionada aún cuando las ecuaciones de comportamiento no lo sean. Ejemplos de tales aspectos de política son descritos en

Kydland y Prescott (1980), Kydland y Prescott (1981) y en Barro (1981).

Consecuentemente, estas reglas proporcionarían la base para evaluar la política de una manera que no estaría sujeta a la crítica de Lucas (1976) a los modelos que suponen relaciones invariantes con respecto a las acciones del gobierno entre las variables económicas pasadas y presentes.

Los Modelos Deterministas

Por lo presentado en las líneas anteriores podría quedar la impresión de que un modelo macroeconómico que pretenda explicar la realidad debe ser estocástico. Brock y Mirman (1972) sugieren que no necesariamente es así, en particular dicen que: "Parece razonable que la posibilidad de error en la observación, en el producto o en la agregación debería ser tomado en cuenta cuando se calculan las políticas óptimas en el presente. Si los errores o los eventos aleatorios son incorporados, las políticas óptimas serán afectadas por la expectativa de estos eventos. Bajo estas condiciones, es valioso introducir incertidumbre directamente al proceso. La teoría determinista estaría entonces justificada en el sentido de que es una aproximación de un modelo más general. Así, cuando los supuestos del modelo son relajados para incluir incertidumbre los resultados cualitativos no son radicalmente diferentes"[2].

---

[2]Brock y Mirman (1972) pp.480.

CAPITULO II

Modelo de Crecimiento Neoclásico Estocástico

A continuación se presentan algunos de lo métodos más comunes y generales para la solución del modelo de crecimiento neoclásico tanto en su versión determinista como estocástica, los cuales también son útiles para la solución de modelos de ciclos reales y de crecimiento endógeno. Puesto que el único objetivo que se persigue aquí es ilustrar éstos métodos se presenta su aplicación a la versión más simple.

Métodos de solución del modelo determinista

Considérese un economía de las siguientes características:

a) Hay un solo bien Y que es producido con dos insumos: capital y trabajo.

b) Hay muchos productores con la misma tecnología.

c) Hay muchos consumidores con la misma función de bienestar.

d) No existe crecimiento de la población.

También se supondrá que la utilidad de los individuos solo depende del consumo y además tiene la propiedad de separabilidad, esto es, la utilidad es igual a la suma descontada de las utilidades derivadas de los consumos en los diferentes instantes (períodos) de tiempo.

En el caso discreto, esta economía es descrita por las siguientes ecuaciones:

$$Y_t=F(k_t,n_t) \qquad \textbf{(1.1)}$$

$$C_t+I_t \leq F(f_t,n_t) \qquad (1.2)$$

$$k_{t+1}=(1-\delta)k_t+I_t \qquad (1.3)$$

$$0\leq n_t\leq 1 \qquad (1.4)$$

$$W=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(C_t) \qquad (1.5)$$

donde:

C_t.- Es el consumo del período t.

I_t.- Es la inversión del período t.

N_t.-Número de horas destinadas a la producción en el período t.

K_t.-Acervo de capital en el período t.

δK_t.- Es el consumo de capital en el período t.

Y_t.- Es el producto del período t.

$U(C_t)$.- Es la función de utilidad que representa las preferencias de los agentes.

$F(K_t,n_t)$.- Es la función de producción que representa la tecnología con la cuentan los productores.

Además se imponen las condiciones de regularidad de Imada sobre la función de producción y la de utilidad, es decir,

$$F(0,n)=0$$

$$F(k,0)=0$$

$$F_k(k,n)>0$$

$$F_k(0,n)\to\infty$$

$$\lim_{k\to\infty} F_k(k,n)=0$$

$$F_n(k,n)>0$$

$$F_n(k,0)\to\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(k,n)=0$$

$$U'(C)>0$$

$$U''(C)<0$$

Existe un planificador social benevolente con la misma función de bienestar que los individuos el cual enfrenta el problema:

$$Max \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j U(C_{t+j}) \qquad (1.6)$$

sujeto a:

$$C_t+I_t \leq F(f_t,n_t) \qquad (1.2)$$

$$k_{t+1}=(1-\delta)k_t+I_t \qquad (1.3)$$

$$0\leq n_t\leq 1 \qquad (1.4)$$

Debido a que el trabajo no reduce la utilidad e incrementa el producto tendremos una oferta de trabajo totalmente inelástica e igual a su valor máximo, es decir,

$$n_t=1$$

De manera semejante, puesto que el producto puede incrementar la utilidad presente en la forma de consumo, o la utilidad futura en forma de inversión, y así aumentar el bienestar total del individuo, no se desperdiciará producto por lo que la ecuación (1.2) se satisfacerá con igualdad.

$$C_t + I_t = F(k_t,n_t)$$

definiendo ahora la función $f(k_t)$ como:

$$f(k_t)=F(k_t,1)+(1-\delta)k_t$$

tiene las siguientes propiedades:

$$f(0)=0$$

$$f'(k)>0$$

$$\lim_{k\to\infty} f'(k)=0$$

$$\lim_{k\to 0} f'(k)=\infty$$

Sustituyendo la ecuación (1.3) en (1.2) y usando la definición de la función $f(k_t)$, el problema de maximización se transforma en:

$$Max \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j U(C_{t+j}) \qquad \text{(P.1)}$$

sujeto a:

$$C_t+k_{t+1} = f(k_t) \qquad \text{(P.2)}$$

Aunque el problema está planteado como la elección de una sucesión infinita de valores para el consumo y el acervo de capital, el problema que de hecho enfrenta el planificador social es el elegir el consumo actual y el capital de inicio de período de mañana y nada más. El resto puede esperar hasta mañana. Además cada período t el planificador social encuentra como dado el capital k_t y debe elegir óptimamente el consumo c_t y el valor de capital del siguiente periodo k_{t+1}. Sin embargo, debido a la restricción presupuestal, en realidad sólo puede elegir una de estas dos variables.

Antes de resolver algebraicamente este problema es preciso notar que dadas las propiedades de la función de producción que representa la tecnología con que cuenta la economía, la función f(k) presenta rendimientos decrecientes a escala siempre que $\alpha<1$ como se supondrá. A priori podemos pensar que es improbable que la dotación inicial sea la óptima, en consecuencia el acervo de capital crecerá o disminuirá en una primera instancia. Supóngase que aumenta, en consecuencia, su productividad marginal irá disminuyendo reduciéndose la cantidad adicional de producto disponible del que se contará y por consiguiente su utilidad marginal y debido a la presencia de un costo de oportunidad en términos de utilidad representado por el consumir en el presente una unidad adicional de producto no se acumulará capital de manera indefinida. Un razonamiento análogo puede hacerse para el caso en que el acervo de capital comience a reducirse. Como el acervo de capital determina el volumen de producto disponible, esto sugiere que existirá un estado estacionario en que el producto y el acervo de capital serán constantes y la presencia de una depreciación diferente de cero obligará a que haya una inversión diferente de constante cero para reponer el capital depreciado así como un consumo también constante.

Principio de Bellman o Programación Dinámica

Suponga que el problema planteado en las ecuaciones (P.1) y (P.2) ya ha sido resuelto para todos los valores posibles de K_0. Entonces podríamos definir una función $v:\mathbf{R}_+\rightarrow\mathbf{R}$ siendo $v(k_0)$ el valor maximizado de la función objetivo (P.1) para todo k_0. A esta función se le llama función de valor. Con v así definida, $v(k_1)$ nos daría el valor de la utilidad desde el período 1 que podría ser obtenida con un acervo de capital k_1, y $\beta v(k_1)$ sería el valor de esta utilidad descontada al período 0. Entonces en términos de la función de valor, el problema del planeador social en el período 0 sería

$$\underset{C_0, k_1}{Max} \; [U(C_0) + \beta v(k_1)] \tag{P.3}$$

sujeto a:

$$C_0 + k_1 = f(k_0)$$

Si se conociera la función v, podría ser usada para definir una función $g: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ de manera que $k_1 = g(k_0)$ y $c_0 = f(k_0) - g(k_0)$ son los valores que maximizan el problema (P.3) . Con g así definida la dinámica de la acumulación de capital a partir de cualquier acervo de capital k_0 estaría completamente descrita por

$$k_{t+1} = g(k_t) \tag{S.1}$$

Si se solucionara el problema (P.3), entonces $v(k_0)$ cumpliría con la siguiente condición

$$v(k_0) = \underset{0 \le k_1 \le f(k_0)}{Max} \{U[f(k_0) - k_1] + \beta v(k_1)\}$$

Cuando el problema se ve de manera recursiva los subíndices de tiempo se vuelven molestos. El problema que enfrenta el planeador social con el acervo de capital presente k puede ser reescrito como

$$v(k) = \underset{0 \le y \le f(k)}{Max} \{U[f(k) - y] + \beta v(y)\}$$

Esta ecuación en la función desconocida *v* es llamada ecuación funcional y es un objeto muy tratable matemáticamente. El estudio de los problemas de optimización dinámica a través de ecuaciones funcionales es llamada programación dinámica.

Si la función *v* fuera diferenciable y el problema tuviera solución interior y —que sabemos es igual a g(k)— las condiciones de primer orden y del teorema de la envolvente quedarían como

$$\begin{aligned} U'[f(k) - g(k)] &= \beta v'[g(k)] \\ v'(k) &= f'(k)\, U'[f(k) - g(k)] \end{aligned} \qquad \text{(V.1)}$$

La primera de estas condiciones iguala la utilidad marginal de consumir una unidad de producto presente a la utilidad marginal de asignarla al capital y disfrutar de un mayor consumo en el siguiente período. La segunda condición establece que le valor marginal del capital presente, en términos de utilidad total descontada, está dado por la utilidad marginal de usar el capital en la producción presente y asignar este retorno a consumo presente.

Cuando se resuelve un problema en particular, es frecuente que no se tenga información suficiente para saber cual es la forma de la función de valor, por lo que es común proponer para ella una forma funcional de acuerdo al número de variables de estado, la forma de la función de utilidad y de la de producción. Con la forma propuesta se sustituye en las condiciones de primer orden y del teorema de la envolvente para determinar si en el dominio de los números reales existen valores de las constantes involucradas en la forma funcional con los que satisfagan las condiciones de optimalidad.

Por ejemplo, suponga que la función de utilidad es logarítmica, la de producción es del tipo Cobb Douglas y el factor de depreciación $\delta=1$

$$U(C_t) = \ln C_t$$

$$f(k_t) = k_t^{\alpha}$$

en este caso se propone que la función de valor sea de la forma

$$v(k_t) = \theta_0 + \theta_1 \ln k_t$$

al sustituir en las condiciones de optimalidad se obtiene que

$$\theta_0 = \frac{1}{1-\beta} [\ln(1-\alpha) + \frac{\beta\alpha}{1-\alpha\beta} \ln\alpha\beta]$$

$$\theta_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}$$

lo que significa que la forma propuesta es adecuada. La ecuación que determina la trayectoria del capital se puede obtener al sustituir la función de valor obtenida en cualquiera de las condiciones de optimalidad. La trayectoria de consumo se encuentra al sustituir la función que describe la trayectoria del capital en la restricción presupuestaria.

$$k_{t+1}=\alpha\beta k_t^{\alpha}$$

$$c_t=(1-\alpha\beta)k_t^{\alpha}$$

Ecuación de Euler

Este método es menos general que el anterior y consiste en obtener las ecuaciones que determinan la dinámica del problema a partir de las condiciones de optimalidad.

La función Lagrangiana para el problema que enfrenta el planificador social planteado en (P.3) es

$$\mathcal{L}=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(c_t) + \sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t[f(k_t)-k_{t+1}-c_t]$$

Las condiciones de primer orden para este problema se obtienen al derivar $\mathcal{L}$ con respecto a las variables a elegir en cada período c_t y k_{t+1}, las que resultan

$$U'(C_t)-\lambda_t=0$$
$$\beta\lambda_{t+1}[f(k_t)+(1-\delta)]-\lambda_t=0$$
$$f(k_t)-k_{t+1}+c_t=0$$

despejando λ_t de la primera de las condiciones, adelantando un período también la primera condición y sustituyendo λ_t y λ_{t+1} en la segunda condición se obtiene

que es la ecuación de Euler del problema. Sustituyendo la

$$\beta U'(C_{t+1}) - U'(C_t) = 0$$
$$U'(C_t) = \beta U'[C_{t+1}]\, f'(k_{t+1}) \tag{E}$$

restricción presupuestaria, las funciones de utilidad y de producción, en la ecuación (E), se pueden encontrar las ecuaciones que determinan la dinámica de la economía.

La ecuación de Euler también se puede encontrar a partir de las condiciones de primer orden y de la envolvente de la función de valor. Recordando que $k_{t+1}=g(k)$, al sustituir la restricción presupuestaria en la condición del teorema de la envolvente y adelantarla 1 período se obtiene

$$v'(k_{t+1}) = f'(k_{t+1})\, U'[f(k) - k_{t+1}]$$
$$v'(k_{t+1}) = f'(k_{t+1})\, U'(C_t)$$

que al sustituirla en la condición de primer orden de la función de valor —la primera del sistema (V)— se obtiene la ecuación (E).

Principio del Máximo

Un tercer método para la solución de este tipo de problemas es el principio del máximo llamado de Pontryagin, que es un resultado del cálculo variacional. El procedimiento es semejante al del método anterior. Se forma una función llamada Hamiltoniana para la que se conocen las condiciones de optimalidad en función de las variables de estado, de control y de coestado. Las variables de control son aquellas que puede elegir libremente el agente que enfrenta el problema, las variables de estado son aquellas que el agente decisor toma como dadas al hacer su elección y las variables de coestado generalmente denotadas con la letra λ son los multiplicadores de Lagrange de las restricciones. En el caso del problema que enfrenta el planeador social, la variable de control es c_t, la variable de estado es K_t, debido a que la restricción presupuestaria, para un valor dado de la variable de control, determina la variable de estado en el siguiente período en este contexto se le conoce como ecuación de estado. La función Hamiltoniana es

$$H_t=\beta^t U(C_t)+\lambda_{t+1}[f(k_t)-C_t]$$

para la que las condiciones de optimalidad son

$$k_{t+1}=\frac{\partial H_t}{\partial \lambda_{t+1}}=f(k_t)-C_t$$

$$\lambda_t=\frac{\partial H_t}{\partial k_t}=\lambda_{t+1}f'(k_t)$$

$$\frac{\partial H_t}{\partial C_t}=0 \qquad \beta^t U'(C_t)-\lambda_{t+1}=0$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t k_t \to 0$$

que al sustituir las funciones de utilidad y de producción en ellas y hacer los despejes necesarios se pueden encontrar las ecuaciones (S.1).

Tiempo Continuo

Desde el punto de vista conceptual e intuitivo el planteamiento del problema del planificador social en tiempo continuo y su interpretación son iguales al caso de tiempo discreto sólo que la forma de expresarlo simbólicamente es algo diferente. La sumatoria se sustituye por una integral, el factor de descuento β por $e^{-\rho}$, y la restricción presupuestaria que ha sido escrita en forma de ecuación en diferencias es sustituida por la ecuación diferencial equivalente. Los métodos descritos se adaptan de manera semejante a como se reescribe el problema, pero desde el punto de vista conceptual no hay ninguna diferencia.

Estática Comparada

Una característica importante del modelo de crecimiento neoclásico aquí resuelto es que puede representarse en un diagrama de fase. Esto permite hacer análisis de estática comparada y determinar la trayectoria de ajuste hacia el nuevo equilibrio debido a alteraciones en el ambiente económico que enfrentan los agentes, entre los que se encuentran la introducción de impuestos, choques tecnológicos, introducción del gobierno y efectos de cambio en sus políticas de gasto, etc. Este diagrama también ilustra la trayectoria hacia el estado estacionario desde las condiciones iniciales.

Este diagrama de fase será representado en el plano cartesiano de las variables endógenas del modelo; el consumo y el acervo de capital. El diagrama de fase se construye de la siguiente manera:

i) Con la restricción presupuestaria de la economía se determina la ecuación que corresponde a $\Delta k_{t+1}=0$, esto es,

$$k_{t+1}=f(k_t)-c_t$$

$$\Delta k_{t+1}=k_{t+1}-k_t=0 \quad \rightarrow \quad k_{t+1}=k_t$$

$$\therefore \quad c_t=f(k_t)-k_t$$

por las propiedades que se supusieron de la tecnología y la definición de la función f(k), la ecuación estará representada en el plano cartesiano una curva que inicialmente tiene una pendiente muy grande y positiva que decrece y en algún momento se vuelve negativa.

ii) Con la ecuación de Euler del problema de maximización se determina la ecuación correspondiente a la curva $\Delta C_{t+1}=0$

$$\Delta C_{t+1}=0 \quad \rightarrow \quad C_{t+1}=C_t$$

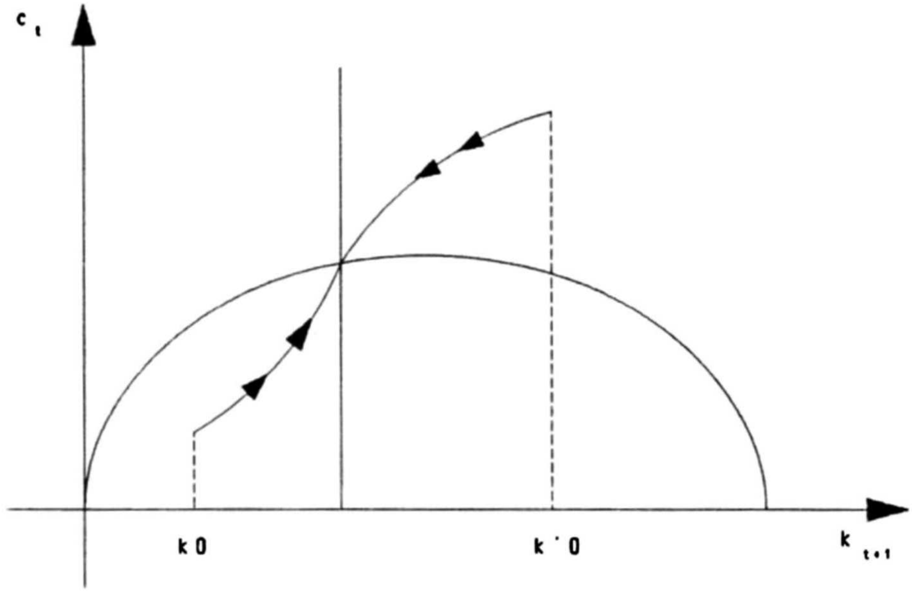
$$U'(C_t)=\beta U'(C_{t+1})f'(k_{t+1})$$

$$\beta f'(k_{t+1})=1$$

$$\therefore \quad k_{t+1}=f'^{-1}(1/\beta)=\bar{k}$$

que en el plano cartesiano se verá como una línea vertical.

En el diagrama siguiente se presenta este diagrama de fase y su trayectoria estable, donde se ilustran dos situaciones iniciales que convergen al equilibrio, una con un acervo de capital inicial menor al del estado estacionario y el otro caso a la inversa.



Solución del Modelo de Crecimiento Neoclásico Estocástico.

La forma más simple de plantear el modelo de crecimiento neoclásico estocástico es:

$$\max E_t[\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j})]$$

sujeto a:

$$c_t + k_t - (1-\delta) k_{t-1} = f(k_{t-1}, \theta_t)$$

Es el caso más sencillo porque supone separabilidad de la función de utilidad, la utilidad solo se deriva del consumo, etc.

La solución exacta a este problema solo se conoce en el caso de utilidad logarítmica y con factor de depreciación de capital

$\delta=1$ (Long y Plosser 1983). En consecuencia, para el resto de los casos que se ha hecho hasta la fecha es solucionar numéricamente el problema, estableciendo como prueba de la bondad del algoritmo su convergencia a la solución exacta cuando se fijan los valores de los parámetros en los valores que corresponden a la función de utilidad logarítmica y con factor de descuento igual a 1. La función de utilidad más estudiada en estos modelos es la de elasticidad de sustitución constante (ESC). Los métodos de solución numérica que se encuentran en la literatura los podemos clasificar de acuerdo a la aproximación o método de solución que usan en las siguientes categorías.

a) Aproximación Lineal Cuadrática.

Es en esencia la solución exacta para una forma aproximada del problema. Es uno de los métodos más usados en la literatura existente y descansa en aproximar las funciones de retorno y transición del problema original tomando aproximaciones de Taylor de segundo y primer orden alrededor del estado estacionario. Debido a que el mayor orden de las expansiones que se hacen es 2, se obtiene como solución reglas de decisión lineales para las variables de control como función de las variables de estado.

En forma vectorial la forma del problema aproximado para el modelo de crecimiento estocástico aquí tratado es:

$$\underset{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}}{Max}\; E_0\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(X_t'QX_t+u_t'Ru_t+2X_t'Wu_t)$$

sujetoa:

$$X_{t+1}=AX_t+Bu_t+C\varepsilon_{t+1}$$

donde:

$r(X_t,u_t)=X_t'QX_t+u_t'Ru_t+2X_t'Wu_t$

$r(X_t,u_t)$.- *Es una funcion escalar (de utilidad).*

X_t.- *Vector de variables de estado.*

u_t.- *Vector de variables de control.*

ε_{t+1}.- *Vector de variables aleatorias iid.*

La tecera y cuarta ecuaciones anteriores corresponden a las expansiones de Taylor de segundo orden de la función de utilidad y la expansión de Taylor de primer orden de la restricción presupuestaria de la economía respectivamente, ambas alrededor del estado estacionario. El estado estacionario se determina dando al vector ϵ_{t+1} el valor de su media incondicional.

Las condiciones de optimalidad y las expansiones de Taylor, después de hacer el álgebra necesaria nos llevan a la ecuación en diferencias de Riccati

$$P_t=\tilde{Q}+\tilde{A}'P_{t+1}\tilde{A}-\tilde{A}'P_{t+1}\tilde{B}\times(R+\tilde{B}'P_{t+1}\tilde{B})^{-1}\tilde{B}'P_{t+1}\tilde{A}$$

donde la solución de la matriz P_t permitirá encontrar la regla de decisión de las variables de estado como una función lineal de las variables de estado. Para la solución de la ecuación de Riccati se han propuesto varios métodos numéricos entre los que se encuentra el algoritmo de Vaughan.

En principio las reglas de decisión lineales consecuencia de las aproximaciones cuadráticas pueden ser pobres aproximaciones a las verdaderas reglas de discisión no lineales. La calidad de la aproximación dependerá de de la naturaleza de las funciones objetivo (de utilidad) de los agentes, el grado de no linealidad de las restricciones y las procesos estocásticos generadores de choques.

Para modelos de ciclos reales con una dinámica como la que presentan los modelos de Kydland y Prescott(1982) y de Hansen y Sargent(1988), la aproximación cuadrática parece ser lo suficientemente exacta para la mayoría de los propósitos.

La aproximación cuadrática también supone que el modelo posee una solución de estado estacionario para las variables de decisión. Este no sería el caso para las economías que crecen en ese estado estacionario. Para algunos casos éste problema puede ser evitado transformando las funciones objetivo y las restricciones de los agentes de manera que las variables de decisión posean un estado estacionario, tal es el caso de expresar las variables en unidades de eficiencia (veáse King y Plosser (1988)).

b) Métodos iterativos a partir de la ecuación de Euler.

A diferencia del método anterior, estos método consisten en obtener una solución aproximada del problema, tal y como es planteado, partiendo de las condiciones de optimalidad del problema como se obtienen del lagrangiano o en la forma de la ecuación de Euler. Los métodos más frecuentes encontrados en la literatura son:

b.1 Métodos iterativos a partir de la función de valor como punto fijo.

La idea básica aquí es aproximar el problema de crecimiento constinuo con un problema de valores dicretos sobre una malla de puntos. En otras palabras los valores del cpaital y los choques son discretizados. Haciendo la malla más fina la solución para la trayectoria del capital puede ser aproximada arbitrariamente cercana. Estas aproximaciones resultan resultan en un modelo de optimización dinámico que es resuelto iterando sobre la función de valor.

b.2 Métodos de cuadratura en una malla de la función de Valor.

Este método también discretiza el espacio de estados, pero es potencialmente más eficiente que una simple malla pues usa usa una malla que se construye en base a métodos de cuadratura para los choques tecnológicos del modelo. El modelo discretizado es resuelto haciendo iteraciones sobre la función de valor.

b.3 Patrón determinista extendido.

El enfoque tomado por la versión determinista del algoritmo del patrón extendido es suponer previsión perfecta de la variables aleatorias futuras bajo el supuesto de que el choque es exactamente igual a su valor esperado en todos los períodos futuros. Este método de solución tiene una fuente adicional de error de aproximación debido al supuesto de previsión perfecta. La magnitud del error cometido por este supuesto depende del grado de no linealidad del modelo que essta siendo resuelto. La verdadera ecuación de Euler requiere la integración de toda la función dentro del operador de esperanza matemática sobre la función de densidad de los choques futuros. El algoritmo del patrón determinista extendido, por otro lado, toma escencialmente la esperanza condicional de la función dentro del signo de esperanza de la ecuación de Euler y resuelve la función en el valor condicional esperado de los choque futuros.

b.4 Parametrización de expectativas.

El estudio comparativo de Taylor y Uhlig (1990), en el cual se pidió a investigadores indeividuales aplicar diferentes técnicas de solución al modelo tratado en esta sección, muestra que los patrones meustrales simulados por los diferentes métodos de solución tienen propiedades significativamente diferentes. Aunque hubo características comunes de las series de tiempo del comportamiento del consumo y la inversión para todos los métodos.

Parametrización de Expectativas

La descripción de este método que se presenta es siguiendo a Den Haan y Marcet (1990). Para la el modelo de crecimiento estocástico descrito, con una función de utilidad del tipo CES sabemos que la ecuación de Euler es:

$$C_t^{-\tau}=\beta E_t\{C_{t+1}^{-\tau}[f'(k_{t+1})+(1-\delta)]\}$$

Se usa la obseervación de que la esperanza condicional del lado derecho de la ecuación anterior es una función g: $R_+2 \rightarrow R_+$ de las variables de estado (K_{t-1}, z_t), como una base para sustituir la esperanza condicional con la función:

$$\Gamma(k_{t-1},z_t;\Omega_f) =\beta E_t\{C_{t+1}^{-\tau}[f'(k_{t+1})+(1-\delta)]\}$$

donde Ω_f es un vector de parámetros que serán escogidos para hacer Γ lo más cercano posible a g.

Estableciendo que Γ pertenezca a una clase de funciones que pueda aproximar cualquier función arbitrariamente bien, uno puede en principio, aproximar g. Por ejemplo podría ser un polinomio; incrementando el orden del polinomio, podemos obtener cualquier precisión. Además, observando como cambia el equilibrio cuando se incrementa el orden del polinomio puede tenerse una idea de cuan cercano se esta de la función g.

La primera elección para es una función de potencias:

$$\Gamma(k_{t-1}, z_t; \Omega_f) = \Omega_1 z_t^{\Omega_3} k_{t-1}^{\Omega_2}$$

Una razón para esta elección es que su imagen es positiva, como lo es la imagen de la función g que se desea aproximar. Hablando estrictamente la imagen de es positiva si y solo si $\Omega_1 > 0$. Dado el procedimiento iterativo usado para econtrar Ω_f, no está garantizada esta condición para todas las iteraciones.

Sea $P_n(x)$ un polinomio de grado n del vector x, la función de potencias anterior puede ser reescrita como $\exp(P_1(\log K_t, z_t))$. Puesto que las funciones de la forma $\exp(P_n(x))$ puede aproximar cualquier función cuyo mapeo sea de R_+^2 a R_+, y g una de dichas funciones, al permitir que $n \to \infty$, uno puede aproximar el equilibrio arbitrariamente bien.

Sean $\{C_t(\Omega), k_t(\Omega)\}$ las secuencias de consumo y capital que resuelven

$$C_t^{-\tau} = \psi(k_{t-1}, z_t; \gamma_f)$$

y además satisface la restricción presupuestaria para todo t, para un Ω dado, y para una realización de z_t. La ecuación anterior es la ecuación de Euler con Γ en lugar de la esperanza. Para una Γ y Ω dadas, encontrar C y k es fácil, puesto que tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas en cada período; primero calulamos C_t y con la restricción presupuestaria encontramos k_t.

El vector Ω_f es calculado con el siguiente procedimiento iterativo. Primero se genera la secuencia de valores z_t para una muestra de tamaño T. Esta serie se genera sólo una vez. Luego se elige un vector inicial Ω^0 y se calcula $\{C_t(\Omega^0), k_t(\Omega^0)\}$. Entonces se corre una regresión de mínimos cuadrados no lineales de

$$\{C_{t+1}^{-\tau}[f'(k_{t+1})+(1-\delta)]\}$$

sobre la función de serie de potencias Γ. Ahora al vector Ω se le asigna el nuevo valor

$$\Omega^n=(1-\lambda)\,\Omega^{n-1}+\lambda S(\Omega^{n-1}),$$

$$\lambda\in(0,1)$$

donde:

$S(\Omega^{n-1})$.-*son los coeficientes obtenidos de la regresion de minimos cuadrados no lineales.*

Con el nuevo valor de Ω se vuelve a calcular la secuencia de valores $\{C_t(\Omega), k_t(\Omega)\}$, se hace nuevamente un regresión con mínimos cuadrados no lineales y se calcula nuevamente el valor del vector Ω, hasta alcanzar el límite de tolerancia establecido.

Como ya se mecionó una forma de verificar la exactitud de las soluciones es incrementar el grado del polinomio de la exponencial. Para el problema aquí tratado, el polinomio de segundo orden será:

$$\Gamma(k_{t-1}, z_t; \Omega) = \exp(\Omega_1 + \Omega_2 \log k_{t-1} + \Omega_3 z_t + \Omega_4 z_t^2 + \Omega_5 \log k_{t-1} z_t + \Omega_6 (\log k_{t-1})^2)$$

Resulta que los dos últimos términos de la expresión anterior son casi perfectamente colineales con los otros. Más precisamente, la matriz

$$E(\frac{\partial \Gamma_t}{\partial \Omega} \frac{\partial \Gamma_t}{\partial \Omega'})$$

es muy cercana a ser singular debido a las derivadas con respecto a Ω_5 y Ω_6. Esto significa que estos términos son redundantes y pueden ser eliminados de Γ sin pérdida de poder predictivo.

El Modelo de Crecimiento Neoclásico como Equilibrio General

En esta sección se muestra que los problemas de planeación como el tratado en la sección anterior, en las condiciones apropiadas, pueden ser interpretados como predicciones acerca del comportamiento de economías de mercado. El argumento está basado en la conexión clásica entre el equilibrio competitivo y el óptimo de Pareto. Por simplicidad, la atención se restringe al caso determinista y de horizonte finito, pero los resultados que se presentan se pueden generalizar.

Suponga que las familias poseen todos los factores de la producción y las dotaciones de factores están uniformemente distribuidas entre las familias. Cada período las familias venden el servicio de los factores a las empresas y compran los bienes producidos por las empresas, consumiendo una parte y acumulando el resto en forma de capital. Suponga que las empresas no poseen cosa alguna; simplemente contratan capital y trabajo sobre la base de un arrendamiento para producir bienes cada período, venden el producto a las familias y entregan cualquier beneficio resultante a los accionistas. Finalmente, suponga que todas las transacciones para todos los períodos tienen lugar en un sólo mercado que se reúne una sola vez en el período 0, de manera que todos los precios y cantidades se determinan simultáneamente. Ningún intercambio futuro es negociado después. Después de que este mercado ha sido cerrado en los períodos $t = 0, 1, \ldots, T$, los agentes simplemente entregan las cantidades de factores y bienes que se comprometieron a vender y reciben los que se comprometieron a comprar.

Sea p_t el precio de una unidad de producto entregada en el período t, para $t= 0, 1, \ldots, T$, expresado en unidades de cuenta abstractas. Sea w_t el precio de una unidad de trabajo entregada en el período t, expresado en unidades de bien del período, de manera que w_t es el salario real. De manera similar sea r_t el precio de renta real del capital en el período t.

Dados los precios $\{(p_t, r_t, w_t)\}^T_{t=0}$, el problema que enfrenta la empresa representativa es elegir sus demandas de insumos y ofertas de producto $\{(k_t, n_t, y_t)\}^T_{t=0}$ que maximice la suma de los beneficios descontados. Esto es, su problema de decisión es

$$Max\ \pi=\sum_{t=0}^{T} p_t[y_t-r_tk_t-w_tn_t] \tag{E.1}$$

sujeto a:

$$y_t \leq F(k_t,n_t), \qquad t = 0,\ 1,\ \ldots,\ T \tag{E.2}$$

Dada la misma sucesión de precios, la familia representativa debe elegir sus demandas por consumo e inversión, y sus ofertas de capital y trabajos $\{(c_t, i_t, x_{t+1}, k_t, n_t)\}^T_{t=0}$, dada su dotación inicial de capital x_0. En esta decisión enfrenta varias restricciones. La primera es que el valor total de los bienes adquiridos no puede ser mayor al valor total de los salarios mas el ingreso por renta de capital más los beneficios que la familia recibe. En segundo lugar, las tenencias de capital en el período t+1 son iguales a sus posesiones en el período t, menos las depreciación más la nueva inersión. Tercera, la cantidad de cada factor ofrecido por la familia en cada períod debe ser no negativo y no puede exceder la cantidad que le es disponible en ese período. Finalmente, los acervos de capital y el consumo de capital deben ser no negativos. En consecuencia su problema de decisión es:

$$Max\ \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(c_t) \tag{E.3}$$

sujeto a:

$$\sum_{t=0}^{T} p_t[c_t+i_t] \le \sum_{t=0}^{T} p_t[r_t k_t+w_t n_t] +\pi \tag{E.4}$$

$$x_{t+1}=(1-\delta)x_t+i_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T \quad \textit{dado } x_0 \tag{E.5}$$

$$0 \le n_t \le 1, \quad 0 \le k_t \le x_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T \tag{E.6}$$

$$c_t \ge 0, \quad x_{t+1} \ge 0, \quad t = 0, 1, \ldots, T \tag{E.7}$$

Nótese que la inversión bruta puede ser negativa. Este supuesto también fué hecho en la sección anterior.

Un equilibrio es un conjunto de precios $\{(p_t, r_t, w_t)\}^T_{t=0}$, y una asignación $\{(k^d_t, n^d_t, y_t)\}^T_{t=0}$ para la empresa representativa y una asiganción de recursos para la familia representativa $\{(c_t, i_t, x_{t+1}, k^s_t, n^s_t)\}^T_{t=0}$, tales que:

a) $\{(k^d_t, n^d_t, y_t)\}^T_{t=0}$ satisface las ecuaciones (E.1) y (E.2) a los precios establecidos.

b) $\{(c_t, i_t, x_{t+1}, k^s_t, n^s_t)\}^T_{t=0}$ satisface las ecuaciones (E.3) a (E.7) a los precios establecidos.

c) Todos los mercados se vacían: $k^d_t = k^s_t$, $n^d_t = n^s_t$, $c_t + i_t = y_t$, para todo t.

Para encontrar el equilibrio competitivo, se plantean varias hipótesis acerca de determinadas características que debe poseer. Más adelante se verifica que estas hipótesis sean correctas. La primera es que puesto que las preferencias de la unidad familiar representativa son estrictamente monótonas, se presume que los precios de los bienes son estrictamente positivos para cada período: $p_t>0$. para todo t. También, puesto que ambos factores tienen productividades marginales estrictamente positivas, se presume que los precios de los factores son estrictamente positivos para todos los períodos: $r_t>0$ y $w_t>0$, para todo t. Finalmente, puesto que en equilibrio los mercados se vacían, sean $k_t = k^d_t = k^s_t$, $n_t = n^d_t = n^s_t$, para todo t, las cantidades de capital y trabajo intercambiadas.

Consideremos ahora la empresa representativa. Si el precio de los bienes es estrictamente positivo en cada período, entonces la empresa ofrecerá en el mercado todo lo que produce en cada período. Esto es, la restricción (E.2) se satisface con igualdad para todo t. También debe notarse que puesto que la empresa simplemente renta capital y contrata trabajo para cada período, su problema es equivalente a serie de problemas de maximización de un sólo período. Por tanto sus demandas de insumos resuelven

$$\underset{k_t, n_t}{Max}\, p_t[F(K_t, n_t) - r_t k_t - w_t n_t], \qquad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{E.8}$$

Por lo tanto los precios (reales) de los factores deben ser iguales a sus productos marginales:

$$r_t = F_k(k_t, n_t), \qquad t = 0, 1, \ldots, T; \tag{E.9}$$

$$w_t = F_n(k_t, n_t), \qquad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{E.10}$$

Considérese ahora la unidad familiar representativa. Puesto que los factores disponibles no disminuyen la utilidad de la familia, en cada período ofrece la cantidad total de factores de que dispone, esto es, $k_t = x_t$, para todo t. Usando estos hechos y sustituyenod (E.5) en (E.4), podemos escribir el problema de la unidad familiar como:

$$Max \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(c_t) \tag{E.11}$$

sujeto a:

$$\sum_{t=0}^{T} p_t [c_t + k_{t+1} - (r_t + 1 - \delta) k_t - w_t] \leq 0 \tag{E.12}$$

$$\begin{aligned} &c_t \geq 0; \quad k_{t+1} \geq 0, \quad t = 0, 1, \ldots, T. \\ &dado\ k_0 = x_0 \end{aligned} \tag{E.13}$$

Puesto que el $\lim_{c\to\infty} U'(c) = \infty$ la condición de no negatividad sobre c_t en la ecuación (E.13) es no restrictiva. Entonces las condiciones de primer orden para la unidad familiar representativa son:

$$\beta^t U'(c_t) - \lambda p_t = 0, \tag{E.14}$$

$$\lambda [(r_{t+1} + 1 - \delta) p_{t+1} - p_t] \leq 0, \tag{E.15}$$

que se satisface con igualdad si $k_{t+1} > 0$, $t = 0, 1, \ldots, T$. λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria (E.12).

En consecuencia un equilibrio competitivo está caracterizado por una sucesión de precios y cantidades $\{(p^e_t, r^e_t, w^e_t, c^e_t, k^e_{t+1})\}^T_{t=0}$, con precios estrictamente positivos para todos los bienes y factores, tales que la sucesión $\{(n_t=1,\ k^e_t)\}^T_{t=0}$ satisface la ecuación (E.8) a los precios dados y $\{(c^e_t,\ k^e_{t+1})\}^T_{t=0}$ satisface las ecuaciones (E.11) a (E.13) a los precios dados, $k_0 = x_0$, y además

$$F(k_t^e,1) = c_t^e+k_{t+1}^e+(1-\delta)k_t^e, \qquad para\ todo\ t. \tag{E.16}$$

Ahora que ya ha sido definido y parcialmente caracterizado el equilibrio competitivo de la economía de la sección anterior, se analizarán las relaciones que hay entre las asiganciones de equilibrio y las óptimas. Primero, note que si la sucesión $\{(p^e_t,\ r^e_t,\ w^e_t,\ c^e_t,\ k^e_{t+1})\}^T_{t=0}$ es un equilibrio, entonces la sucesión $\{(c^e_t,\ k^e_{t+1})\}^T_{t=0}$ es una solución para el problema de planeación presentado en la sección anterior. Para probar esto solo es necesario mostrar que $\{(c^e_t,\ k^e_{t+1})\}^T_{t=0}$ es Pareto óptima.

Supongamos lo contrario, hay una sucesión $\{(c'_t,\ k'_{t+1})\}^T_{t=0}$ que es una asignación de recursos factible y que $\{c'_t\}$ proporciona una mayor utilidad en la función objetivo (E.11). Entonces esta no satisface la ecuación (E.12) o la unidad familiar la habría elegido. Pero si no se cumple (E.12), entonces la ecuación (E.16) implica que

$$\pi' = \sum_{t=0}^{T} p_t^e[F(k_t',1)-r_t^e k_t'-w_t^e] > \pi^e$$

contradiciendo la hipótesis de que $\{(n_t=1,\ k^e_t)\}^T_{t=0}$ era una elección de insumos maximizadora de beneficios. Este resultado es una versión del primer teorema del bienestar.

De manera inversa suponga que $\{(c^*_t,\ k^*_{t+1})\}^T_{t=0}$ es una solución del problema del planeador social descrito anteriormente. Entonces $\{(k^*_{t+1})\}^T_{t=0}$ es la unica sucesión que satisface las condiciones de primer orden y de frontera

$$\beta f'(k_t^*) U'[f(k_t^*) - k_{t+1}^*] = U'[f(k_{t-1}^*) - k_t^*] \qquad \text{(E.17)}$$

y

$$c_t^* = f(k_t^*) - k_{t+1}^* \qquad \text{(E.18)}$$

donde la función $f(k)=F(k,1)+(1-\delta)k$ está definida de igual forma que en la sección anterior. Para construir un equilibrio competitivo con estas cantidades deben encontrarse precios de soporte $\{(p^*_t,\ r^*_t,\ w^*_t)\}^T_{t=0}$. Para hacer esto, observe que las ecuaciones (E.9) y (E.15) sugieren que los precios de los bienes deben satisfacer

$$p_t^* = \frac{p_{t-1}^*}{f'(k_t^*)}, \qquad con\ p_0\ arbitrario \qquad \text{(E.19)}$$

Por otro lado las ecuaciones (E.9) y (E.10) implican que los salarios reales y las rentas (del capital) deben satisfacer

$$r_t^* = f'(k_t^*) - (1-\delta), \qquad t = 1, 2, \ldots, T; \qquad \text{(E.21)}$$

$$w_t^* = f(k_t^*) - k_t^* f'(k_t^*), \qquad t = 1, 2, \ldots, T \qquad \text{(E.22)}$$

Estos precios junto con las cantidades de la ecuaciones (E.17) a (E.19), constituyen un equilibrio competitivo. Basta sustituir la definición de la función f(k) en la ecuación (E.22) para comprobar que se satisfacen las condiciones de optimalidad del equilibrio competitivo y sus restricciones presupuestales. Este resultado es una versión del segundo teorema del bienestar.

Las relaciones recién mostradas entre el equilibrio competitivo y las asignaciones óptimas de Pareto, son usadas constantemente para caracterizar el equilibrio en las economías de mercado. El problema de planeación se resuelve, no con el propósito normativo de prescribir cantidades, sino con el propósito positivo de pronosticar los resultados de mercado para unas preferencias y tecnología dadas. Debe tenerse presente que esta equivalencia sólo es válida cuando son aplicables los dos teoremas fundamentales del bienestar, los que no se cumplen en presencia de externalidades, impuestos distorsionarios, rendimientos crecientes a escala, etc.

CAPITULO III

Consideraciones Econométricas y No Econométricas

La forma tradicional de estimar y probar un modelo económico es plantear un conjunto de ecuaciones estructurales, estimar los parámetros y probar cualquiera de las restricciones no necesarias para identificar los parámetros.

Una estrategia alternativa, que ha sido muy seguida en la literatura de los modelos de ciclos reales y hecha popular en esta literatura por Kydland y Prescott (1982) (pero más ampliamente empleada en la literatura de equilibrio general aplicado como Ballard, Shoven y Whalley (1985)), es la llamada "calibración". La estrategia consiste en elegir valores para ciertos parámetros clave de la preferencias y tecnología usando evidencia de otros estudios empíricos. Esto restringe el número de parámetros libres en el modelo. Usando éstos parámetros, las propiedades estocásticas de ciertas variables, como medias, varianzas, autocorrelaciones y correlaciones cruzadas, son construidas. Los parámetros libres restantes son elegidos para obtener, lo más cercano posible, una correspondencia entre los momentos derivados del modelo y los observados en los datos.

Para algunos de los modelos calibrados, en particular los más simples, no hay impedimento alguno para el uso de econometría estándar, sin embargo los métodos de calibración están muy difundidos. Eichembaum, Hansen y Singleton (1988) estudian modelos de ciclos económicos, desde esta perspectiva.

En este punto surge la siguiente pregunta: ¿Porqué el empleo tan difundido de los métodos de calibración, si parece razonable esperar que con métodos econométricos convencionales se pueden estimar los parámetros del modelo? El empleo de métodos de estimación econométricos consistentes con los modelos de ciclos reales, tales como la estimación de ecuaciones simultáneas, por un lado está limitado por la falta de soluciones analíticas de los modelos, y por otro, requiere de una enorme cantidad de trabajo, que para los fines de estimación, es muy probable que su única aportación sea que esa técnica no permite obtener toda la información requerida y debe buscarse otro camino de estimación o que la técnica desarrollada sólo sea útil para unos cuantos casos particulares. Adicionalmente, debido al tipo de especificación que usualmente se encuentra en los modelos de este tipo, cuando los métodos convenciales de econometría se muestran potencialmente aplicables no es claro que pueda haber alguna ventaja por su empleo. Algunas de las razones que conducen a esta respuesta las encontramos en las reflexiones siguientes:

Los parámetros a estimar en los modelos de ciclos reales pertenecen a la clase de los llamados "profundos", por esta razón, en la mayoría de los casos las relaciones econométricas derivadas del modelos deben ser planteadas en forma estructural. Para plantear un conjunto de ecuaciones estructurales es necesario conocer las relaciones funcionales entre las variables que intervienen en el modelo, para este efecto lo más conveniente es conocer la solución del modelo. A la fecha no se conoce la solución analítica de la gran mayoría de modelos de ciclos reales.

Las relaciones funcionales citadas para construir el sistema estructural podrían ser sustituidas por relaciones derivadas de las condiciones de primer orden o de la ecuación de Euler del problema, estrategia seguida en algunos de los trabajos que han explorado la estimación de modelos de ciclos reales usando las técnicas econométricas convencionales. Aún en este caso quedan por salvar otros problemas propios de la estimación, el primero de ellos es el problema de identificación. De acuerdo con la estructura de los modelos de ciclos reales todas las variables del modelo son endógenas y por otro lado todas las relaciones derivadas de la ecuación de Euler contienen valores rezagados de las variables, alterándose de esta manera las propiedades de los estimadores de Mínimos Cuadrados Ordinarios, si son empleados. En general, esta estrategia de estimación no puede ser empleada para modelos que contienen más de un choque estocástico no observable.

Sobresale también que es casi norma que los choques estocásticos propios de esta clase de modelos posean correlación serial, que no necesariamente es la misma para todos los choques, lo que cambiará significativamente las propiedades de los estimadores usuales o hará necesario introducir una nueva forma de estimación, lo cual resultaría en que para casi cualquier nuevo modelo se tuvier que hacer un estudio paralelo para determinar los estimadores a usar y sus propiedades.

La forma en que los choques estocásticos no observables están incluidos en los modelos de ciclos reales como el propuesto por Kydland y Prescott hace imposible el empleo de técnicas más sofisticadas de medición tales como el filtro de Kalman, pasando por alto que en la estimación se trabajaría con otra estimación que indudablemente induciría un sesgo en los estimadores que se emplearan.

Aún cuando se estuviera en la mejor de las situaciones surge la interrogante ¿El número de datos con que se cuenta es suficiente para que las estimaciones de los parámetros sean confiables? El número de observaciones confiables al año para la variables empleadas en la estimación de modelos de ciclos reales es, a lo sumo, cuatro. Un modelo tan simplificado como los que se tratan en este trabajo requiere de la estimación de 6 parámetros y si se dipusiera de la información de 10 años se tendrían 40 observaciones que no representan una garantía de las estimaciones que se obtengan. Considérese el caso de un modelo con un mayor número de parámetros que no podrá hacer uso de mayor información.

Otra opción para la estimación de modelos de ciclos reales es el método generalizado de momentos, pero también está sumamente limitado para la mayoría de los casos en que no se conoce la solución analítica del problema. Por ejemplo, no es aplicable cuando hay más de un choque estocástico no observable y estos no conducen sólo a términos de error aditivos. Es preciso notar que, además de ser un método más complicado que la calibración, la forma de incorporar información adicional es más complicada que en la calibración.

En estas condiciones la calibración se erige como un método de estimación con un mayor campo de aplicación, fácil de implementar y que permite de manera sencilla incorporar información adicional a la contenida en los datos. Éste último rasgo distintivo es de particular interés desde el punto de vista práctico, pues en general, es difícil hacerlo de manera directa.

Para ilustrar el empleo de la información de otros estudios en el método de calibración, consideremos el trabajo de Plosser (1989). En lo particular, este autor eligió una función de utilidad del tipo logarítmica y como función de producción del tipo Cobb-Douglas con dos insumos: capital y trabajo. Los datos por él usados fueron, como producto el producto real no agrícola per cápita, como proxy del empleo la fracción per cápita de la semana destinada al trabajo por los empleados no gubernamentales, para representar la inversión tomó la suma de la inversión fija no residencial y el consumo de bienes durables y el salario es la ganancia promedio por hora de todos los trabajadores de la producción.

La participación del trabajo en el producto, es calculada como la razón promedio del total de compensaciones a los empleados al producto nacional bruto para el período 1948-1985, para la función de producción considerada esto implica que el exponente del trabajo es α=0.58. La depreciación (δ=0.1) es supuesta a ser el 10% por año. El factor de descuento de la utilidad (β=0.95) es elegido para proporcionar un retorno al capital de 6.5% por año, que es el retorno real promedio de las acciones para el período 1948-1981. Finalmente, el coeficiente del logaritmo del número de horas dedicadas al ocio es elegido indirectamente de manera que la proporción de horas dedicadas al trabajo en el estado estacionario sea de 0.2 que está basado en la fracción promedio de horas dedicadas al mercado de trabajo en el período 1948-1985.

Si las preferencias y las tecnologías son semejantes a las usadas en estudios empíricos, se facilita la revisión en cuanto a lo razonables que pueden ser muchos valores de los parámetros. Asimismo, se facilita la selección de valores de los parámetros para los cuales el estado estacionario del modelo está cerca de los valores promedio de la economía. Estas dos consideraciones reducen dramáticamente el número de parámetros libres que serán variados cuando se busca un conjunto que resulte en convarianzas cercanas a las observadas. En la explicación de Kydland y Prescott (1982) de las componentes cíclicas hay sólo siete parámetros libres, con el rango de dos de ellos estando severamente restringido.

Una limitación potencial al empleo de datos obtenidos de estudios microeconómicos es que frecuentemente los modelos microeconómicos y los macroeconómicos son sumamente diferentes tanto en la dinámica y las formas de heterogeneidad entre los agentes supuesta. Además de esto tanto en estudios micro y macroeconómicos los parámetros algunas veces son estimados de manera imprecisa.

La Calibración como Estimación

El enfoque de "calibración" para la estimación propuesto por Kydland y Prescott (1982) y Prescott (1986) puede ser reinterpretado, desde el punto de vista econométrico, como un estimador del tipo de método de momentos basado en ciertas condiciones de momentos seleccionadas a priori. Una interpretación alternativa de la calibración es que es una prueba del modelo. Si no hay parámetros libres (y más generalmente si hay más momentos que parámetros), entonces la comparación de los momentos poblacionales del modelo con aquellos de las series de tiempo históricas puede ser pensado como una prueba, muy semejante a las pruebas de restricciones de sobreidentificación adoptadas con estimación del método generalizado de momentos[1]. Vale la pena mencionar que la calibración y el método generalizado de momentos fueron introducidos a la macroeconomía al mismo tiempo y en la misma publicación: Econometrica 1982.[2]

El método de calibración consiste en tres etapas. En la primera los datos son suavizados con un filtro arbitrario. Segundo un conjunto de parámetros es seleccionado en relación a evidencia microeconómica o valores de largo plazo de las series económicas. Por ejemplo, Long y Plosser (1983) encuentran valores para los parámetros de su modelo usando estudios de insumo-producto.

El tercer paso en el método de calibración es la selección de los parámetros. Estos son elegidos para hacer que ciertas propiedades del modelo o sus simulaciones se ajusten a aquellas de series de tiempo históricas de variables agregadas.

En la metodología de Kydland y Precott (1982), se selecciona el elemento de la malla que minimiza un cierta función de pérdida, como las siguientes:

---

[1]Una descripción del método generalizado de momentos se encuentra en Greene, W. H., Econometric Analysis, New York, Macmillan 1990.

[2]Gregory, Allan W. y Smith, Gregor W. (1990)

$$\hat{\alpha}_v = \underset{\alpha \in A}{argmin} \{ D_v(\alpha) = |Var(p_t^r) - Var(p_n^c(\alpha))| \} \quad (V)$$

$$\hat{\alpha}_c = \underset{\alpha \in A}{argmin} \{ D_c(\alpha) = |Cov(p_t^r, p_{t-1}^r) - Cov(p_n^c(\alpha), p_{n-1}^c(\alpha))| \} \quad (C)$$

$$\hat{\alpha}_m = \underset{\alpha \in A}{argmin} \{ D_m(\alpha) = E[p_t^r - p_n^c(\alpha))]^2 \} \quad (M)$$

El criterio (V) ajusta las varianzas de las dos series; la histórica p_t^r y la de las series de calibración p_n^c, el criterio (C) ajusta las autocovarianzas y el criterio (M) minimiza la media del cuadrado de la diferencia entre las dos series. Además de los tres criterios anteriores, pueden ajustarse las autocorrelaciones de las series o cuando se toma más de una serie datos observados pueden usarse las covarianzas cruzadas entre las diferentes series. Nótese también que el criterio (M) es tal vez el menos representativo de los estudios de calibración bien conocidos.

Los estimadores basados en (V) y en (C) son consistentes si a los parámetros no libres de la calibración se les asigna su verdadero valor o son estimados consistentemente. Los estimadores basados en el criterio (M) son inconsistentes puesto que ellos están basados en un ajuste puntual más que en el método de momentos, estos estimadores ilustran un riesgo potencial en la calibración.

En el estudio de Monte Carlo realizado por Gregory y Smith (1990) para un modelo de crecimiento estocástico encontraron que los estimadores de acuerdo al criterio (V) dan excelentes resultados cuando a los parámetros no libres de la calibración le son asignados sus valores verdaderos. La peor calibración obtenida por ellos es el resultante de emplear el criterio (M). Su evidencia del estudio de Monte Carlo sugiere qye el método generalizado de momentos son los más confiables y convergen rápidamente al valor verdadero de los parámetros. A pesar de esta observación, hay modelos dinámicos de equilibrio para los cuales la estimación con el método generalizado de momentos no es práctico o exige una gran capacidad de cómputo. En los casos en que no es factible usar el método generalizado de momentos los autores sugieren que se calculen las expresiones analíticas para los momentos para determinar que parámetros parecen más sensibles la elección del momento de calibración. Cuando la solución analítica no pueda ser encontrada ellos recomiendan que el modelo sea simulado muchas veces para alcanzar la convergencia.

McFadden (1989) y Pakes y Pollard (1989) prueban la consistencia y la normalidad asintótica de estimadores del método de momentos construidos empleando momentos muestrales generados por método de Monte Carlo. Duffie y Singleton (1988) y Bossaerts (1989a, 1989b) extendieron el método de momentos simulados a un ambiente de fijación de precios de activos. Estos estimadores son relativamente ineficientes comparados en el caso en el que los momentos de la población pueden ser calculados analíticamente; la ineficiencia relativa se desvanece conforme el tamaño de la muestra de simulación N se incrementa relativa a tamaño de muestra de los datos T. Eichembaum y Hansen (1990) muestran la aplicación del método generalizado de momentos a la estimación de modelos con sustitución intertemporal con funciones de utilidad no separables

Los estimadores de simulación (incluidos aquellos usados en la calibración) serán menos eficientes (para N finito) que los estimadores comparables del método de momentos que usan los datos reales. Pero los errores de medición en los datos pueden dar a la variable de estado un elemento de no observabilidad que hace interesante la comparación entre estrategias de comparación.

Los estimadores también pueden ser distinguidos por sus diferentes demandas de información; la calibración requiere una completa parametrización del modelo e involucra el preestablecimiento de ciertos parámetros. Los estimadores de calibración de $\pi 1$ están condicionados a los valores asignados a $\pi 2$ y $\pi 3$, mientras el método de momentos no restringido no requiere del conocimiento de estos parámetros. Es claro que las propiedades de los estimadores de los parámetros libres en la calibración dependerán de la exactitud con la cual los otros parámetros son establecidos. La única razón por la que la calibración puede ser más eficiente que el método generalizado de momentos convencional es su uso de información adicional en la forma de parámetros preestablecidos.

Singleton(1988) describe un procedimiento formal para estimar y probar que toma en cuenta el error de estimación en la evaluación de ciclos reales.

Una distinción más sutil entre los estimadores del método generalizado de momentos es en relación a su replicabilidad. Note que dos calibradores con las mismas series de datos históricos, usando modelos y momentos idénticos, y adoptando funciones de pérdida idénticas, en principio, podrían llegar a estimaciones enteramente diferentes. Puesto que para las estimaciones de calibración no se conocen sus errores estándar (aunque en principio podrían encontrarse por replicación) sino que son en sí mismas realizaciones de variables aleatorias, no es inmediatamente claro cuanta confianza debe dársele a una estimación aún cuando el modelo fuera cierto. En contraste, las estimaciones aplicando el método generalizado de momentos son únicas, sujetas a algunas condiciones de identificación,para un conjunto dado de datos y tienen una teoría asintotica bien desarrollada, aunque muchos aspectos en muestras de tamaño finito están sin resolver.

Adicionalmente debe considerarse que los estudios de calibración típicamente reportan momentos simulados y momentos observados. Pero ajustes cercanos de momentos puede no ser una evidencia fuerte en favor del modelo. Los calibradores deben proporcionar evidencia de la sensibilidad de los momentos en la economía artificial a planteamientos diferentes del modelo.

Finalmente, está pendiente aún por resolver si se deben emplear los momentos condicionales o los incondicionales de las series para la calibración, éstos últimos, expresados por ejemplo, en el contexto de un vector autoregresivo. Ha sido común el empleo de los momentos incondicionales para realizar la calibración, de manera, que como era posible esperar autores como Watson (1993) y Rotemberg y Woodford (1994), encontraron que al menos para algunas de las variantes de los modelos de ciclos reales más aceptadas los resultados de la calibración no eran consistentes con los cambios predecibles en las series de tiempo observadas de las variables agregadas.

CAPITULO IV

MODELO PROPUESTO PARA MEXICO

Para la economía mexicana se proponen y calibran dos modelos simples de ciclos reales. Ambos ignoran los distrosiones, las imperfecciones de mercado, la heterogeneidad de los agentes productivos y al gobierno. El primero de ellos (Modelo 1), es una versión ligeramente simplificada del presentado por Plosser (1989). Sin embargo, a diferencia de este autor, la función de utilidad que se emplea es del tipo de elasticidad de sustitución constante (ESC), que es un caso más general y que incluye como caso particular la función de utilidad logarítmica por él empleada. El segundo (Modelo 2) es un modelo con tiempo para construir. Es semejante, pero simplificado, al propuesto por Kydland y Prescott (1982). Este planteamiento es análogo al hecho por Quiroz et al. (1991) para las economías de Bolivia, Chile y Perú, con un método de solución para el problema estocástico diferente al empleado en los trabajos aquí citados.

Especificación Teórica

Modelo 1

Siguiendo la estrategia usual en el planteamiento de los modelos de ciclos reales, a una economía como la descrita en el Capítulo II se le asignan en forma explícita formas funcionales que representen las preferencias, la tecnología y el entorno económico. En particular, esta economía tiene las siguientes características:

a) Hay un solo bien Y que es producido con dos insumos: capital y trabajo.

b) Hay muchos productores con la misma tecnología.

c) Hay muchos consumidores con la misma función de bienestar.

d) La utilidad de los individuos solo depende del consumo y, además, tiene la propiedad de separabilidad[1], esto es, la utilidad es igual a la suma descontada de las utilidades derivadas de los consumos en los diferentes instantes (períodos) de tiempo.

e) La economía está sujeta choques aleatorios multiplicativos transitorios a la productividad.

f) Los agentes en cada período conocen la productividad de los factores y por tanto el choque presente. Sin embargo desconocen los choques de productividad para los siguientes períodos.

En el caso discreto, esta economía es descrita por las siguientes ecuaciones:

$$Y_t=F(k_t,n_t) \tag{4.1}$$

$$C_t+I_t \leq e^{z_t}F(k_t,n_t) \tag{4.2}$$

[1]Eichembaum y Hansen (1990a) hacen una crítica al supuesto de separabilidad de la función de utilidad. Sin embargo este supuesto se hará por lo simplificador que resulta.

$$k_{t+1}=(1-\delta)k_t+I_t \qquad (4.3)$$

$$0 \le n_t \le 1 \qquad (4.4)$$

$$W=\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t) \qquad (4.5)$$

donde:

C_t.- Es el consumo del período t.

I_t.- Es la inversión del período t.

n_t.-Número de horas destinadas a la producción en el período t.

K_t.-Acervo de capital en el período t.

δ.- Es la tasa de depreciación por período del capital.

Y_t.- Es el producto del período t.

$F(K_t,n_t)$.- Es la función de producción que representa la tecnología con la que cuentan los productores; cumple, al igual que la función de utilidad, las condiciones de regularidad de Imada.

e^{zt}.- Es el choque aleatorio de productividad en el período t.

Debido a que el trabajo no reduce la utilidad e incrementa el producto, tendremos una oferta de trabajo totalmente inelástica e igual a su valor máximo, lo que permite eliminar al trabajo como argumento de la función de producción.

Como puede observarse, es un caso sumamente sencillo, porque supone separabilidad de la función de utilidad, porque la utilidad solo se deriva del consumo, porque los choques aleatorios solo son sobre la productividad, etc. Sin embargo, puede proporcionar información e intuición sumamente útil para la comprensión del comportamiento de los agentes económicos y del movimiento de las variables macroeconómicas.

Como ya se mencionó anteriormente, para una economía sin distorsiones, imperfecciones de mercado y agentes homogéneos, el equilibrio competitivo puede describirse a través de las asignaciones óptimas en el sentido de Pareto. Estas, a su vez, pueden ser encontradas solucionando el problema de planificador social. El problema de maximización que enfrenta el planificador social queda de la siguiente manera:

$$\max E_t[\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j})] \tag{4.6}$$

sujeto a:

$$c_t+k_{t+1}-(1-\delta)k_t=f(k_t,\theta_t) \tag{4.7}$$

La ecuación de Euler correpondiente a este problema, cuya deducción se presenta en forma detallada en el apéndice I, es la siguiente:

$$U'(C_t)=\beta E_t\{U'(C_{t+1})(f'(k_{t+1})+(1-\delta))\} \tag{4.8}$$

En el presente trabajo se propone que la función de utilidad es del tipo de elasticidad de sustitución constante,

$$U(C_t)=\frac{C_t^{1-\tau}}{1-\tau} \tag{4.9}$$

Por otro lado se propone que la función de producción de la economía sea del tipo Cobb Douglas

$$f(k_t)=e^{z_t}k_t^{\alpha} \tag{4.10}$$

que junto con la restricción presupuestaria de la economía, permite calcular la trayectoria óptima del consumo y el capital para esta economía.

Además, se supone que los choques a la productividad siguen un proceso autorregresivo de orden 1 (AR1).

$$z_{t+1}=\rho z_t+\epsilon_{t+1} \qquad \epsilon_t \sim N(0,\sigma^2) \tag{4.11}$$

Este supuesto se hace por dos razones: la primera es que en la literatura los mejores resultados se han obtenido haciéndolo y la segunda es que es un proceso de tipo Markov, por lo cual posee la propiedad de que toda la información del mismo está contenida en la última observación. Esta propiedad es benéfica para el método de solución al problema estocástico aquí usado.

Modelo 2

Se trata de un modelo con tiempo para construir del tipo propuesto por Kydland y Prescott (1982). Estos autores señalan que la estructura neoclásica – como la del Modelo 1– es inconsistente con la asociación positiva entre el precio sombra del capital y la actividad inversionista. Así como que la tecnología de costo de ajuste si es consistente con la observación citada, pero es inconsistente con los datos de sección transversal y la asociación entre la inversión y con los precios sombra del capital actuales, así como con sus rezagos. Además, la implicación de que las elasticidades oferta de corto y largo plazo son iguales es una de las que consideramos que la tecnología no debe tener. Lo más destructivo de la tecnología con costo de ajuste, sin embargo, es el hallazgo de que el tiempo para completar los proyectos de inversión no es corto en relación a los ciclos económicos. Mayer (1960) en base a una encuesta, encontró que el tiempo promedio entre la toma de decisión de llevar a cabo un proyecto de inversión y su terminación era de 21 meses[2]. Dicen los mismos autores que no encontraron evidencia de que los bienes de capital sean construidos significativamente más rápido cuando la inversión total es más alta ó más baja.

Con estas consideraciones y partiendo del hecho de que las fábricas no se construyen en un día, plantean la hipótesis de que el supuesto de períodos múltiples para construir es crucial para explicar la fluctuaciones agregadas. En particular, proponen un modelo en el cual la inversión tarda cuatro períodos en madurar (1 año), con un distribución uniforme a lo largo de los cuatro períodos del costo de la inversión.

Siguiendo esta línea de razonamiento, el segundo modelo que se propone para explicar las fluctuaciones cíclicas de la economía mexicana, es el que corresponde a una economía sin distorsiones, imperfecciones de mercado ni agentes heterogeneos, con las mismas propiedades del Modelo 1, descrito líneas arriba, que incluye una restricción-compromiso de cuatro perídos para la maduración de la inversión.

De igual forma que en el modelo anterior, para encontrar las asignaciones correspondientes al equilibrio competitivo, se resolverá el problema del planificador social.

Es pertinente aquí señalar que desde el punto de vista puramente matemático la introducción del tiempo para construir

[2] Para el caso de México conversaciones con personas que laboran en el sector de la construcción sugieren un comportamiento semejante.

tiene como consecuencia que la ecuación en diferencias estocástica asociada a la solución del problema de maximización pase, de ser de primer orden, a ser de cuarto orden.

El problema de maximización a resolver por el planificador central en este caso es:

$$Max\ E_t\ [\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j U(C_{t+j})] \tag{4.12}$$

sujeto a:

$$C_t + I_t = f(k_t) \tag{4.13}$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + s_t^1 \tag{4.14}$$

$$I_t = \sum_{j=1}^{4} \varphi_j s_t^j \tag{4.15}$$

$$s_{t+1}^j = s_t^{j+1} \qquad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{4.16}$$

En el apéndice I se presenta de manera detallada la deducción de la ecuación de Euler para este problema:

$$\begin{aligned} U'(C_t) = \frac{\beta}{\varphi_4} E_t\{ & (\varphi_4\mu-\varphi_3)U'(C_{t+1}) + \beta(\varphi_3\mu-\varphi_2)U'(C_{t+2}) \\ & + \beta^2(\varphi_2\mu-\varphi_1)U'(C_{t+3}) + \beta^3 U'(C_{t+4})[f'(k_{t+4})+\varphi_1\mu]\} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Con objeto de hacer transparente la comparación de ambos modelos y determinar si la introducción de la restricción del tiempo mejora los resultados para el Modelo 2 se, supondrán las mismas funciones de utilidad, de producción y el mismo proceso generador de los choques estocásticos a la productividad que en el Modelo 1. Sustituyendo las formas funcionales mencionadas en la ecuación de Euler, se obtiene

$$
\begin{aligned}
C_t^{-\tau}=\frac{\beta}{\varphi_4}E_t\{&(\varphi_4\mu-\varphi_3)\,C_{t+1}^{-\tau}+\beta\,(\varphi_3\mu-\varphi_2)\,C_{t+2}^{-\tau}+\beta^2\,(\varphi_2\mu-\varphi_1)\,C_{t+3}^{-\tau}\\
&+\beta^3 C_{t+4}^{-\tau}\,[f'(k_{t+4})+\varphi_1\mu]\}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4.18)}
$$

Al igual que Kydland y Prescott (1982) y Quiroz et al. (1991) se supondrá que el costo total de la inversión está distribuido uniformemente a lo largo del período de construcción.

Solución Numérica

Puesto que para los problemas como los planteados en este capítulo no se conoce la solución analítica, se hace necesario emplear alguno de los métodos de solución numérica que se encuentran en la literatura, los cuales se describen en el capítulo II. A diferencia de los autores referidos en el presente capítulo, quienes emplean como método de solución la aproximación lineal cuadrática, se emplea el método de parametrización de expectativas. La razón de esta elección es que el segundo método es la solución aproximada al problema planteado, partiendo de las condiciones de optimalidad, en tanto que el primer método es la solución exacta a un problema aproximado al planteado. Sin embargo, recordando los resultados del estudio comparativo de Taylor y Uhlig (1990), no puede esperarse que los resultados sean significativamente diferentes empleando un método de solución o el otro.

Modelo 1

De acuerdo con lo expuesto en el Capítulo II para el método de parametrización de expectativas, se propone que la esperanza del lado derecho de la ecuación de Euler

$$C_t^{-\tau}=\beta E_t\{C_{t+1}^{-\tau}[\alpha e^{z_t}k_{t+1}^{\alpha-1}+(1-\delta)]\} \qquad \textbf{(4.19)}$$

sea una función positiva de las variables de estado de la forma

$$E_t\{C_{t+1}^{-\tau}[\alpha e^{z_t}k_{t+1}^{\alpha-1}+(1-\delta)]\}=e^{b_0+b_1\log k_t+b_2 z_t+b_3 z_t^2} \qquad \textbf{(4.20)}$$

el algoritmo seguido para la solución de este modelo es el siguiente:

a) Se asignan valores a los parámetros del modelo.

b) Se especifica un criterio de convergencia para los coeficientes b_i $i=0,\ldots,3$ así como valores iniciales de los mismos.

c) Se asignan valores iniciales; al capital un valor semejante al del estado estacionario de la economía no estocástica y al choque productivo el valor de cero.

d) Se genera una serie de choques productivos de acuerdo con el proceso generador propuesto.

e) Para cada uno de los períodos siguientes:

e.1) Se evalúa la ecuación (4.20).

e.2) Sustituyendo en la ecuación de Euler el resultado anterior se calcula el valor del consumo para ese período.

e.3) Empleando la restricción presupuestaria de la economía y el consumo calculado en el paso anterior se determina cual será el acervo de capital para el siguiente período.

f) Empleando minímos cuadrados no lineales se estiman los valores de los coeficientes b_i para i=0,...,3 usando como variable dependiente el lado izquierdo de la ecuación (4.20) sustituyendo los valores de las variables por los valores de la solución obtenido hasta ese momento.

g) Se observa la diferencia entre los coeficientes obtenidos en la última regresión no lineal, si es menor al valor establecido como criterio de convergencia preestablecido se estiman los momentos de interés y se reportan los resultados. De no ser así, se asignan nuevos valores a los coeficientes de la ecuación (4.20), como una combinación lineal de los valores actuales y los obtenidos de la última regresión.

Modelo 2

Para este modelo, como el número de variables de estado aumenta por la introducción de la restricción de tiempo de maduración de la inversión, el lado derecho de la ecuación de Euler se aproxima de la siguiente manera:

$$e^{b_0+b_1\log k_t+b_2\log k_{t-1}+b_3\log k_{t-2}+b_4\log k_{t-3}+b_5 z_t+b_6 z_t^2} \qquad \textbf{(4.21)}$$

que es el análogo de la ecuación (4.20), usada para la estimación del Modelo 1. El algoritmo de solución es exactamente el mismo que el empleado para el Modelo 1, sólo que ahora el número de coeficientes para la aproximación de la expectativa a estimar es mayor y las expresiones algebraicas para la ecuación de Euler, así como para la restricción presupuestaria, tienen un mayor número de términos.

Calibración

Para la estimación de los parámetros α β δ ρ σ y τ contenidos en los modelos aquí propuestos se seguirá el enfoque de calibración descrito en el capítulo III. Es claro que para llevar a cabo la calibración de un modelo deben especificarse los momentos de las series observadas que se tratan de replicar, así como el criterio de selección de los parámetros. De manera análoga a lo hecho por Quiroz et al. (1991) para ambos modelos se tratan de replicar los siguientes momentos de las series observadas:

a) Desviación estándar del logaritmo producto Y.
b) Desviación estándar de la razón Inversión/Producto R.
c) Correlación cotemporánea entre la razón Inversión/Producto R y el logaritmo del producto Y.
d) Autocorrelaciones seriales de orden 1 a 3 del producto Y.
e) Autocorrelaciones seriales de orden 1 a 3 de la razón Inversión/Producto R.

Se elige como estimaciones de los parámetros al conjunto de valores asigandos a ellos al que correponde el mínimo de la función aquí llamada criterio de selección, especificada para cada uno de los modelos.

El valor asociado del criterio de selección asociado a cada conjunto valores de los parámetros fué la media de los valores obtenidos para dicho criterio de 10 muestras simuladas de 3000 puntos en el tiempo cada una. Con el fin de evitar las variaciones inducidas por el valor inicial del acervo de capital, todos los momentos de las series generadas por la solución de los modelos se calculan con las observaciones 1500 a 3000 de la muestra, ya que claramente corresponden al estado estacionario de la economía simulada.

Todos los cálculos, tanto para las series observadas como para las simuladas, al igual que las simulaciones mismas, se realizaron en una computadora IBM PC compatible con el auxilio del paquete econométrico RATS versión 4.10. En el Apéndice II se presentan el programa elaborado para cada uno de los modelos. Cabe señalar que para comprobar la correcta implementación del método de solución propuesto en los programas usados se "corrió" el modelo descrito en Taylor y Uhlig (1990) con los valores de los parámetros también ahí empleados, obteniéndose resultados que son cualitativamente los mismos y cuantitativamente muy cercanos a los reportados por Marcet y Hansen en ese trabajo por lo que dadas las consideraciones aplicables al caso, podemos conluir que el método de parametrización de expectativas empleado fué correctamente implementado.

Momentos Observados

De acuerdo con la especificación de los modelos, tanto la variable nivel de producto como la de inversión en los modelos especificados son valores brutos; en consecuencia, para calcular los valores de los momentos de las series observadas empleados para la calibración, se usan la variable Producto Interno Bruto (PIB) y Formación Bruta de Capital Fijo como estimaciones del nivel de producto y de la inversión bruta. Para una mejor estimación es necesario tener el mayor número de datos posibles, lo que implica que la frecuencia de los mismos debe ser los más alta posible. En este caso el período de tiempo mínimo entre cada observación para las variables citadas es un trimestre. Para la estimación de los momentos observados en la economía mexicana se emplearon los índices trimestrales de 1980 a 1992 y los niveles para el año base de la publicación del Banco de México "Indicadores Económicos".

Debe recordarse que los modelos aquí especificados en el largo plazo poseen un estado estacionario alrededor del cual tienen lugar las fluctuaciones de las variables económicas. Por tal motivo, a las series observadas se les debe eliminar las componentes tendencial y estacional. De acuerdo con lo planteado en el Apéndice III en relación a la forma de quitar la tendencia y la componente estacional de las series, el filtrado de las series se aplicó a los logaritmos de las mismas. Para el cómputo de los momentos correspondientes al producto se emplearon los residuos resultantes de una regresión lineal estimada con el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios donde el logaritmo del nivel observado del PIB es variable dependiente y las variables independientes son el tiempo, para eliminar la tendencia de los datos, y una variable binaria (dummy) para cada uno de los trimestres del año con objeto de eliminar las componentes estacionales. Debido a que los modelos propuestos requieren que la inversión y el producto compartan la misma tendencia, la razón Inversión/Producto R sólo fué desestacionalizada. Los resultados obtenidos fueron

PROPIEDADES DE LOS DATOS

(REGRESION LINEAL CON MCO)

DESV STD Y	0.03297
DESV STD R	0.03104
CORR(Y,R)	0.75683
CORR(Y,Y(-1))	0.87184
CORR(Y,Y(-2))	0.70481
CORR(Y,Y(-3))	0.50559
CORR(R,R(-1))	0.92688
CORR(R,R(-2))	0.83824
CORR(R,R(-3))	0.71816

donde:

Y.- LOG NAT PIB

R.- FORMACION BRUTA DE CAPITAL FIJO / PIB

Con fines únicamente ilustrativos de cómo los resultados anteriores pueden diferir por el empleo de filtros diferentes y para subrayar la importancia del empleo de un filtro "neutro", a continuación se muestran los mismos resultados anteriores, pero obtenidos a partir del empleo del filtro de Hodrick y Prescott (1980) filtro usado por Kydland y Prescott.

PROPIEDADES DE LOS DATOS

(FILTRO HODRICK-PRESCOTT)

DESV STD Y	0.02302
DESV STD R	0.03104
CORR(Y,R)	0.41407
CORR(Y,Y(-1))	0.75147
CORR(Y,Y(-2))	0.47512
CORR(Y,Y(-3))	0.13399
CORR(R,R(-1))	0.92688
CORR(R,R(-2))	0.83824
CORR(R,R(-3))	0.71816

Y.- LOG NAT PIB

R.- FORMACION BRUTA DE CAPITAL FIJO / PIB

Modelo 1

En la calibración de este modelo no se tomó para ningúno de los parámetros un valor preestablecido procedente de otra fuente de información, es decir, todos los valores de los parámetros del modelo se eligieron como aquellos que hacían que el criterio de selección tomara el menor valor cuando ese parámetro era variado manteniendo el resto fijos. Este sería el caso cuando no se contara con información econométrica adicional proveniente de otros estudios. El criterio de selección fué

En las figuras 1, 1a y 2 se muestra un patrón típico de las variables económicas de interés obtenidas con este modelo y usando el método de solución descrito. En las figuras 2 a 7 se muestra la variación del criterio de selección cuando cambia el

$$SSQ=\sqrt{\sum_{i=1}^{9}(M_i^s-M_i^o)^2}$$

donde:

(4.22)

M_i^s.- Momento i de la serie simulada.

M_i^o.- Momento i de la serie de tiempo observada.

SSQ.- Criterio de seleccion.

valor de cada uno de los parámetros del modelo. Cabe hacer notar que de manera semejante a lo reportado por Kydland y Prescott (1982) los resultados, salvo en el caso de un par de parámetros α y δ, fueron poco sensibles a la variación de los mismos y no indicaban tendencia alguna de su efecto sobre el criterio de selección. El conjunto de valores finalmente elegido como estimaciones de los parámetros fué

$$\alpha=0.47$$
$$\tau=0.78$$
$$\beta=0.96$$
$$\sigma=0.003$$
$$\delta=0.004$$
$$\rho=0.9$$

Estos valores son razonables para todos los parámetros excepto para la desviación estándar del choque productivo σ y el factor de depreciación δ que resultaron muy bajos. Esto puede ser debido a que este procedimiento es una forma de optimización local y en consecuencia si los valores de los parámetros que primero se eligen se alejan significativamente de los valores iniciales la optimización no es todo lo precisa que se deseara.

Es importante notar que:

i) Para todos los valores de los parámetros simulados se observó que el método de solución efectivamente conducía a un estado estacionario. En este estado estacionario el valor medio del acervo de capital y el consumo es el mismo que el que se obtiene en la solución del modelo determinista.
ii) Para todos las simulaciones hechas no se observo ningún caso de no convergencia a la solución, para los valores iniciales de los coeficientes b_i.

Como se presenta más adelante los momentos obtenidos en la simulación de 500 muestras para el conjunto de valores de los parámetros elegido con este procedimiento no son satisfactorios.

Modelo II

El criterio de selección empleado en este modelo fué

$$SSS=\sum_{i=1}^{9} |M_i^s-M_i^o| \tag{4.23}$$

donde:

M_i^s.- *Momento i de la serie simulada.*

M_i^o.- *Momento i de la serie de tiempo observada.*

SSS.- Criterio de seleccion.

Calibración con optimización local

Como primera aproximación a la calibración de este modelo se empleó el mismo procedimiento que en el caso del Modelo 1,En la figura 8 se muestra un patrón típico de movimiento a lo largo del tiempo de las variables económicas relevantes en esta economía. Las figuras 9 a 14 se presenta el comportamiento del criterio de selección al cambiar cada uno de los parámetros del modelo. El conjunto de valores de los parámetros que hacían que el criterio SSS tuviera el menor valor para los rangos de los parámetros considerados fué

$$\alpha=0.36$$
$$\sigma=0.026$$
$$\beta=0.95$$
$$\tau=0.84$$
$$\delta=0.038$$
$$\rho=0.86$$

siendo estos valores de los parámetros más razonables que los obtenidos con el Modelo 1, resultando sólo un poco alto el valor de la tasa de depreciación del capital y un poco bajo el valor de el factor de descuento con respecto a los que se podrían esperar de acuerdo a la información disponible del Sistema de Cuentas Nacionales del INEGI. Es importante notar que durante la calibración de este modelo se observó lo siguiente:

i) La convergencia de la solución para un conjunto de valores de los parámetros dado es sumamente sensible a los valores iniciales de los coeficientes de la expresión (4.21), al grado que una diferencia de 0.1 en el valor inicial de los coeficientes provoca que la solución no converja. Fenómeno que no se presentó en ninguno caso de los simulados para el Modelo 1. Pero, para todos los valores de los parámetros considerados en este trabajo se pudo encontraron valores iniciales que con los que se obtuvo convergencia en la solución.

ii) Para todos los casos convergentes se observo que la economía alcanzaba un estado estacionario alrededor del cual se observaban las fluctuaciones de las variables económicas. Este estado estacionario fué muy semejante al correspondiente para el modelo determinista con el mismo número de períodos de maduración de la inversión.

iii) Los coeficientes obtenidos de las regresiones no lineales en la expresión (4.21) para los términos que contienen el choque estocástico en forma lineal o al cuadrado son significativamente más grandes que sus similares en la ecuación (4.20) del Modelo 1.

iv) De manera congruente con lo descrito en el punto i) el criterio de convergencia empleado debe ser sumamente pequeño para que la aproximación a la esperanza matemática hecha con la expresión (4.21) sea aceptable.

v) En ninguna de las simulaciones realizadas la solución solución mostró que para algunos períodos hubiera inversión o consumo negativo.

vii) El tiempo máquina requerido para la simulación de este modelo es entre 5 y 7 veces mayor al que se requiere para la simulación del Modelo 1.

Estas observaciones coinciden con lo que podía esperarse. Por ejemplo, lo descrito en los incisos i) y ii) es fácilmente explicable si tenemos en mente que dada una sucesión de choques productivos y un vector de coeficientes b_i lo que se hace con el algoritmo usado no es otra cosa que sustituir en la ecuación en diferencias implícitamente definida por la función de expectativas y la restricción presupuestaria, la cual es de cuarto orden que puede tener soluciones explosivas, pero que no satifacen la condición de transversalidad.

De igual forma lo observado en el punto número iii) puede explicarse de la siguiente manera: debido al tiempo de maduración de la inversión, la cantidad de producto destinado a incrementar el acervo de capital incorpora un compromiso para los siguientes tres períodos que restringirá las posibilidades de consumo, por lo que el peso relativo que se da a los choques productivos en las expectativas de los períodos futuros es mayor.

Por otro lado, puesto que las funciones de producción y de utilidad son las mismas en los dos modelos puede esperarse que los estados estacionarios de ambos sean semejantes lo cual hace inferir que los coeficientes de la función que representan las expectativas sean también similares por lo que la estrategia para determinar los valores iniciales de los coeficientes b_i adecuados para obtener convergencia en la solución del modelo 2, para un conjunto de valores de los parámetros, consistió en:

a) Asignar a los coeficientes asociados con el choque a la productividad los valores obtenidos para ellos en la última regresión calculada en la solución del modelo 1 para el mismo conjunto de parámetros

b) Para los coeficientes asociados con los acervos de capital se asignaron valores tales que su suma fuera igual al coeficiente del acervo de capital obtenido en la última regresión hecha para el modelo 1 con el mismo conjunto de valores de los parámetros.

Los resultados de la solución así como el éxito de la estrategia seguida para determinar los valores iniciales de los coeficientes b_i confirman el supuesto hecho respecto a la relación entre los estados estacionarios de los modelos y que no necesariamente implica el mismo comportamiento de las fluctuaciones alrededor del estado estacionario.

Calibración usando una malla con parámetros predeterminados

Con objeto de comparar el conjunto de parámetros que minimizan el criterio de seleccoón SSS siguiendo el procedimiendto de optimización local y aquellos que se obtienen al tomar una malla con parámetros preestablecidos como lo hacen Kydland y Prescott (1982) se construyeron 3 mallas donde únicamente se variaban los parámetros τ (inverso de la elasticidad de sustitución intertemporal) y σ (desviación estándar del término de ruido blanco gaussiano asociado al proceso autorregresivo que genera los choques de productividad.

Al resto de los parámetros se les asignaron valores de la manera siguiente:

i) α=0.6, β=0.975, δ= 0.01, ρ=0.9 para la malla 1 cuyos resultados se muestran en las tablas I y II al final de este capítulo.
ii) α=0.36, β=0.975, δ= 0.01, ρ=0.9 para la malla 2 cuyos resultados se muestran en las tablas III, IV y V al final de este capítulo.
i) α=0.6, β=0.975, δ= 0.02, ρ=0.9 para la malla 3 cuyos resultados se muestran en las tablas I y II al final de este

capítulo.

Los valores de los parámetros predeterminados fueron fijados en lo posible de manera consistente con lo reportado por el Sistema de Cuentas Nacionales de INEGI y lo sugerido por los resultados de Kydland y Prescott (1982). A este respecto es necesario notar que si se fija el valor del parámetro α con la información reportada en el Sistema de Cuentas Nacionales para el excedente de operación se se sobreestimará dicho parámetro debido a que este rubro incluye utilidades de profesionistas y otros trabajadores independientes así como las utilidades de empresas familiares. Los parámetros que minimizan el criterio SSS en las tablas son:

i) τ= 0.90 y σ=0.01 en la malla 1.

ii) τ= 0.76 y σ=0.01 en la malla 2.

iii) τ= 0.90 y σ=0.008 en la malla 3.

El parámetro τ así determinado es muy semejante al obtenido anteriormente, sin embargo, la volatilidad de los choques es menor a la que se había elegido, De los resultados que mostrados en las tablas II, IV y VII no rsulta claro cuales son los rangos y el sentido en que debe variarse el parámetro σ con objeto de replicar la correlación entre Y e R, ya que, dado el conjunto de parámetros predeterminados, para ciertos intervalos de este parámetro al incrementar su valor dicho momento se vuelve más negativo y para otros resulta al contrario.

Los resultados presentados en estas tablas al igual que los discutidos previamente también manifiestan una relativa insensibilidad de los resultados a las variaciones de los parámetros como lo reportan en sus resultados Kydland y Prescott (1982),

Un hecho sobresaliente que se observó en malla 2 y que es presentado en la tabla V es que para todos los parámetros ahí considerados la media de la razón Inversión/Producto R fué de 15.2% con variaciones menores 0.1%, siendo ésta razón una medida no considerada en el criterio de selección y muy semejante al valor obsevado para la economía mexicana.

Lo referido en los párrafos anteriores sugiere, como lo apuntan Kydland y Prescott (1982), que aún cuando los parámetros pueden diferir a través de las economías, la naturaleza de los ciclos económicos es muy semejante.

Simulaciones

Para cada uno de los modelos se realizó la simulación de 500 muestras del mismo tamaño usado en la calibración con los parámetros obtenidos por optimización local, esto con objeto, de que no hubiera duda alguna respecto a la comparabilidad de los resultados.

Los resultados de estas simulaciones se presntan en forma de hitogramas de frecuencias en las figuras 15 a 23 para el Modelo 1, en tanto que para el Modelo 2 se presentan en las figuras 24 a 32.

Los siguientes cuadros resumen las propiedades estadísticas en la simulación de cada uno de los momentos que se buscaban replicar.

Modelo 1

	Media	Desv Std	Máximo	Mínimo
Criterio SSQ	0.731651	0.015792	0.7616	0.7137
Desv. Std. Log Y	0.345198	0.011121	0.3672	0.3384
Desv. Std. Log. R	0.007912	0.006987	0.0219	0.0036
Corr(Y,R)	0.945789	0.024632	0.9890	0.8980
Corr(Y_t,Y_{t-1})	0.994208	2.7x10-5	0.9943	0.9942
Corr(Y_t,Y_{t-2})	0.988432	5.4x10-5	0.9886	0.9884
Corr(Y_t,Y_{t-3})	0.982733	6.7x10-5	0.9829	0.9827
Corr(R_t,R_{t-1})	0.984871	0.003672	0.9918	0.9791
Corr(R_t,R_{t-2})	0.970523	0.006966	0.9838	0.9603
Corr(R_t,R_{t-3})	0.956402	0.014404	0.9758	0.7258

Modelo 2

	Media	Desv Std	Máximo	Mínimo
Desv. Std. Log Y	0.053597	0.002847	0.0617	0.0436
Desv. Std. Log. R	0.028064	0.010990	0.0481	0.0181
Corr(Y,R)	-0.25635	0.089328	0.1607	-0.409
Corr(Y_t,Y_{t-1})	0.861505	0.012887	0.8988	0.8019
Corr(Y_t,Y_{t-2})	0.745615	0.023233	0.8149	0.6420
Corr(Y_t,Y_{t-3})	0.648768	0.031544	0.7466	0.5128
Corr(R_t,R_{t-1})	0.671833	0.071818	0.7484	0.4761
Corr(R_t,R_{t-2})	0.441287	0.086992	0.5499	0.1868
Corr(R_t,R_{t-3})	0.177263	0.141726	0.3506	-0.228

Antes de comparar valores numéricos vale la pena recordar que el criterio de selección empleado no penaliza de manera especial las diferencias de signo y penaliza igual una diferencia de valores sin importar que este asociada a una discrepancia, del 100% o del 5% del momento a simular por lo que es de esperarse que con este criterio las diferencias en téminos porcentuales sean más acentuadas en los momentos que tienen un orden de magnitud menor. No fué empleado otro criterio debido a que se descnocerían del todo las propiedades de convegencia de los estimadores asociados.

La comparación entre los resultados obtenidos con cada uno de los modelos es totalmente favorable al Modelo 2, tanto en los valores numéricos como en las distribuciones que presentan los histogramas correspondientes.

Así, para el Modelo 1, salvo los casos de la correlación entre el producto y la razón Inversión/Producto y las autocorrelaciones de la última razón todos los histogramas muestran una distribución sumamente concentrada en algunos puntos distantes de los momentos simulados. Este hecho es radicalmente distinto a lo que se observa en los histogramas correspondientes al Modelo 2.

Al comparar las medias de los momentos simulados con los valores observados en los datos de la economía mexicana es claro que este modelo no replica en forma adecuada el comportamiento observado. En una palabra, se desecha este modelo para fines de representar las variaciones cíclicas de la economía mexicana.

En cambio, el Modelo 2 replica de manera muy precisa 3 de las características de las series observadas, a saber: la desviación estándar de la razón inversión/producto, las autocorrelaciones de primer y segundo orden del producto. La desviación estándar del logaritmo del producto, si bien no fué replicada adecuadamente, el orden de magnitud observado en las simulaciones es el mismo que el observado en los datos. Las autocorrelaciones de la razón Inversión/Producto todas ellas resultan menores que las observadas, sin embargo, los signos así de las correlaciones simuladas y las observadas son los mismos. También, tanto en los datos como en las series simuladas la magnitud de las autocorrelaciones de la razón Inversión/Producto se reducen al aumentar su orden. Por otro lado, la mayor discrepancia entre las series simuladas con el Modelo 2 y los datos se presenta en la correlación entre el producto y la razón Inversión/Producto, la cual resultó de signo contrario (negativo) al observado, este resultado no significa el que haya una correlación negativa entre la inversión y el producto sino que la elasticidad de la inversión respecto al producto es menor a 1.

Los resultados obtenidos permiten asegurar que el tiempo para construir es un supuesto sumamente importante, en el modelo simulado, para explicar las variaciones cíclicas de una economía real. Huelga decir, que en estas circunstancias, entre los dos modelos la elección es obvia; el Modelo 2.

Finalmente es conveniente mencionar que la discrepancia en signos entre los momentos simulados y los observados no es particular de este ejercicio sino un resultado que se ha observado anteriormente en trabajos similares que aparecen en la literatura del tema. Basta mencionar que tal es el caso de Plosser (1989).

Figura 1

Patron dinamico tipico para el Modelo 1

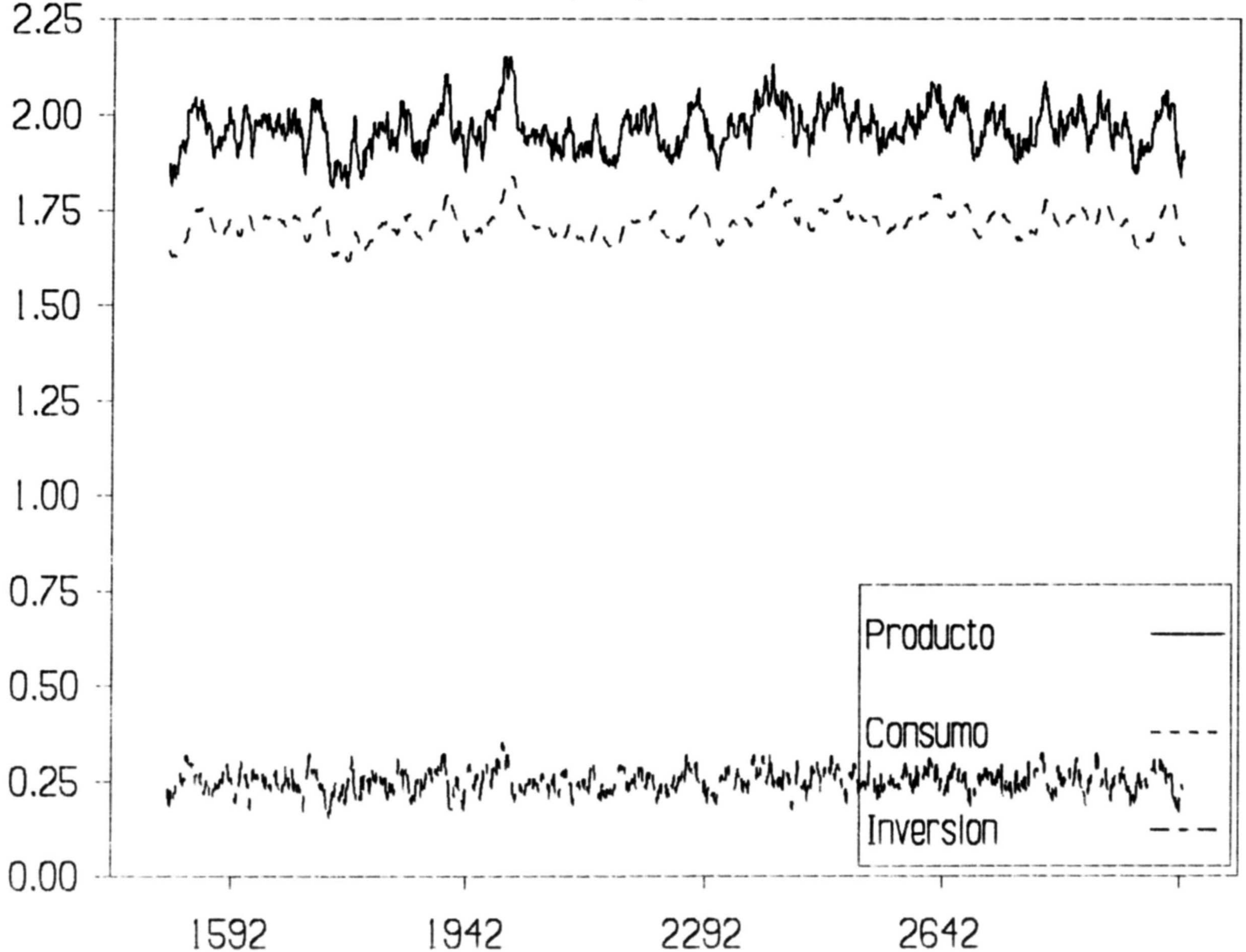


Figura 1a

Patron dinamico tipico para el Modelo 1

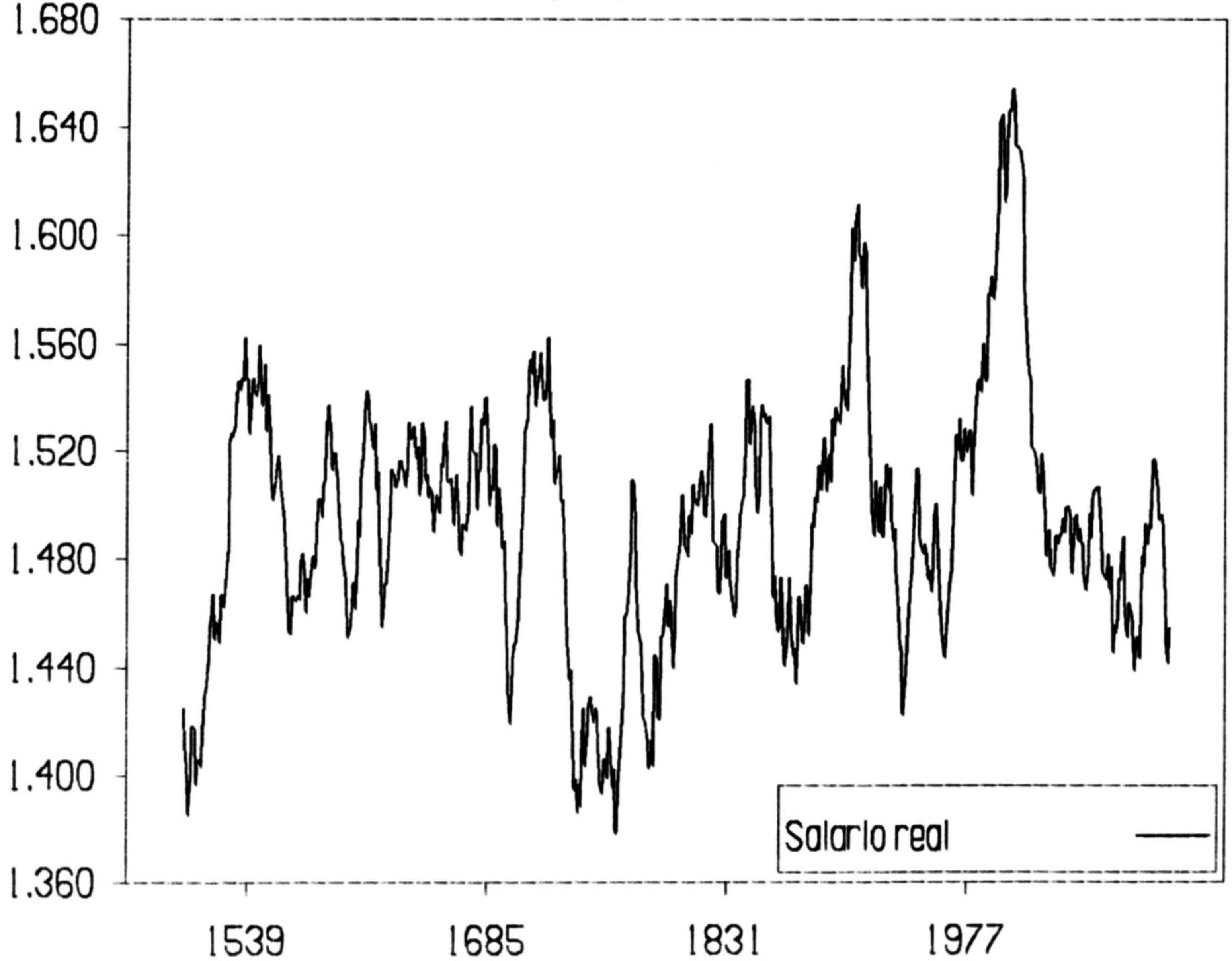


Figura 2

Patron dinamico tipico para el Modelo 1

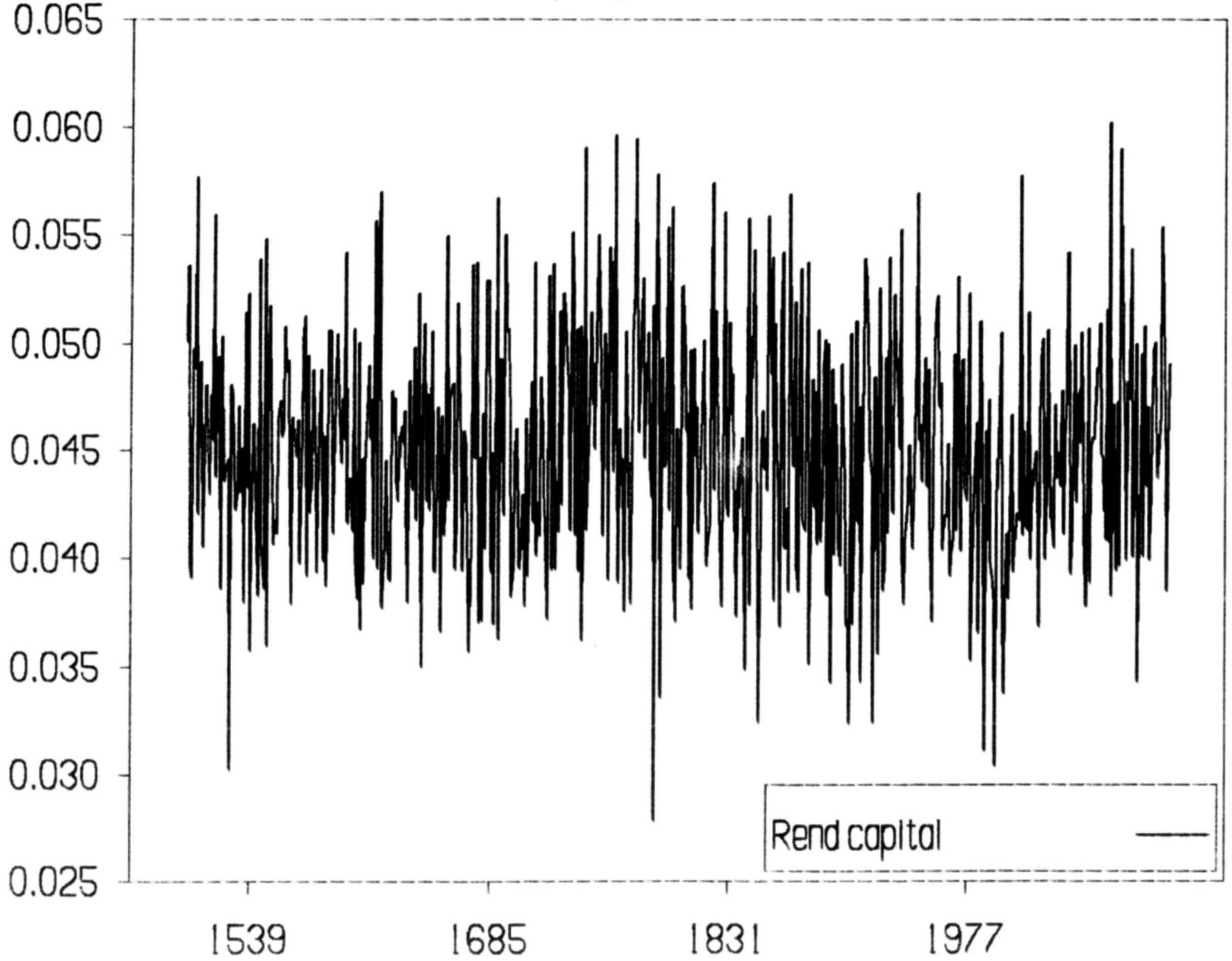


Figura 3
Modelo No. 1

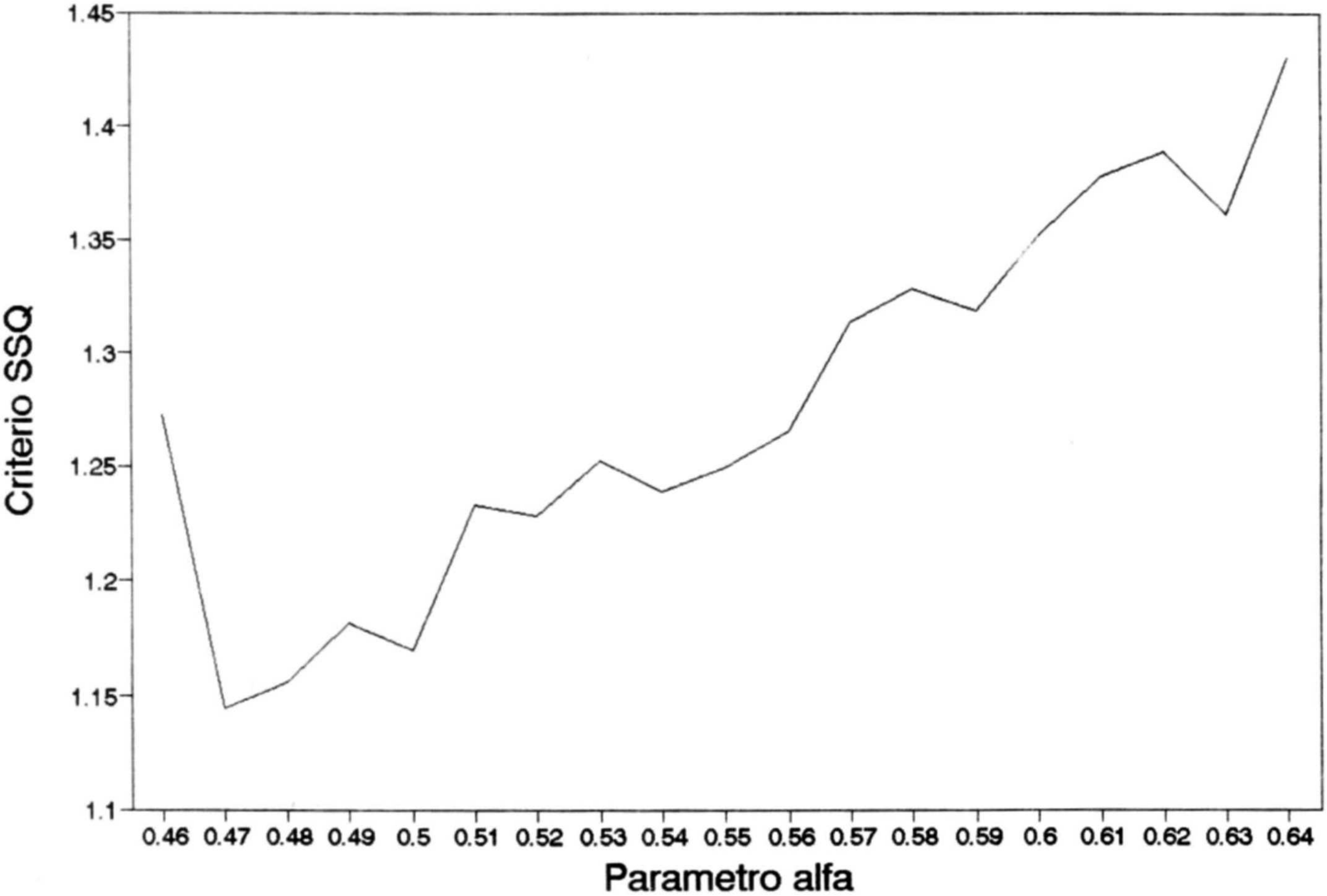


Figura 4
Modelo No. 1

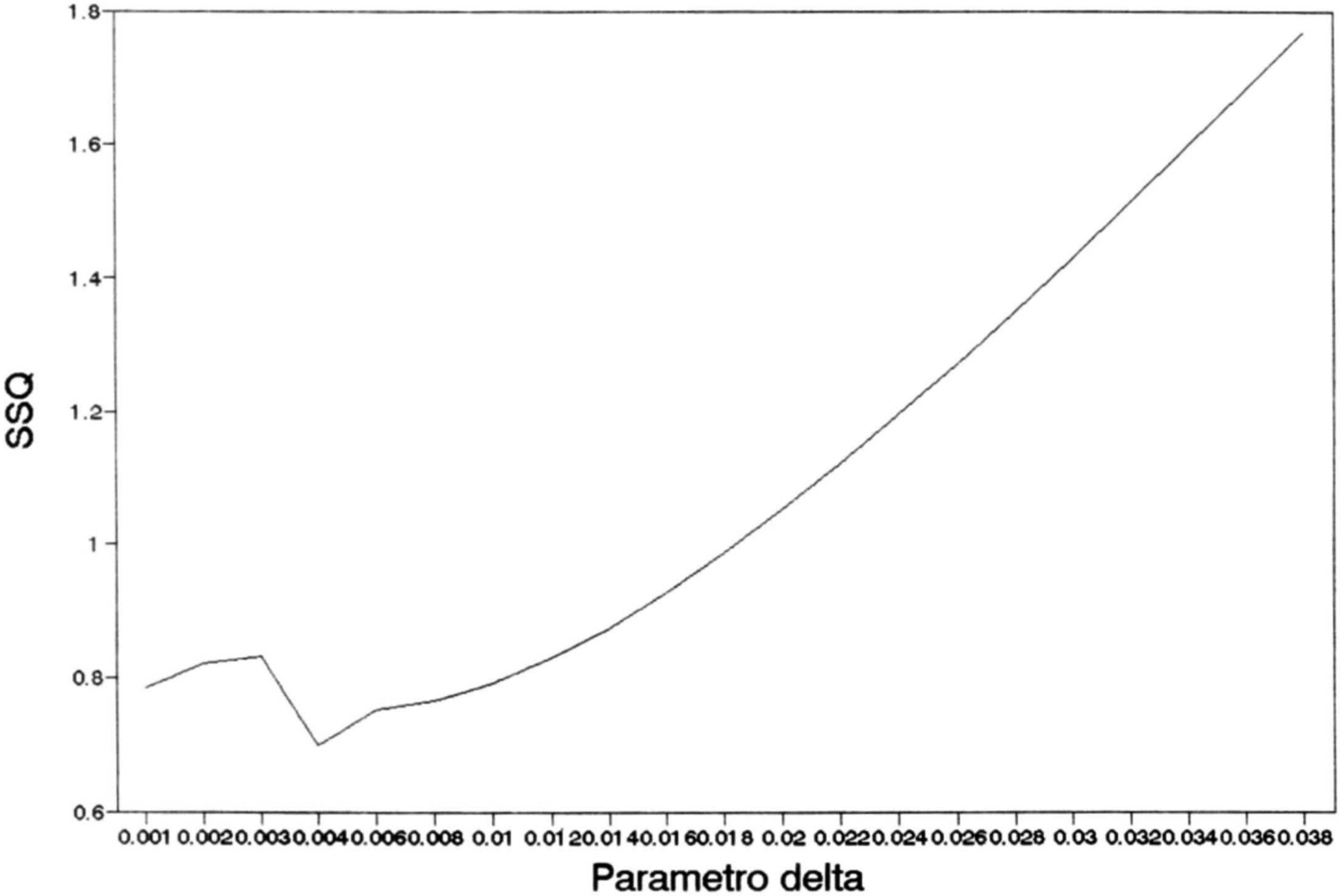


Figura 5
Modelo No. 1

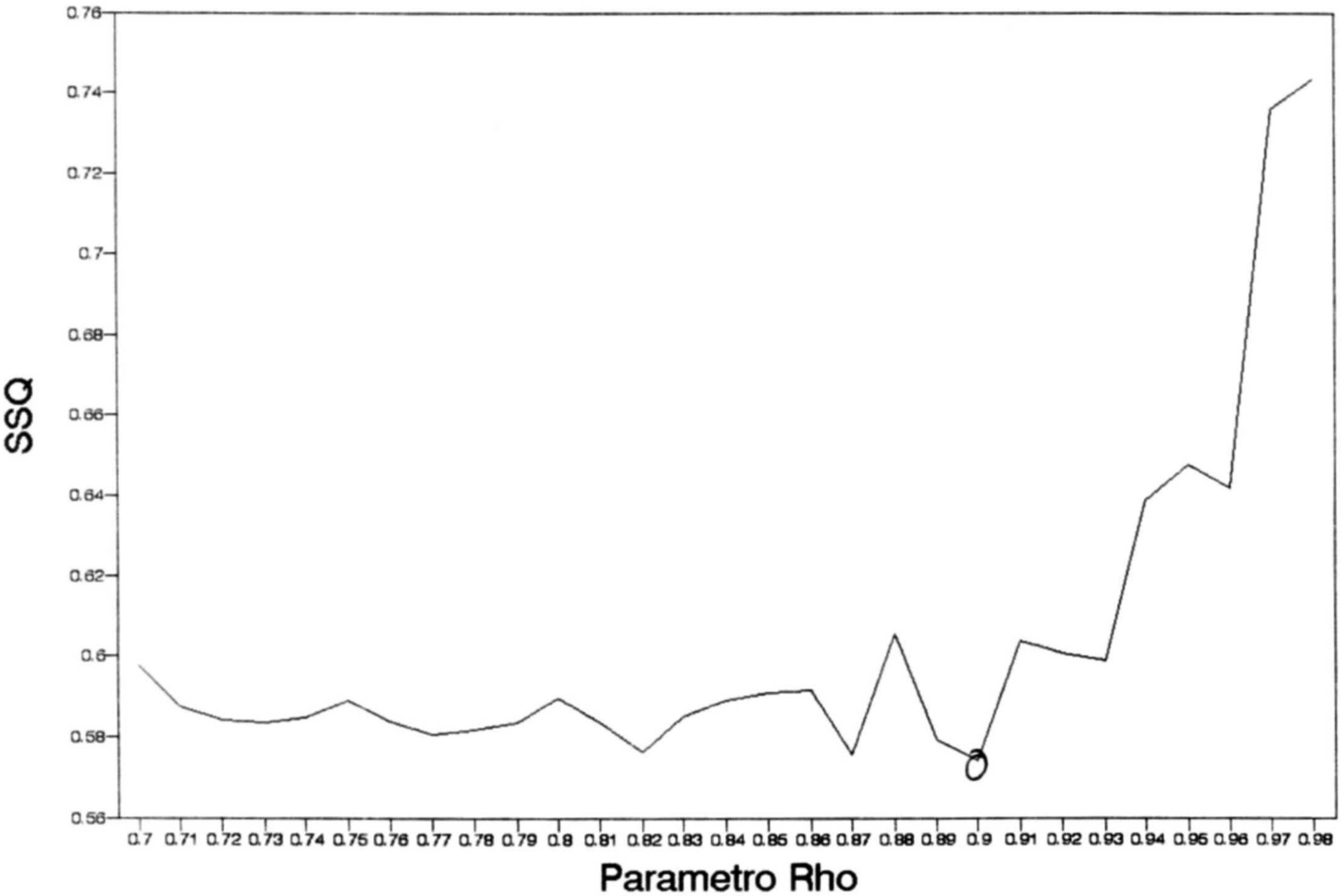


Figura 6
Modelo No. 1

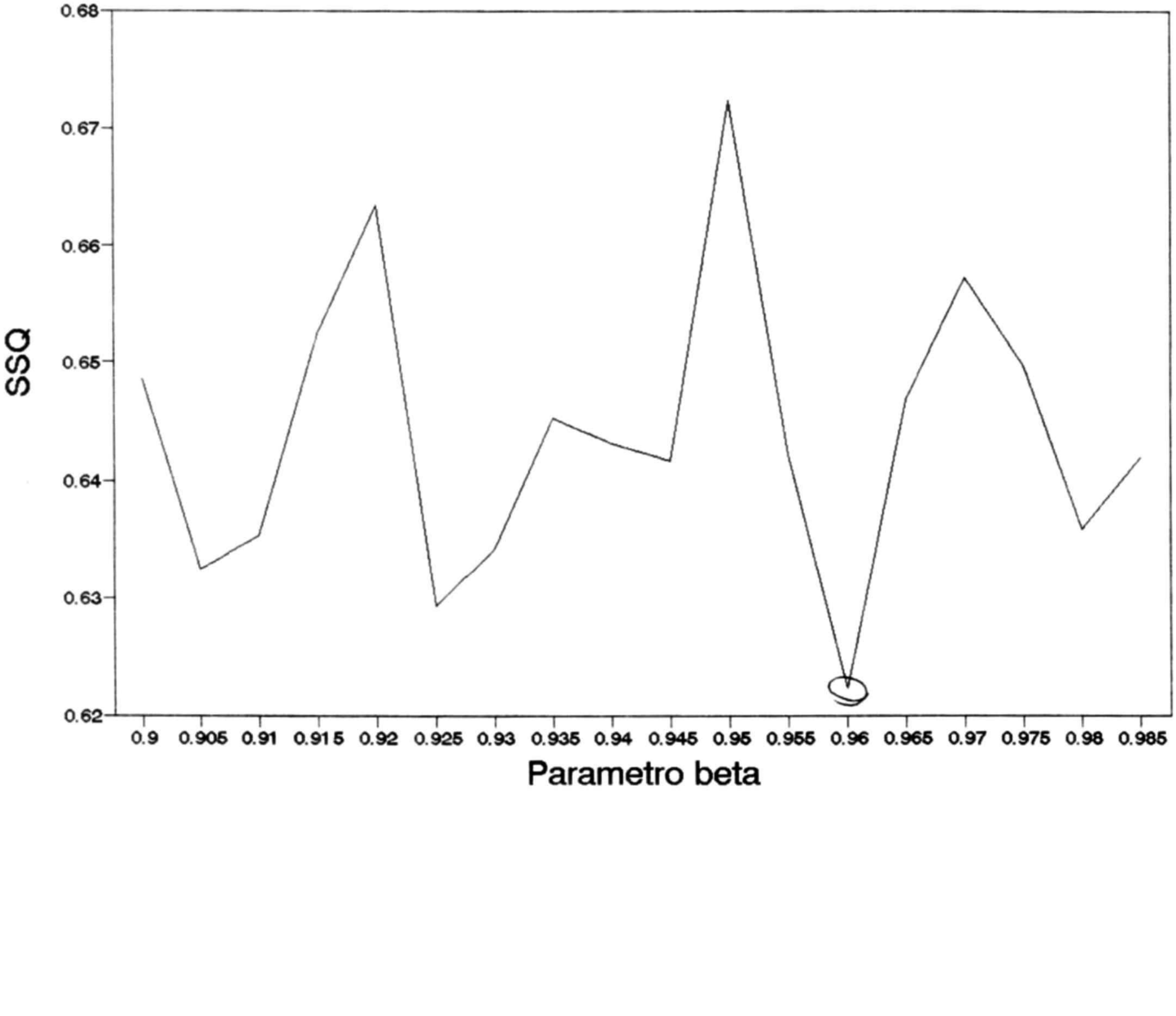


Figura 7
Modelo No. 1

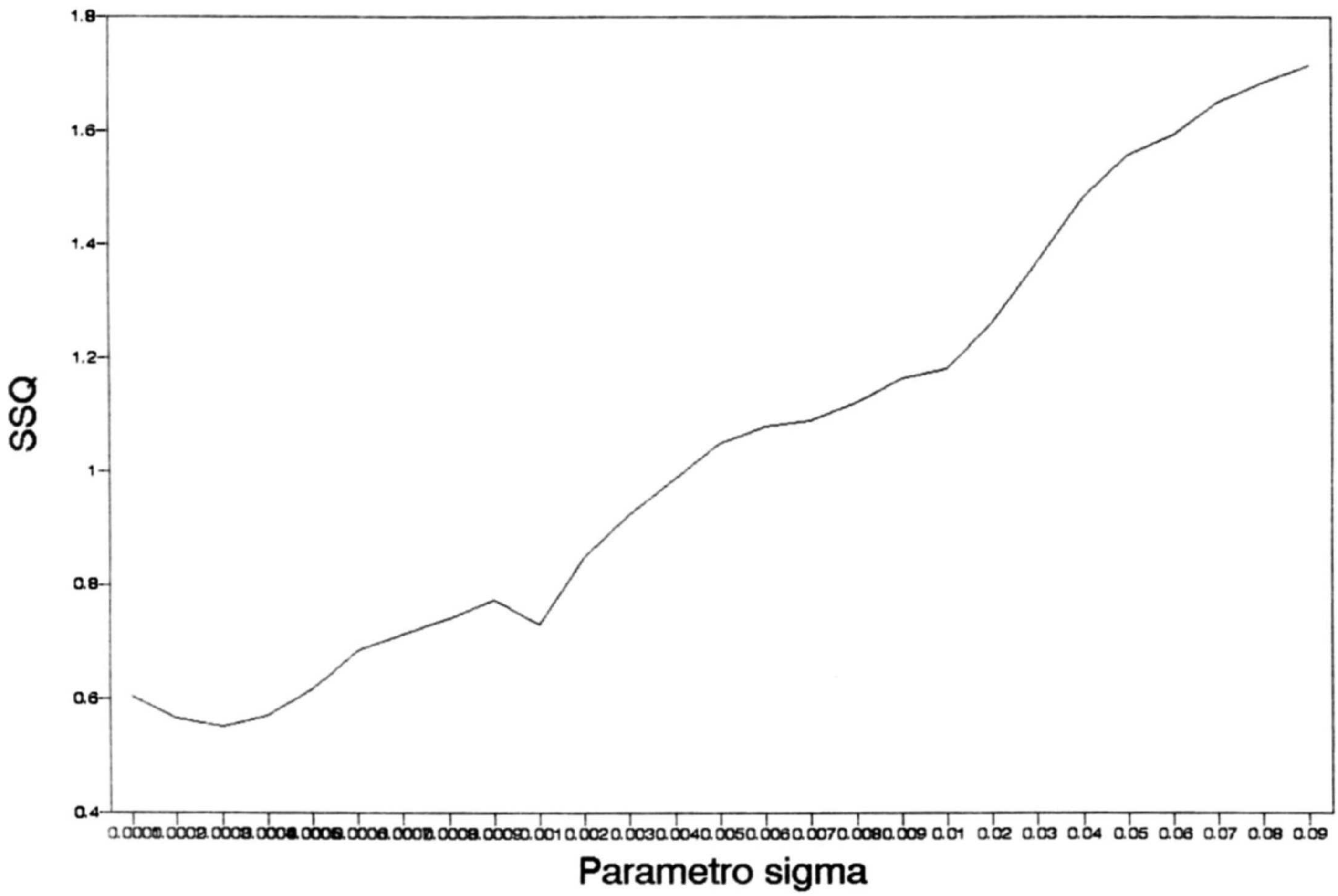


Figura 8

Patron dinamico tipico para el Modelo 2

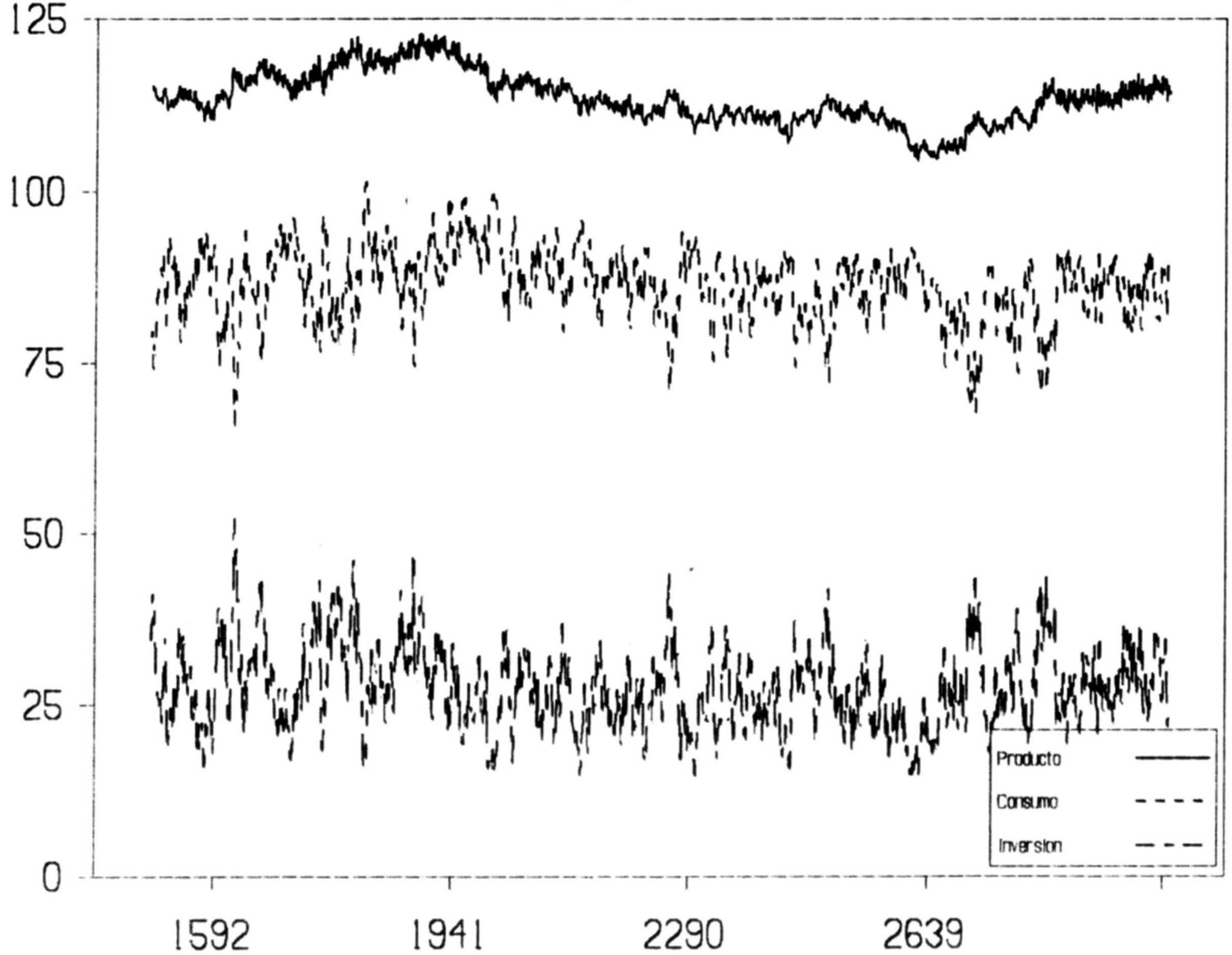


Figura 9
Modelo No. 2

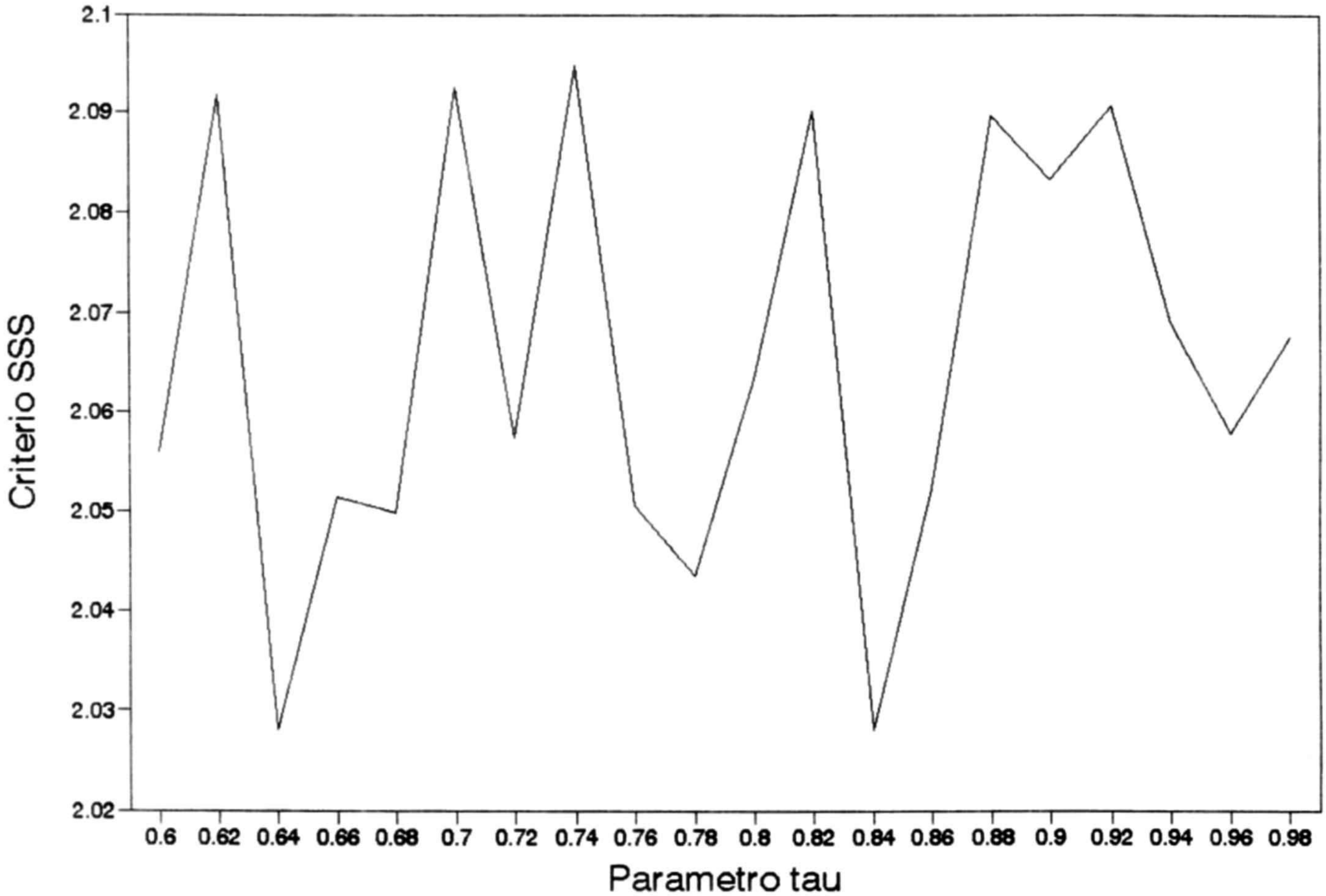


Figura 10
Modelo No. 2

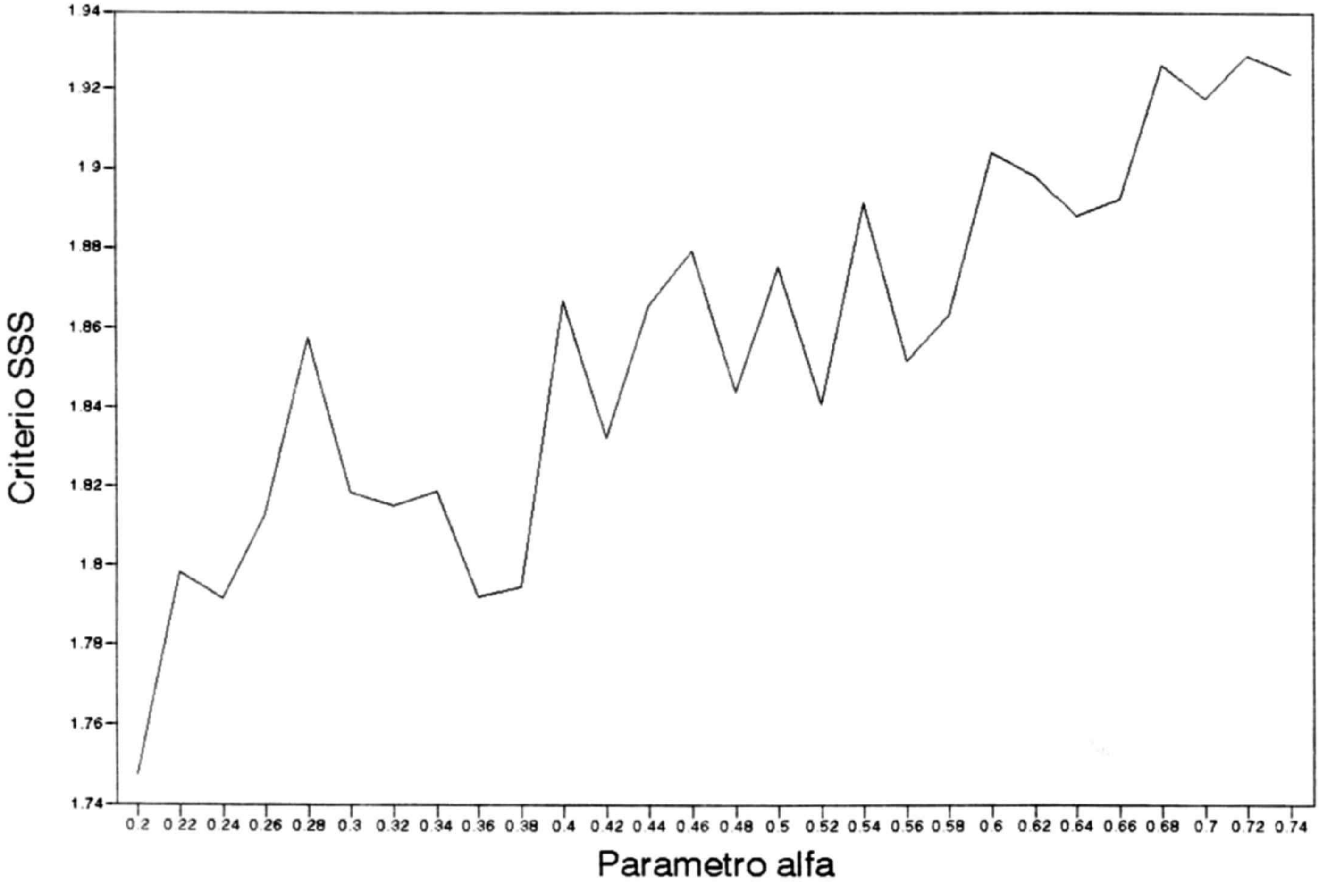


Figura 11
Modelo No. 2

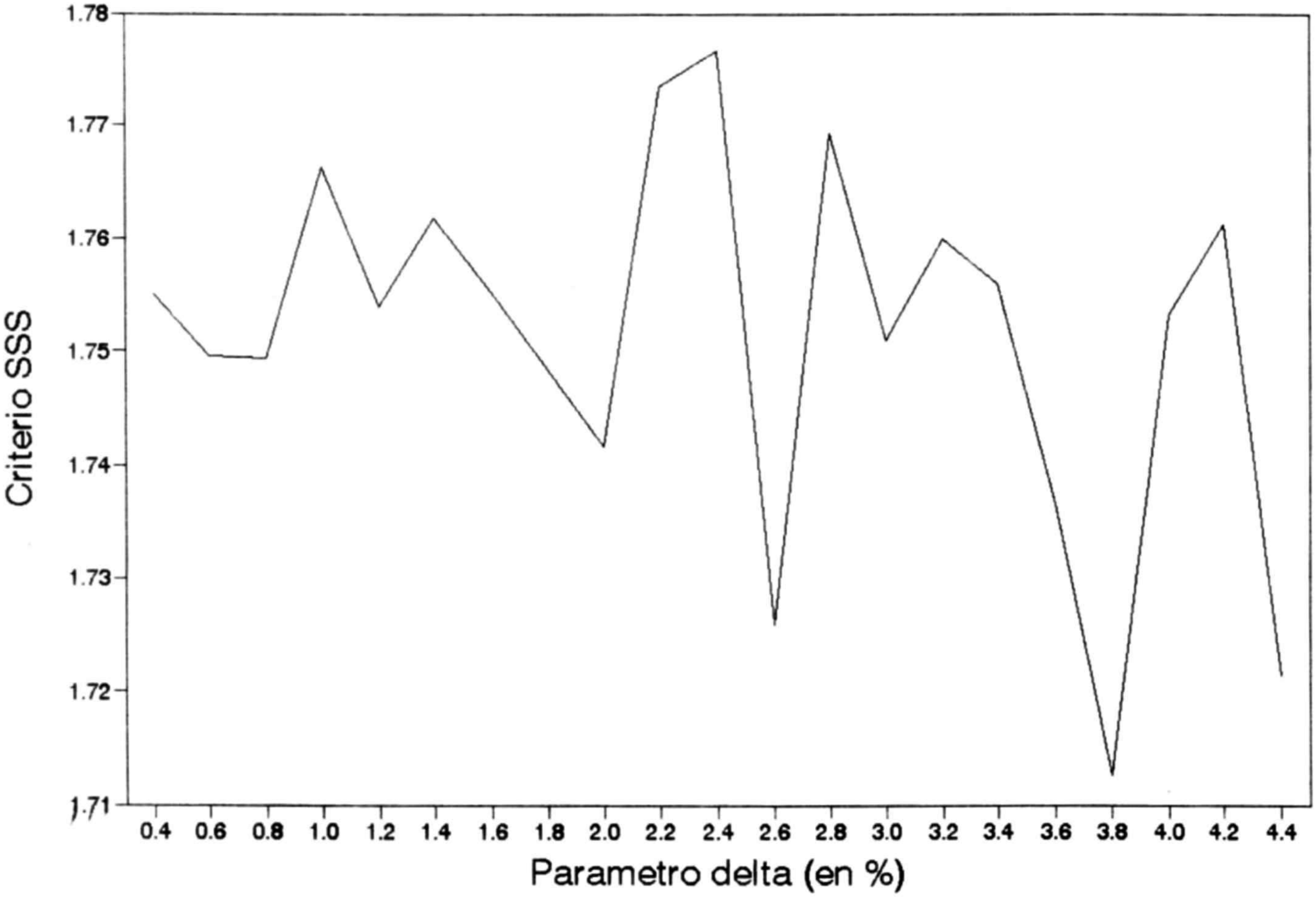


Figura 12
Modelo No. 2

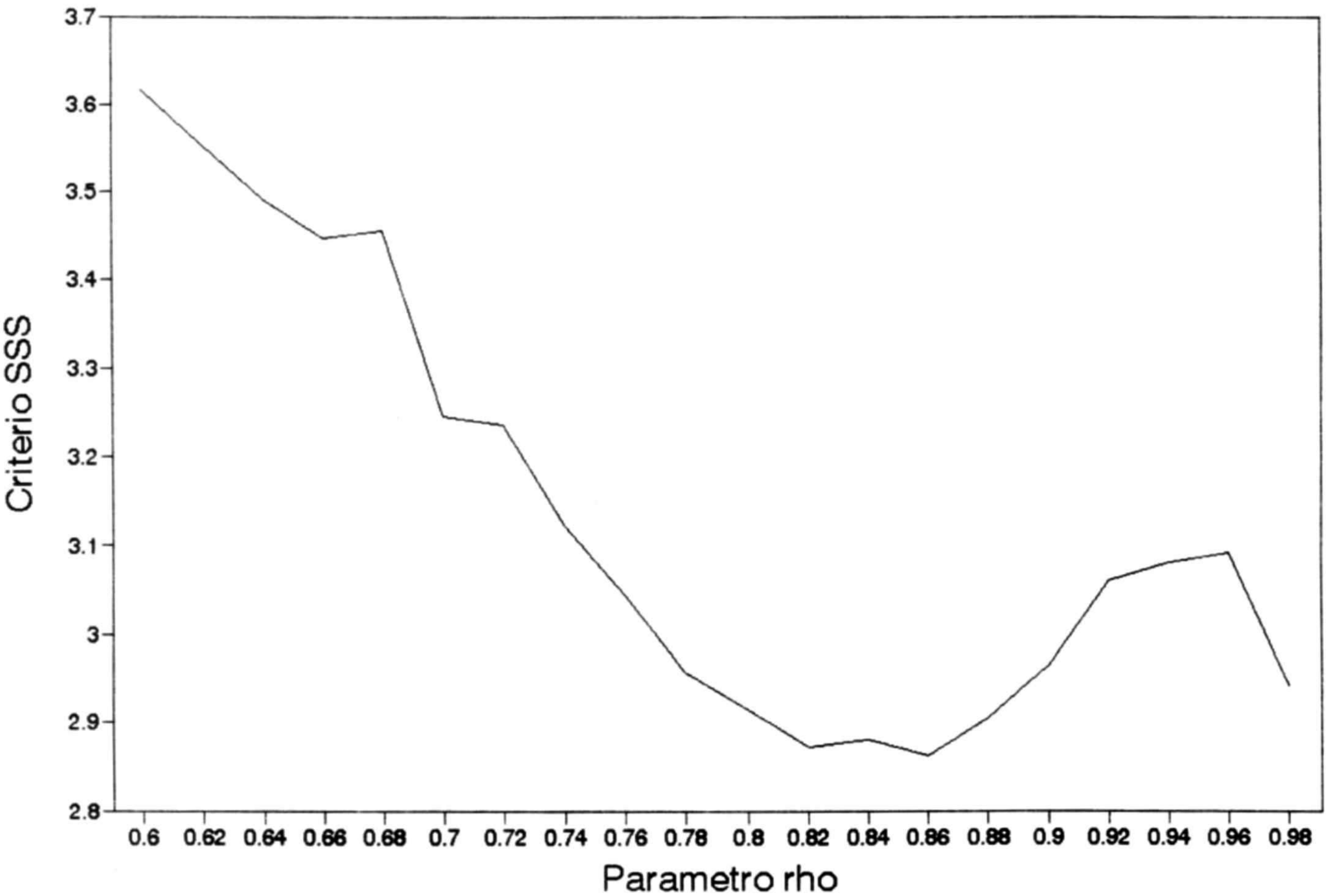


Figura 13
Modelo No. 2

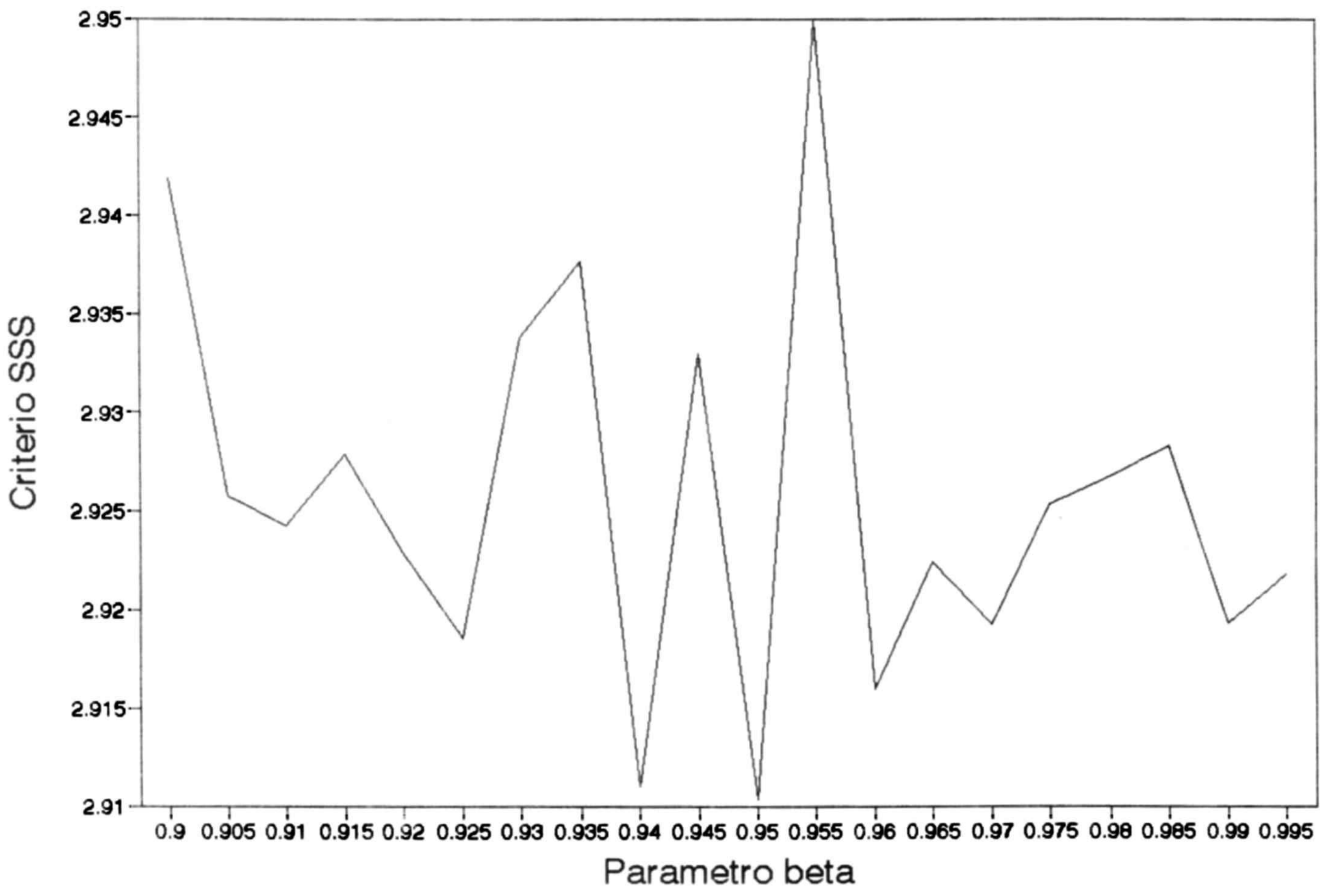


Figura 14
Modelo No. 2

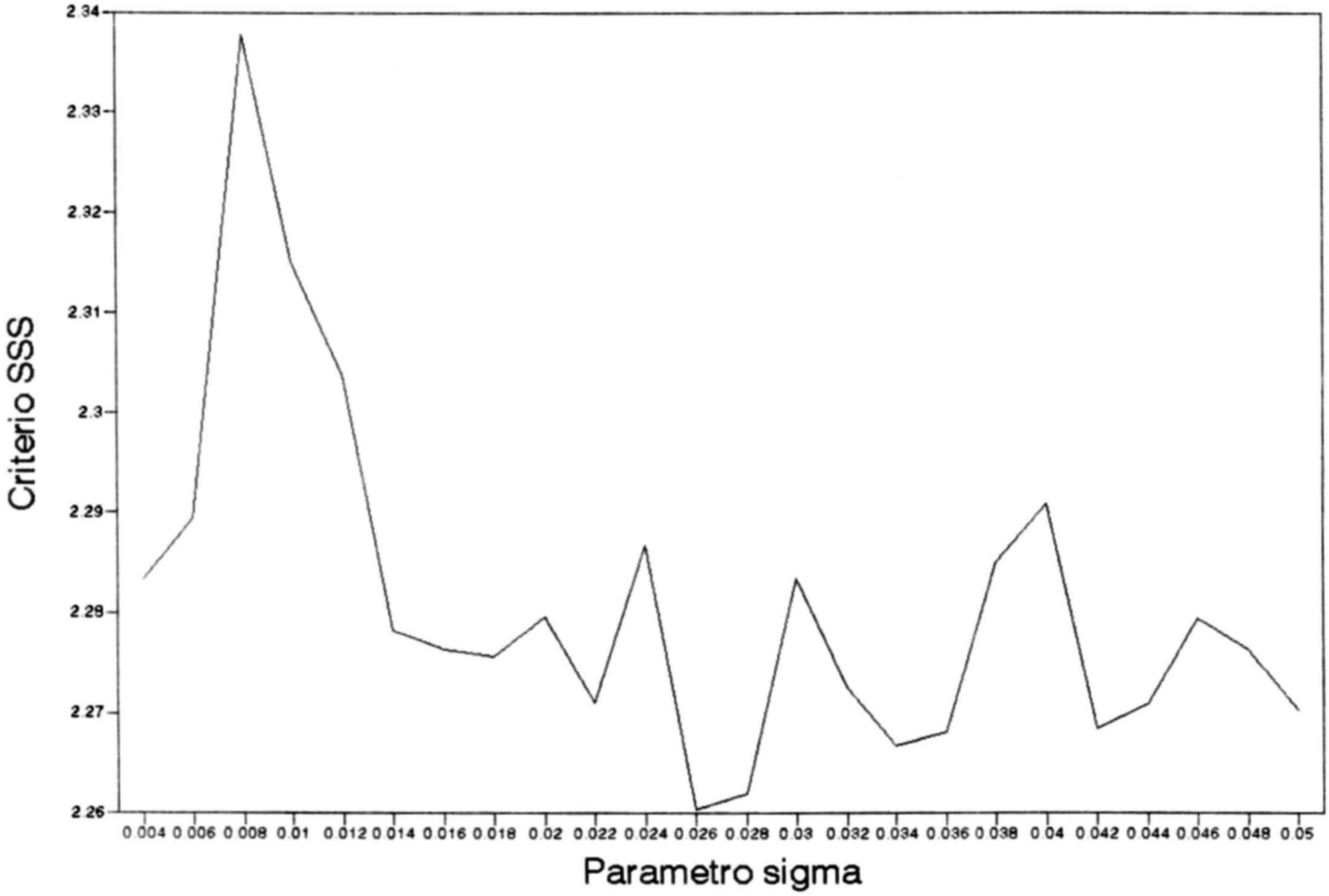


Figura 15
Modelo No. 1

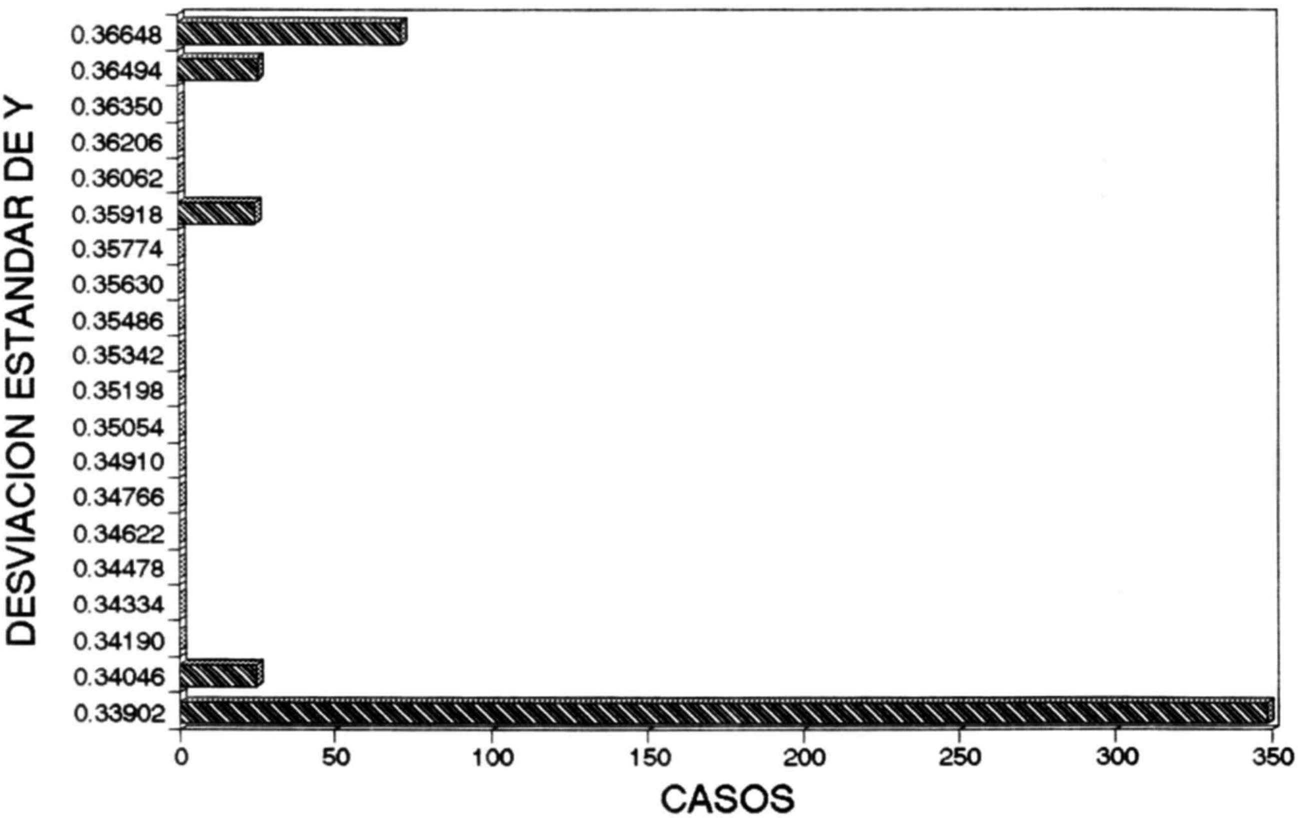


Figura 16
Modelo No. 1

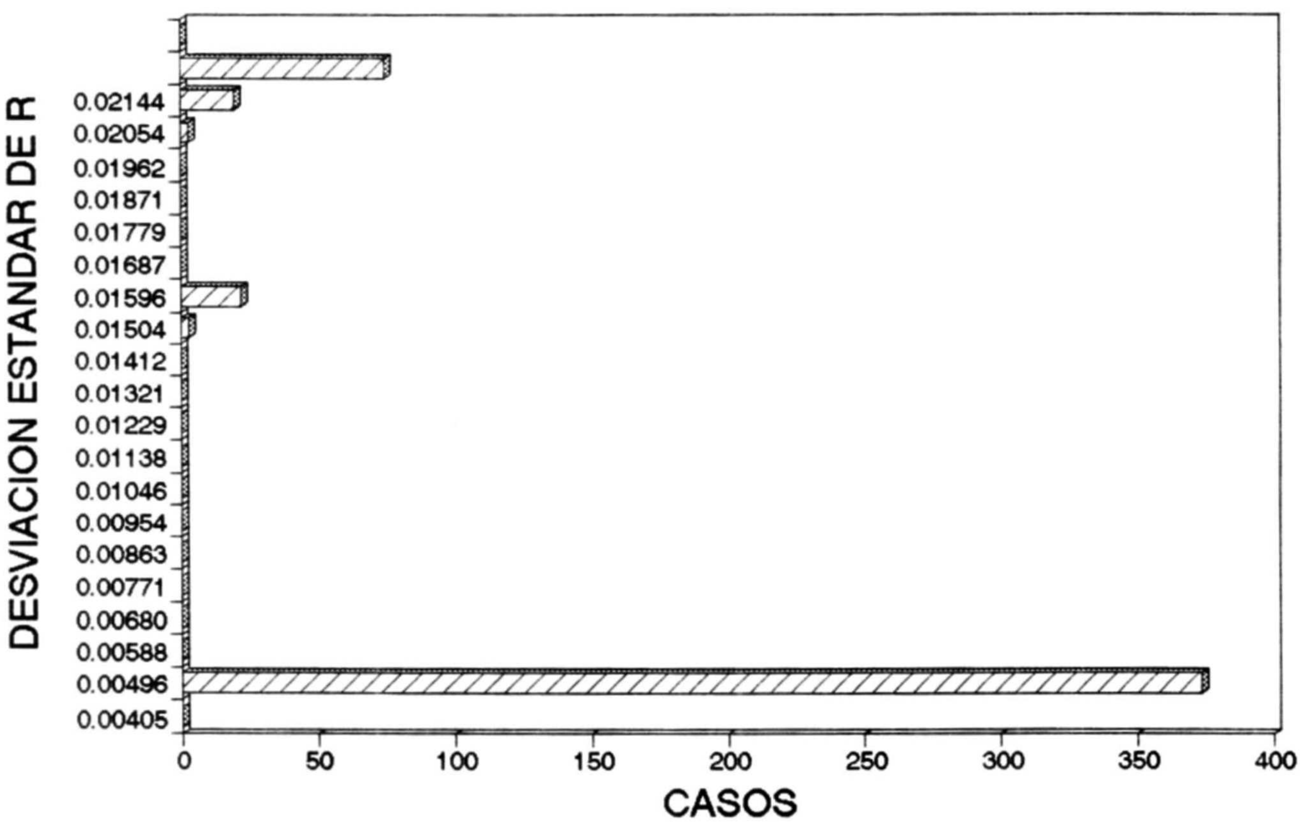


Figura 17
Modelo No. 1

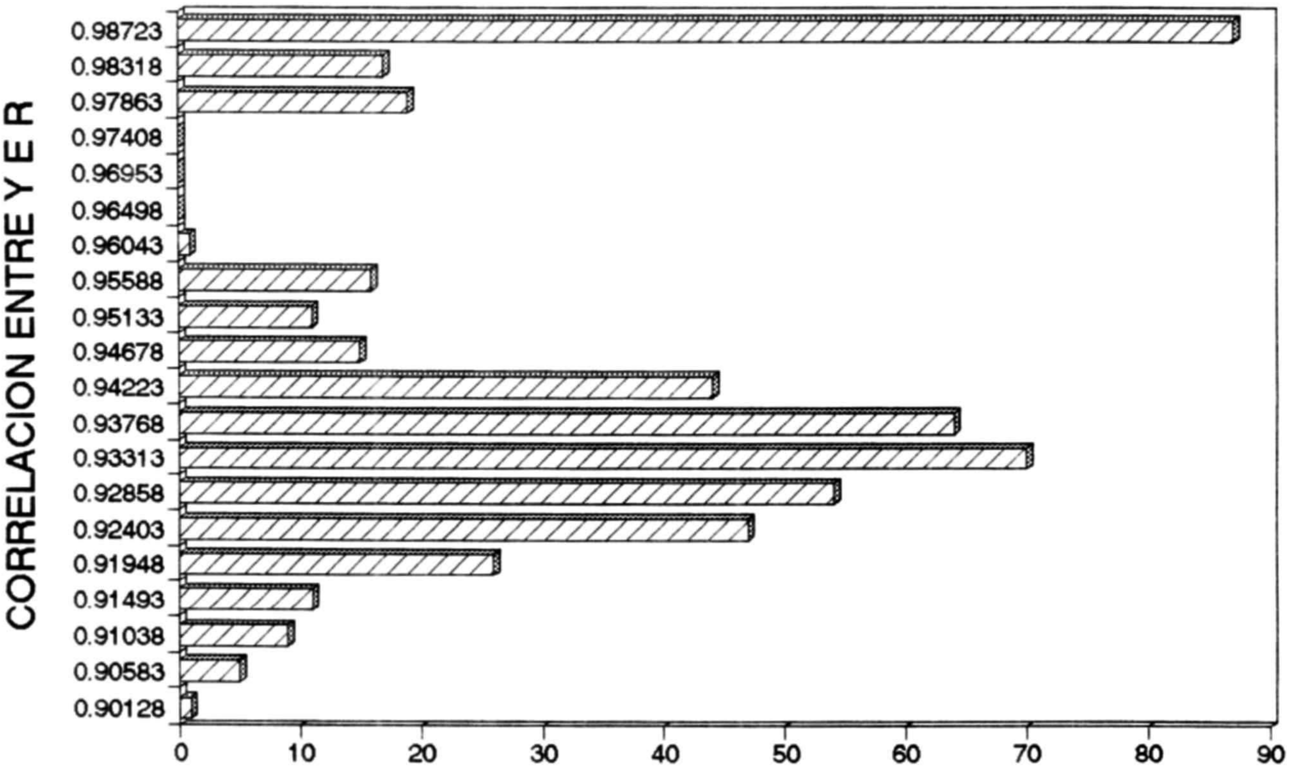


Figura 18
Modelo No. 1

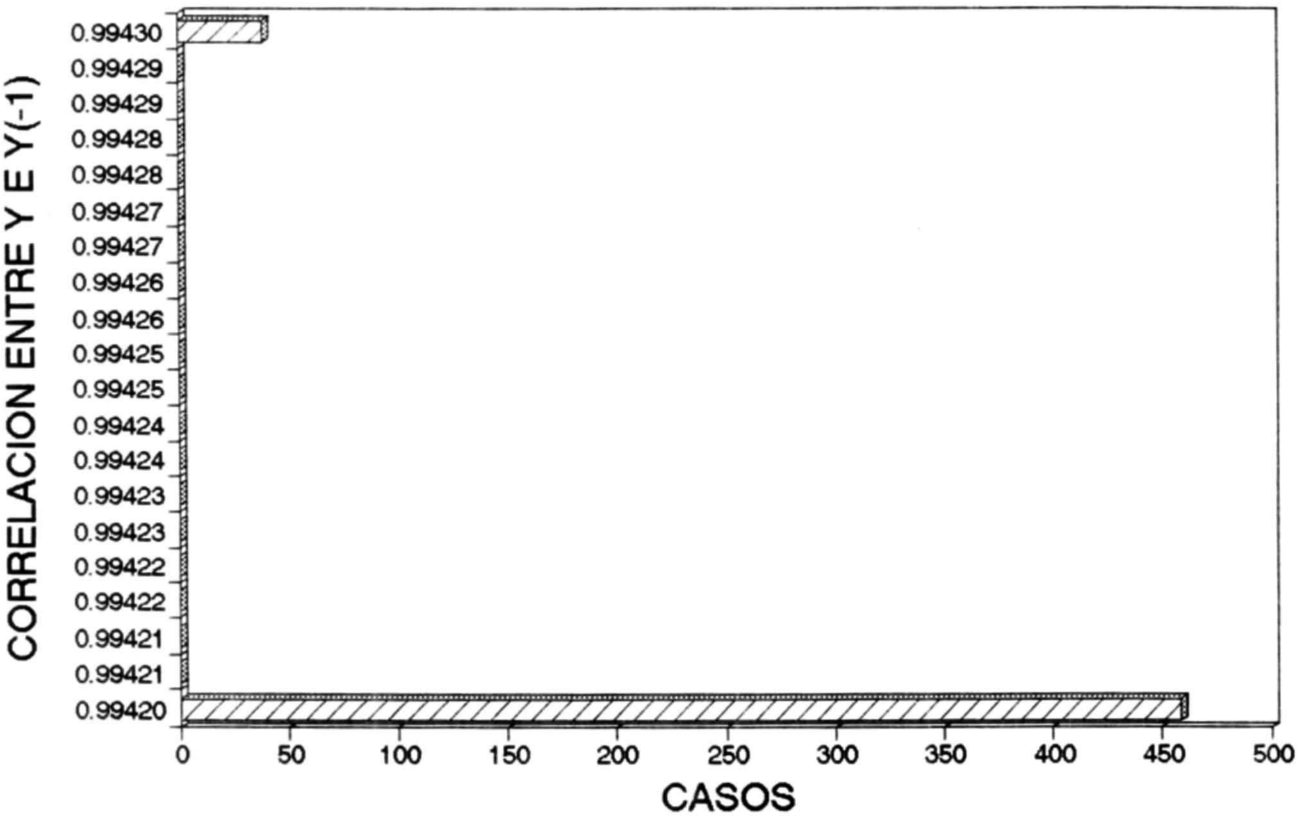


Figura 19
Modelo No. 1

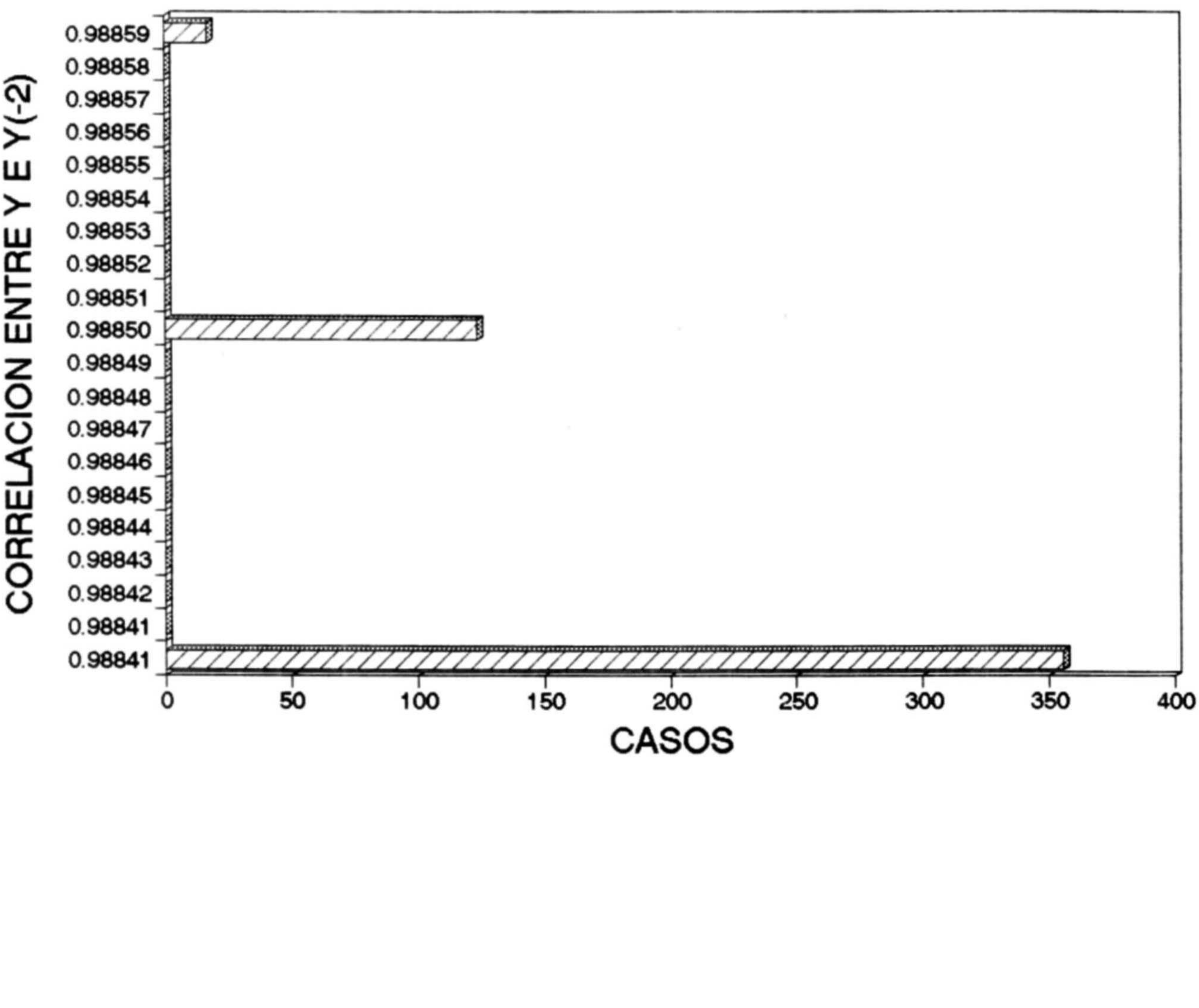


Figura 20
Modelo No. 1

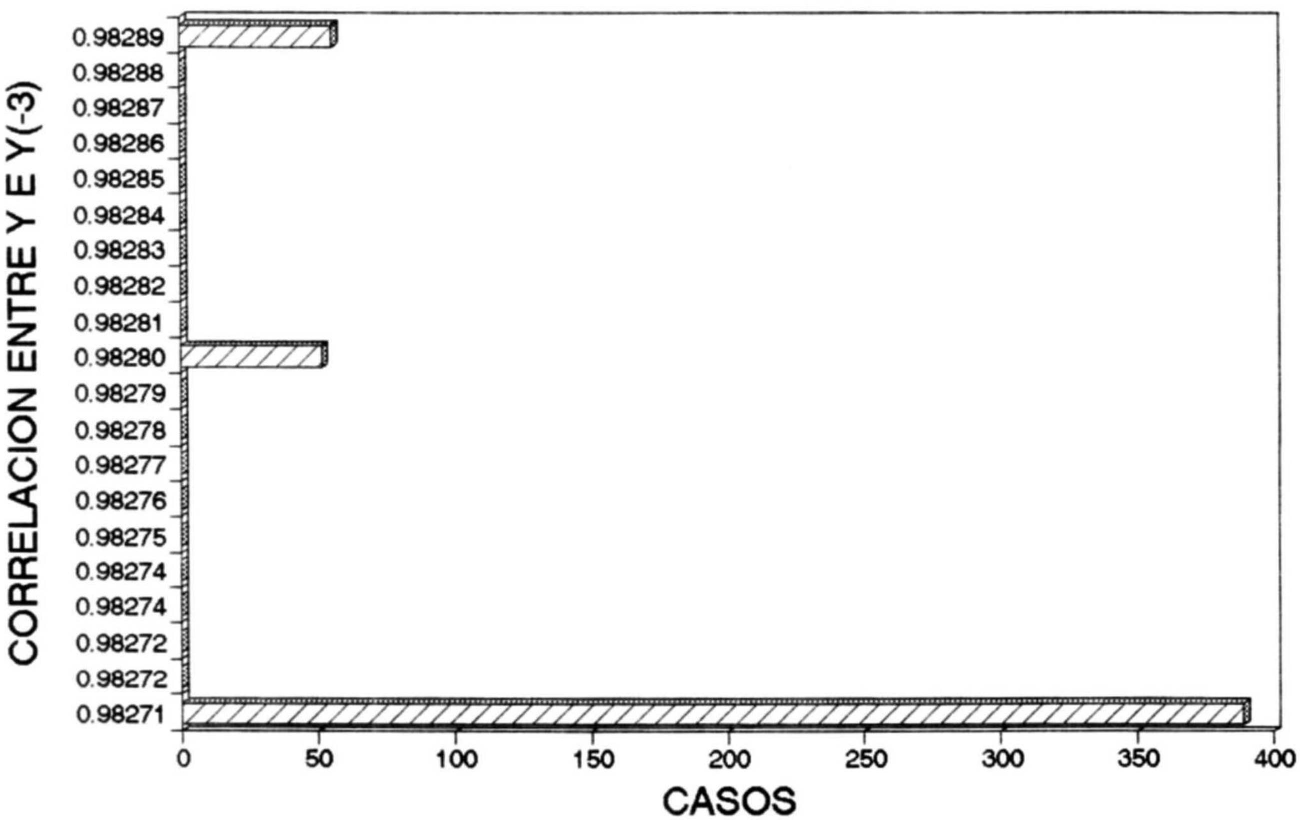


Figura 21
Modelo No. 1

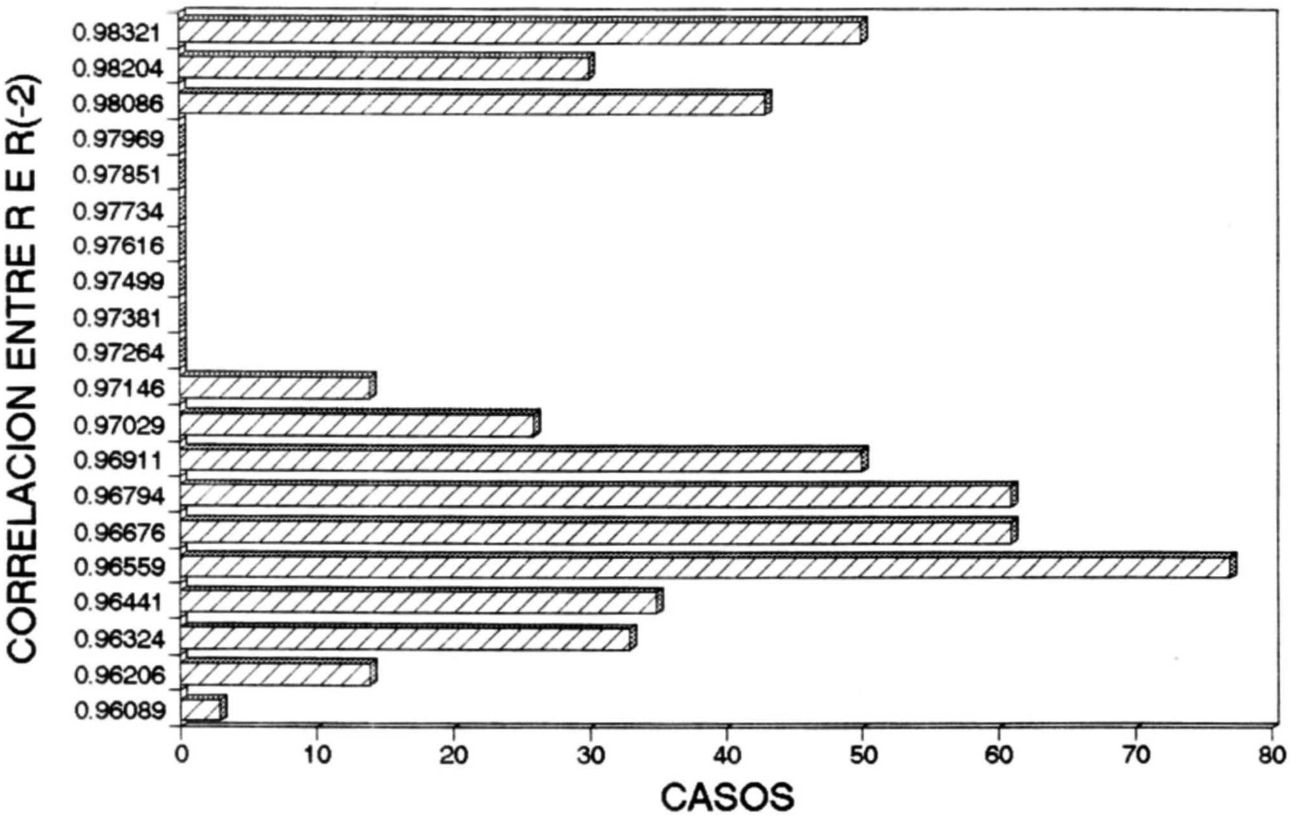


Figura 22
Modelo No. 1

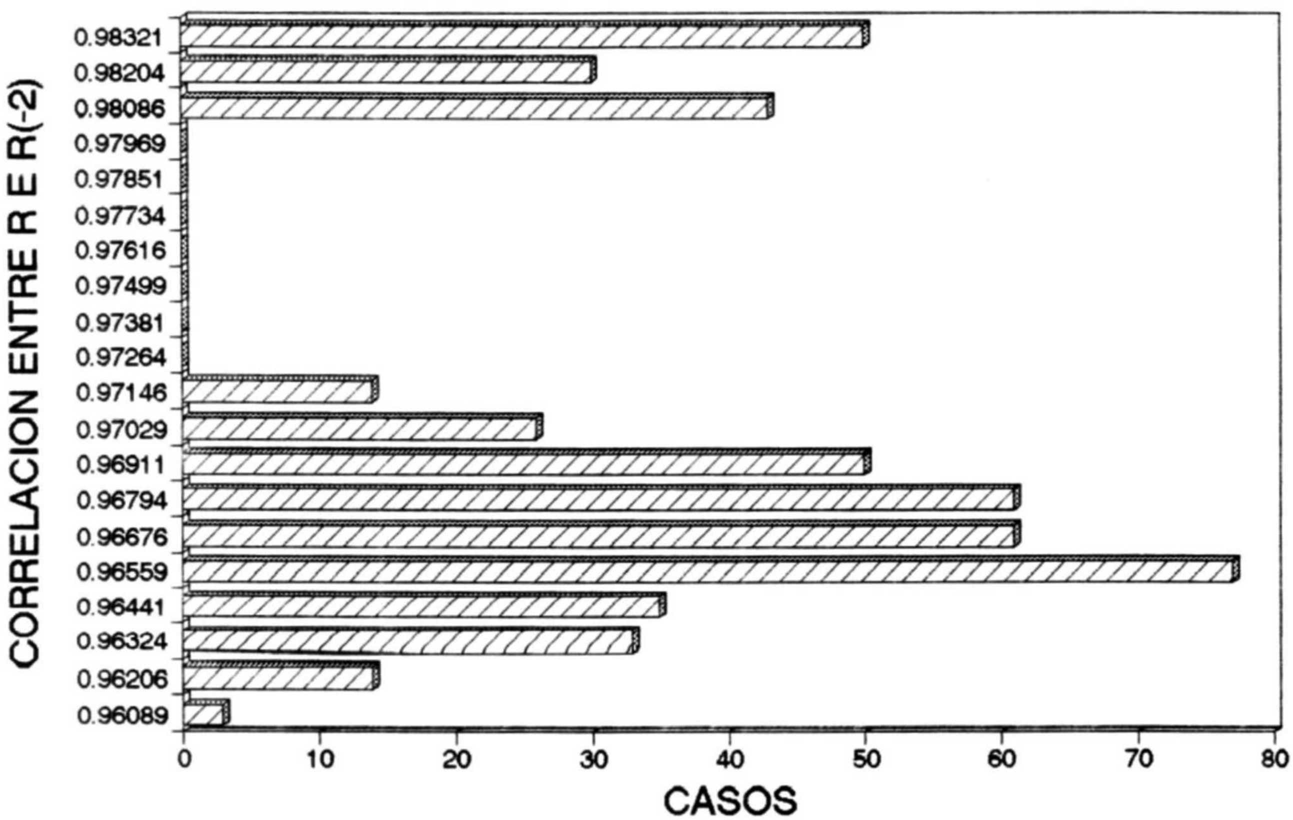


Figura 23
Modelo No. 1

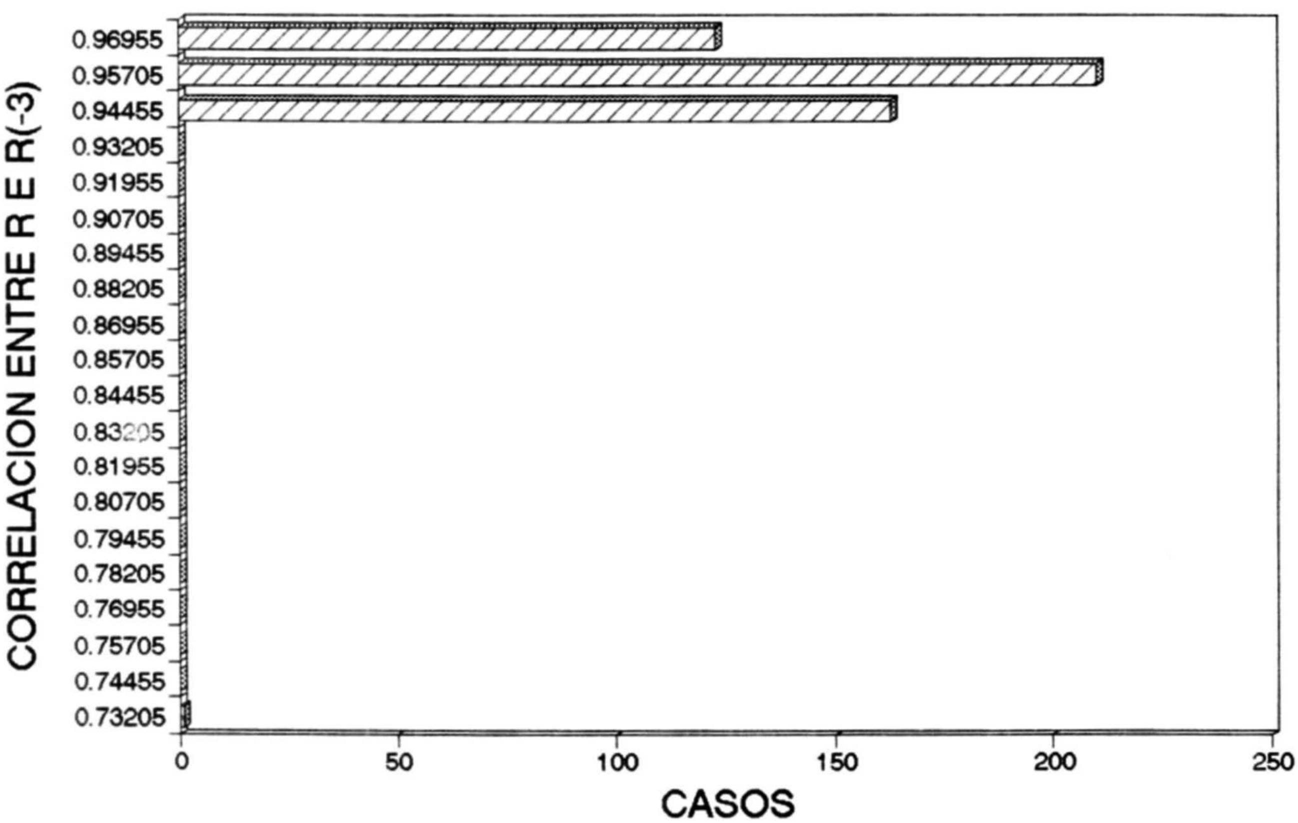


Figura 24
Modelo No. 2

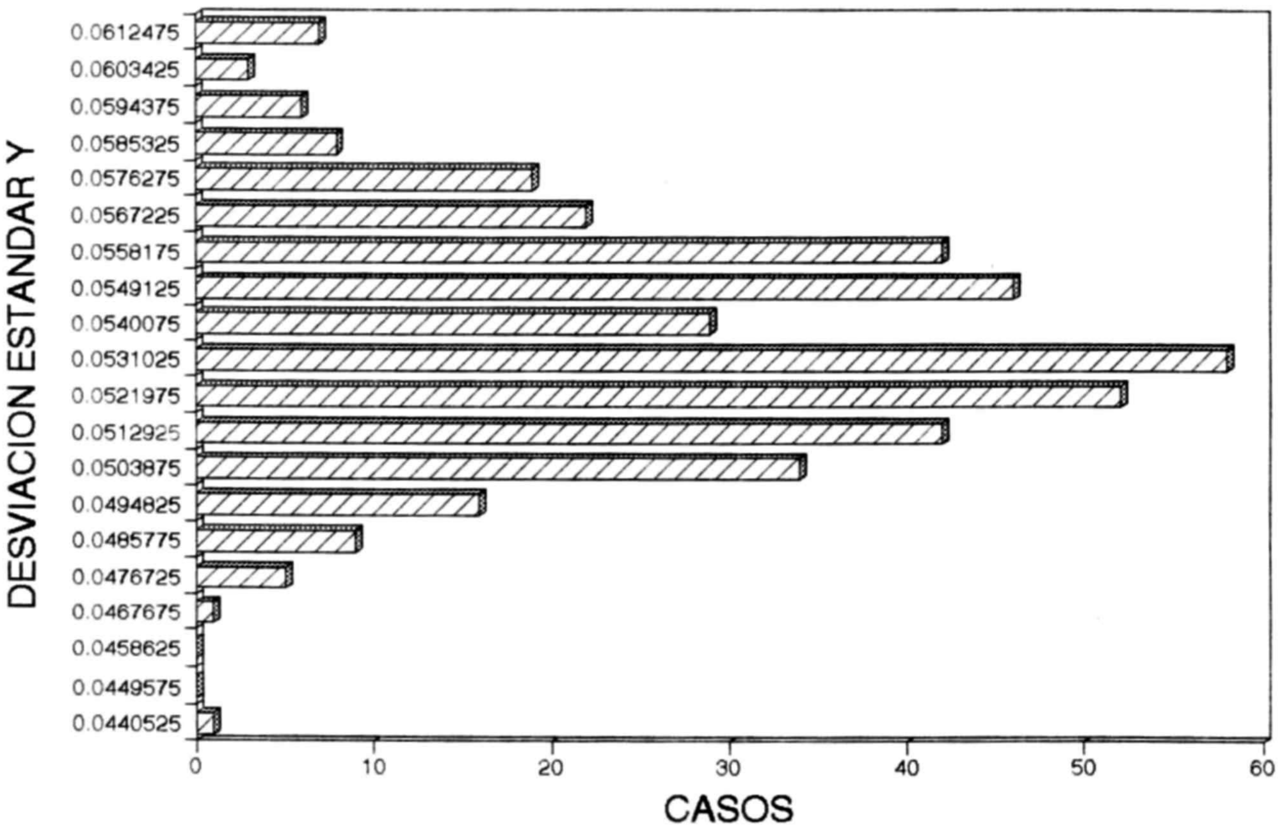


Figura 25
Modelo No. 2

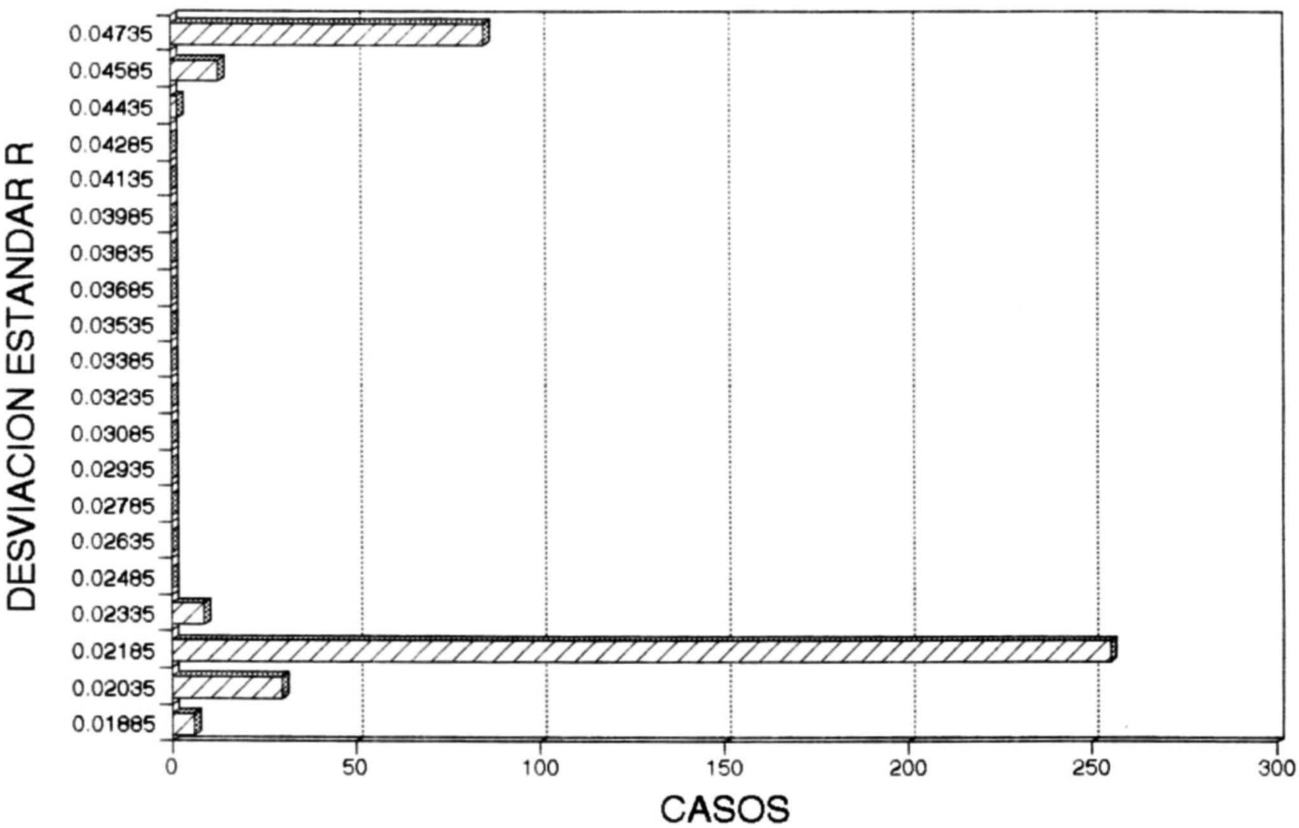


Figura 26
Modelo No. 2

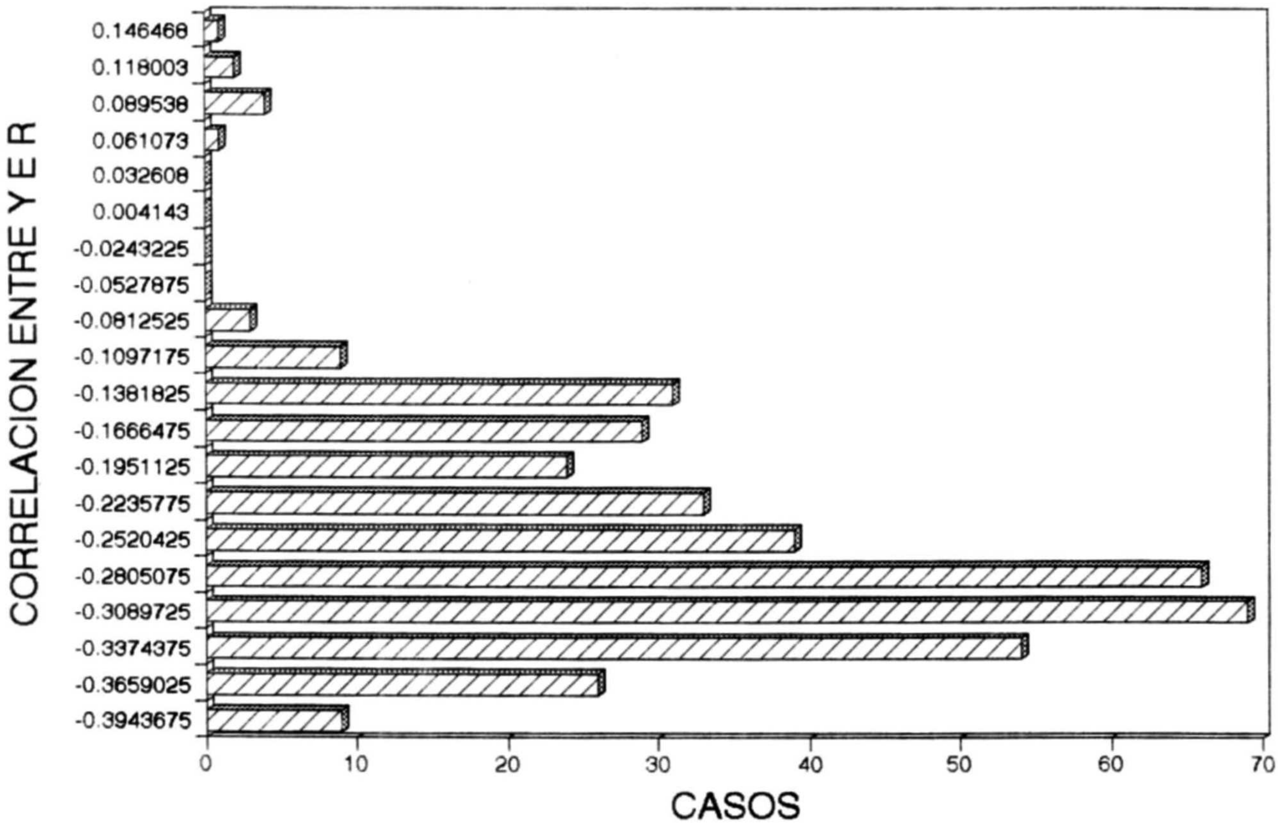


Figura 27
Modelo No. 2

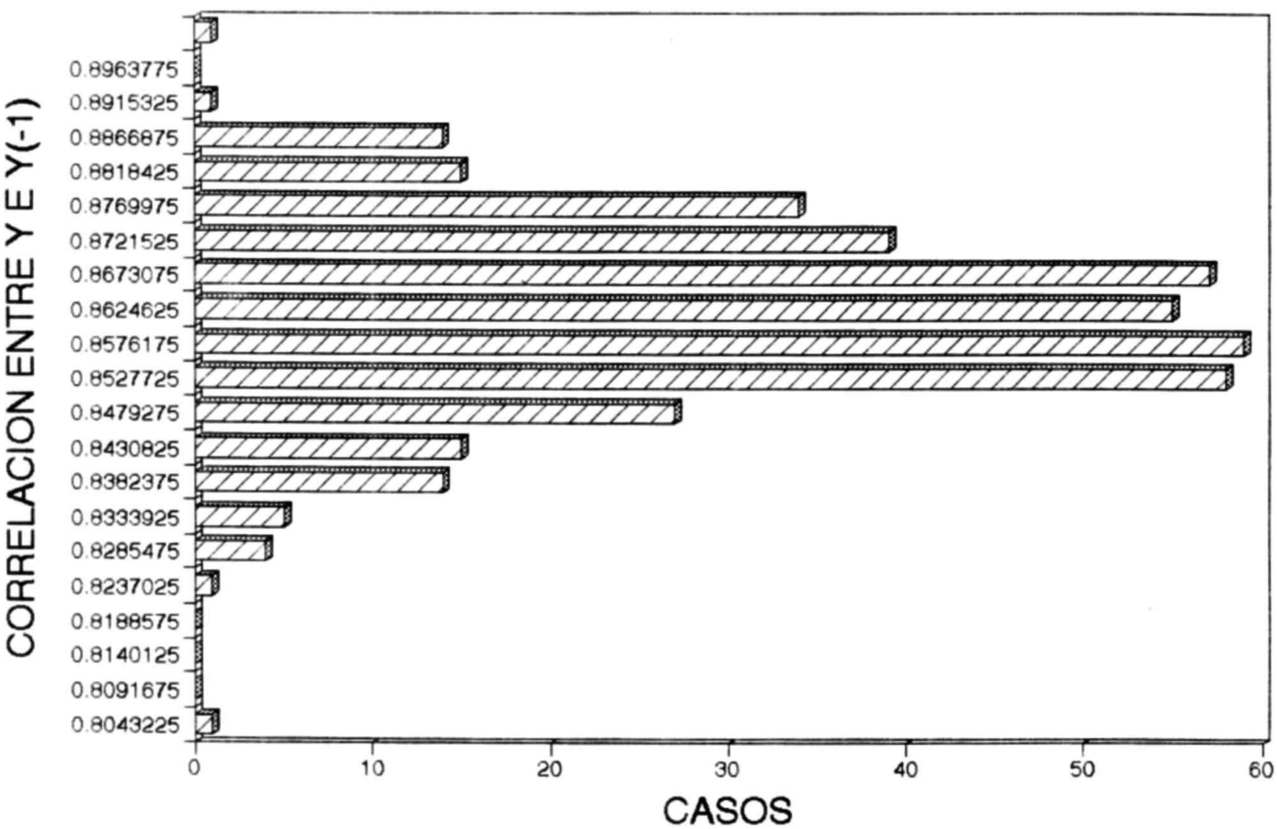


Figura 28
Modelo No. 2

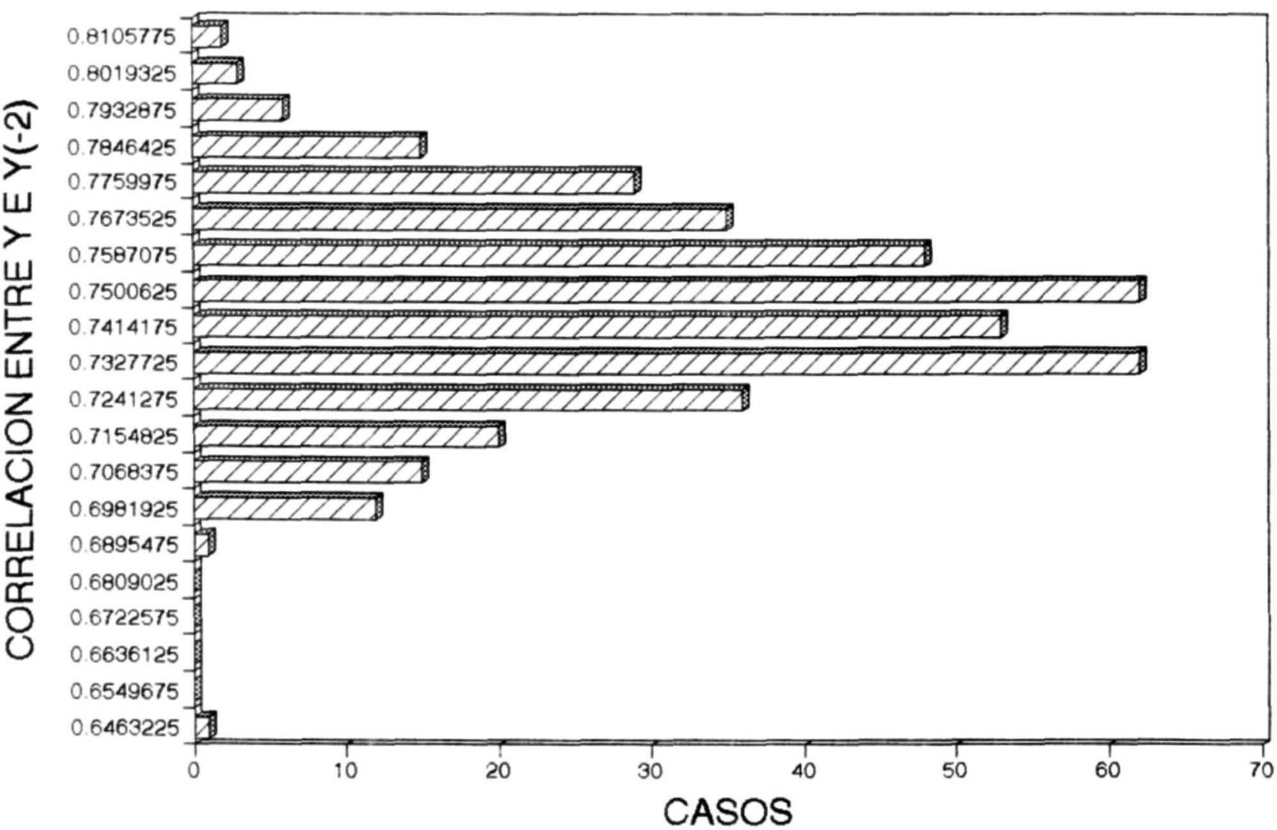


Figura 29
Modelo No. 2

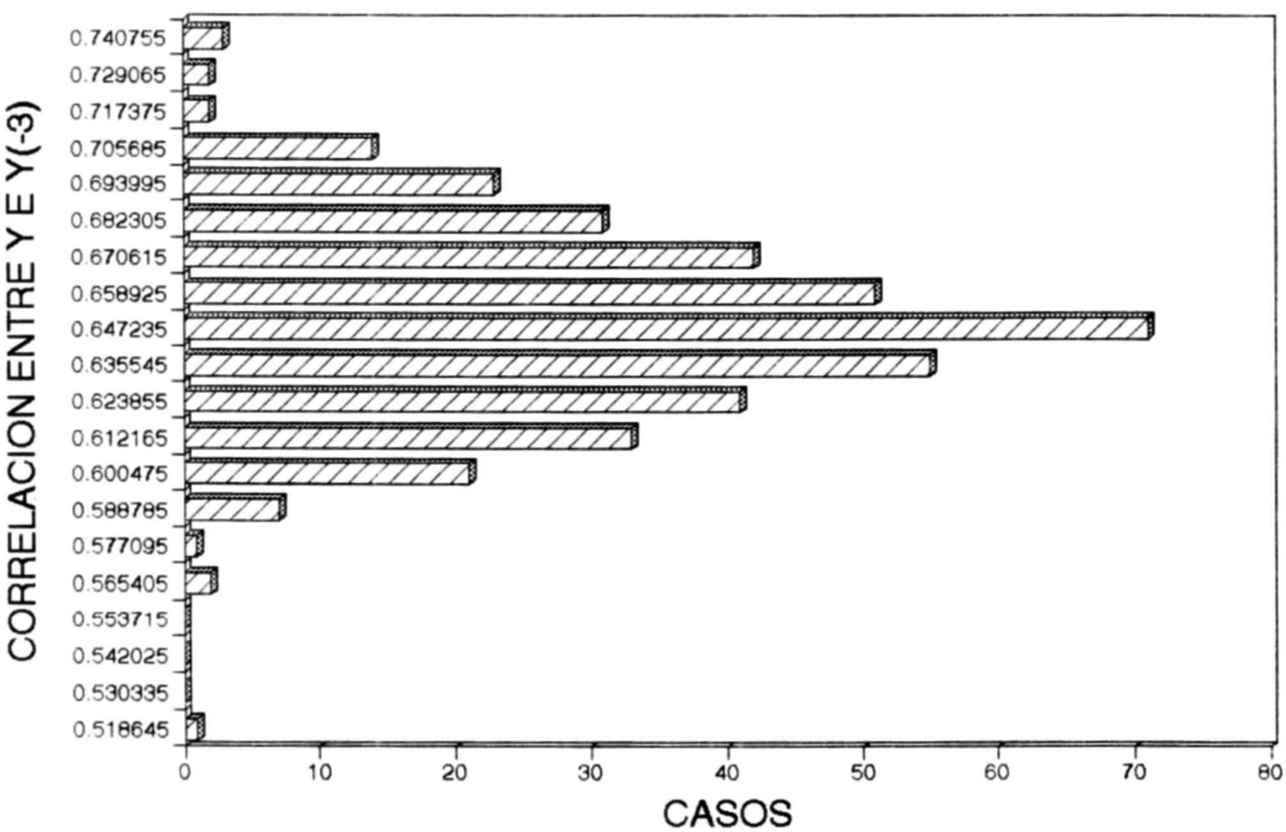


Figura 30
Modelo No. 2

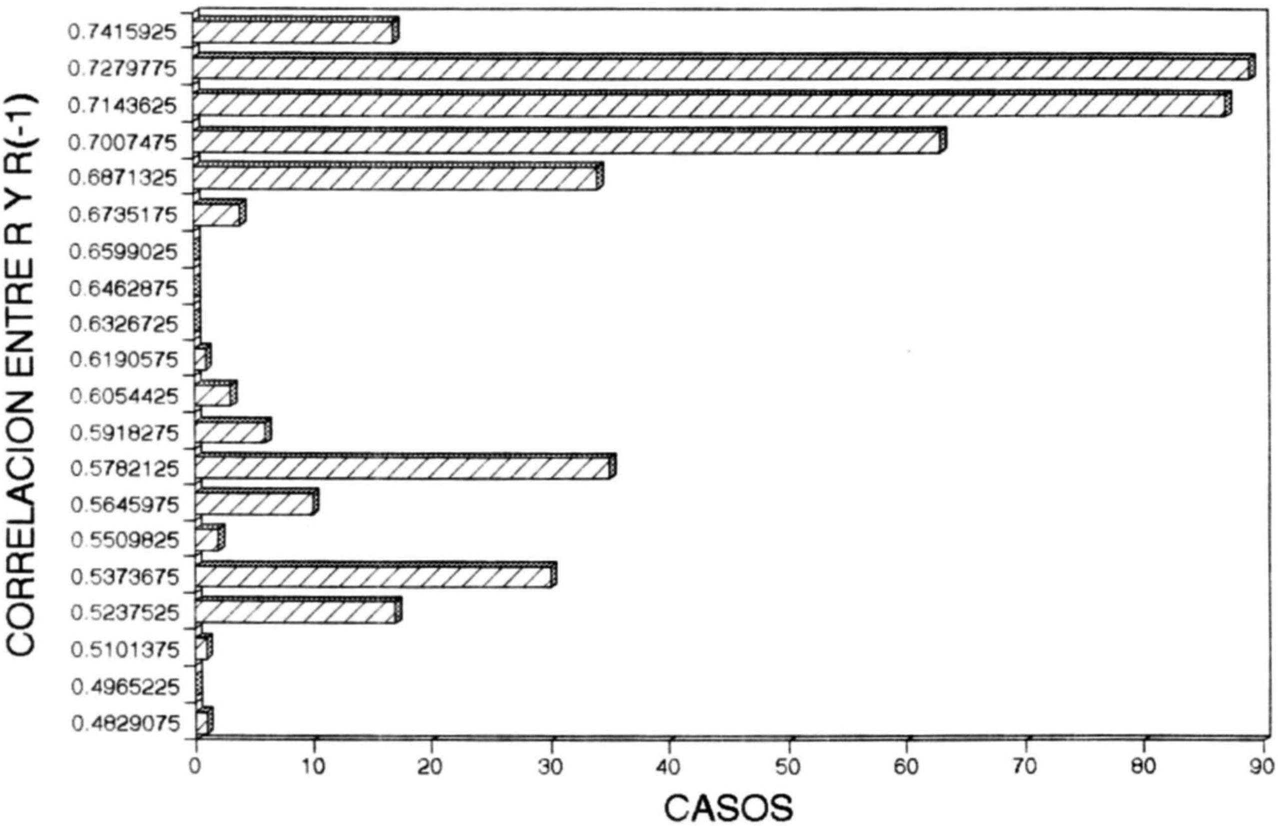


Figura 31
Modelo No. 2

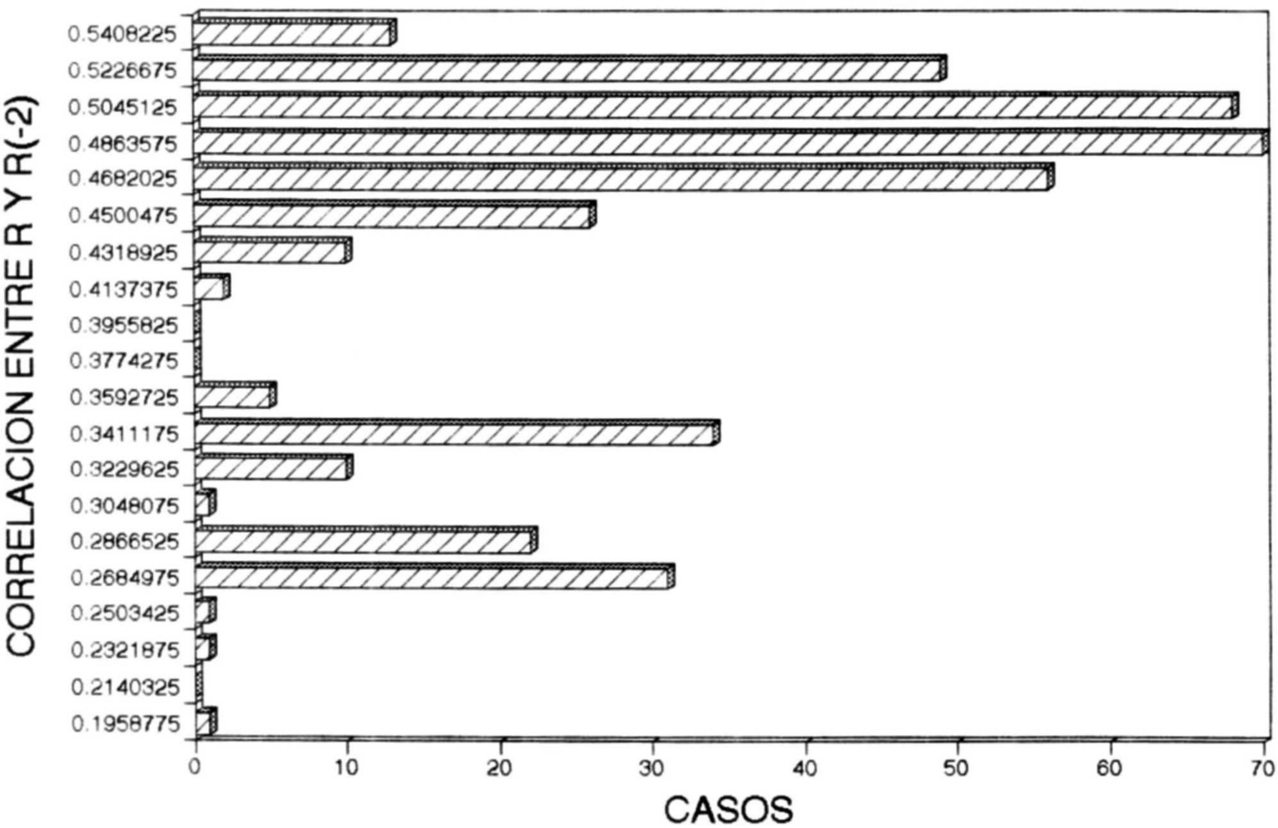


Figura 32
Modelo No. 2

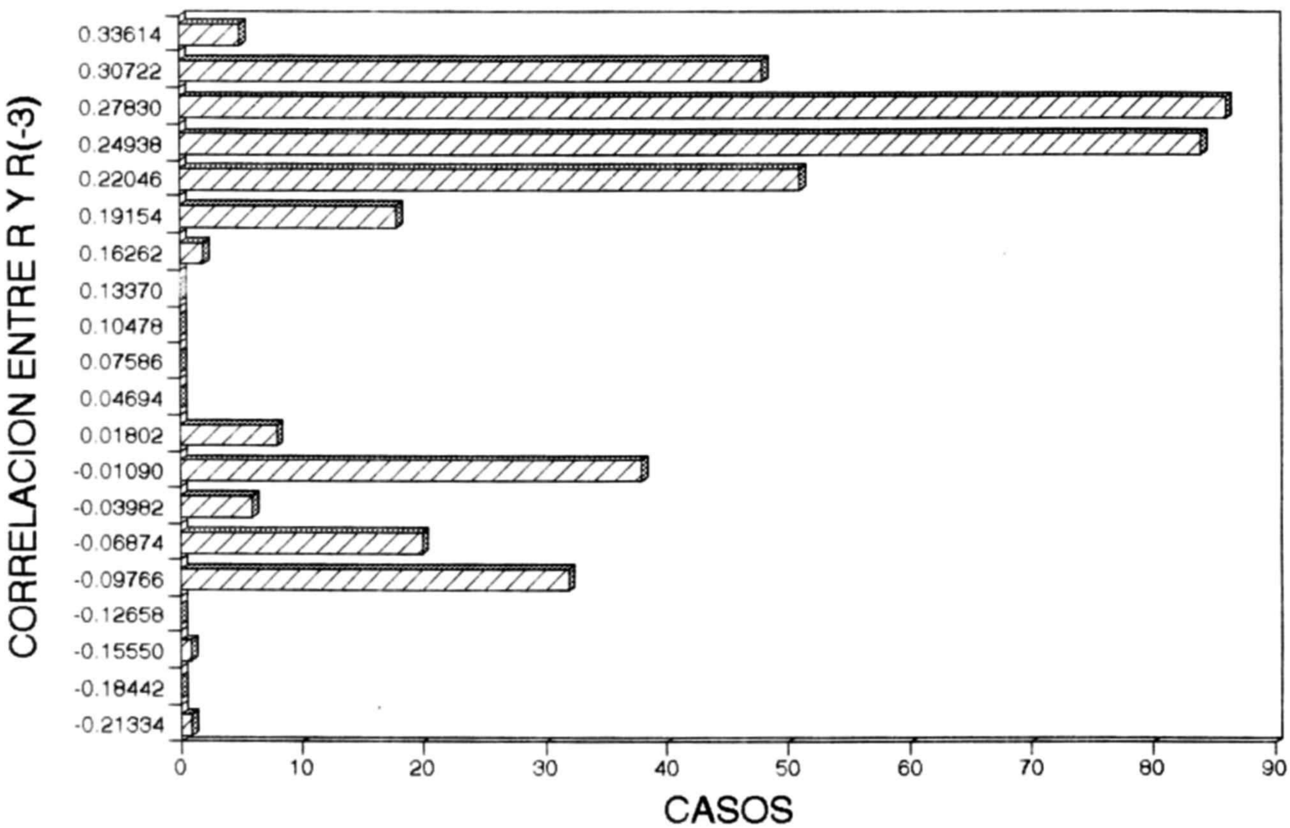


TABLA I

CRITERIO SSS

$\beta=0.975$ $\alpha=0.6$ $\delta=0.01$ $\Gamma=0.9$

τ	σ		
	0.004	0.01	0.02
0.70	1.8127	1.6070	1.6275
0.72	1.8124	1.5992	1.6232
0.74	1.8177	1.6125	1.6310
0.76	1.8192	1.6188	1.6225
0.78	1.8118	1.6220	1.6158
0.80	1.8187	1.6314	1.6428
0.82	1.8404	1.6188	1.6130
0.84	1.8148	1.6167	1.6384
0.86	1.8149	1.6034	1.6496
0.88	1.8042	1.5993	1.7062
0.90	1.8255	1.5890	1.6702
0.92	1.8137	1.6120	1.6451
0.94	1.8359	1.6363	1.6771
0.96	1.8335	1.5993	1.7031
0.98	1.8205	1.6249	1.6779
1.00	1.8299	1.6000	1.6336
1.02	1.8086	1.6050	1.6264
1.04	1.7970	1.6294	1.6840
1.06	1.8129	1.5910	1.7012
1.08	1.8050	1.6361	1.6637
1.10	1.8255	1.5988	1.6746
1.12	1.8107	1.6062	1.6464
1.14	1.8175	1.6243	1.6632
1.16	1.8195	1.5848	1.6406
1.18	1.8104	1.6550	1.6347

TABLA II

CORR(Y, R)

β=0.975 α=0.6 δ=0.01 Γ=0.9

	σ		
τ	0.004	0.01	0.02
0.70	0.01680	−0.01350	−0.16000
0.72	0.00938	−0.02870	−0.21100
0.74	−0.00319	−0.05810	−0.22880
0.76	0.00535	−0.04830	−0.22320
0.78	0.00466	−0.06750	−0.21090
0.80	−0.00462	−0.07600	−0.21660
0.82	−0.01590	−0.05530	−0.20960
0.84	0.00907	−0.03300	−0.23970
0.86	0.01440	−0.02540	−0.19520
0.88	0.01380	−0.05580	−0.25810
0.90	−0.01850	−0.02770	−0.24320
0.92	0.00968	−0.04800	−0.21190
0.94	−0.01400	−0.06780	−0.25800
0.96	0.00549	−0.05600	−0.25460
0.98	0.00409	−0.06610	−0.22440
1.00	−0.00773	−0.04710	−0.24720
1.02	0.00742	−0.04050	−0.23270
1.04	0.01250	−0.09110	−0.22860
1.06	0.01710	−0.01980	−0.22650
1.08	0.01920	−0.06080	−0.21530
1.10	0.00185	−0.03460	−0.22000
1.12	0.00346	−0.05550	−0.24960
1.14	0.01320	−0.05970	−0.24690
1.16	0.00765	−0.03810	−0.21440
1.18	0.02080	−0.08000	−0.23700

TABLA III

CRITERIO SSS

$\beta=0.975$ $\alpha=0.36$ $\delta=0.01$ $\Gamma=0.9$

τ	σ					
	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01	0.02
0.70	1.7569	1.8967	1.9364	1.8899	1.7278	1.8848
0.72	1.8029	1.8552	1.9322	1.8177	1.6762	1.8798
0.74	1.7835	1.8555	1.9004	1.8955	1.7429	1.8871
0.76	1.7653	1.8596	1.9243	1.8323	1.6931	1.8916
0.78	1.7775	1.8281	1.8987	1.8197	1.6591	1.8521
0.80	1.7911	1.8613	1.9009	1.8530	1.7463	1.9047
0.82	1.7935	1.8716	1.8961	1.8196	1.7248	1.8837
0.84	1.8146	1.9084	1.9115	1.8418	1.7243	1.8548
0.86	1.7514	1.8645	1.8995	1.8339	1.7637	1.9079
0.88	1.7547	1.8856	1.8781	1.8366	1.7104	1.8764
0.90	1.7330	1.8394	1.9137	1.8424	1.7616	1.8720
0.92	1.8250	1.8293	1.8841	1.8228	1.7406	1.9008
0.94	1.7721	1.8499	1.8752	1.8437	1.7772	1.8950
0.96	1.7364	1.8315	1.8908	1.8190	1.7595	1.9158
0.98	1.8029	1.8515	1.9200	1.8292	1.7062	1.8745
1.00	1.7932	1.8479	1.9233	1.8300	1.7264	1.8759
1.02	1.7914	1.8662	1.9175	1.8189	1.7449	1.8717
1.04	1.7774	1.8749	1.9076	1.8177	1.7453	1.8560
1.06	1.7578	1.8004	1.8861	1.8648	1.7543	1.8642
1.08	1.7689	1.8568	1.9045	1.8401	1.6925	1.8802
1.10	1.7808	1.8745	1.9212	1.8331	1.7298	1.8704
1.12	1.7483	1.8378	1.8941	1.8356	1.7807	1.8798
1.14	1.7431	1.8785	1.9310	1.8282	1.7736	1.8800
1.16	1.7666	1.8235	1.9066	1.8451	1.6853	1.8839
1.18	1.7871	1.8835	1.9149	1.8267	1.7423	1.8929

TABLA IV

CORR(Y, R)

$\beta=0.975$ $\alpha=0.36$ $\delta=0.01$ $\gamma=0.9$

τ	σ					
	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01	0.02
0.7	−0.18130	−0.18730	−0.19550	−0.21250	−0.16530	−0.15080
0.72	−0.20600	−0.26000	−0.25380	−0.22770	−0.21590	−0.24070
0.74	−0.25260	−0.23330	−0.24250	−0.27580	−0.24020	−0.22490
0.76	−0.23320	−0.21250	−0.25340	−0.22740	−0.22220	−0.23950
0.78	−0.24600	−0.22370	−0.21590	−0.22540	−0.20850	−0.21940
0.8	−0.24510	−0.24210	−0.22360	−0.24570	−0.27280	−0.25850
0.82	−0.23670	−0.22070	−0.25040	−0.24780	−0.22570	−0.24470
0.84	−0.25510	−0.27530	−0.24970	−0.23280	−0.25070	−0.19870
0.86	−0.24660	−0.26030	−0.23870	−0.24700	−0.25370	−0.23900
0.88	−0.26210	−0.23950	−0.22400	−0.25290	−0.21230	−0.24610
0.9	−0.24490	−0.21580	−0.23880	−0.25040	−0.23980	−0.24140
0.92	−0.27970	−0.22980	−0.22920	−0.23900	−0.25810	−0.23050
0.94	−0.24840	−0.24040	−0.21220	−0.22380	−0.27930	−0.25930
0.96	−0.22470	−0.22220	−0.22500	−0.23630	−0.22670	−0.24380
0.98	−0.25330	−0.21250	−0.24900	−0.23310	−0.24140	−0.25190
1	−0.25860	−0.25690	−0.23650	−0.26540	−0.23970	−0.24820
1.02	−0.24710	−0.26930	−0.23490	−0.22820	−0.22560	−0.21740
1.04	−0.25890	−0.24420	−0.23110	−0.19570	−0.23720	−0.23160
1.06	−0.23870	−0.21140	−0.25670	−0.23740	−0.24670	−0.23750
1.08	−0.25670	−0.24080	−0.24520	−0.27690	−0.21350	−0.23200
1.1	−0.25670	−0.21810	−0.27780	−0.24520	−0.24300	−0.23820
1.12	−0.20320	−0.20220	−0.23630	−0.23550	−0.26010	−0.26300
1.14	−0.23050	−0.23970	−0.23910	−0.24830	−0.25450	−0.24730
1.16	−0.23780	−0.23940	−0.23740	−0.21500	−0.21210	−0.23320
1.18	−0.26340	−0.23580	−0.26310	−0.24170	−0.23290	−0.23250

TABLA V

MEDIA DE LA RELACION INVERSION/PRODUCTO (R)

β=0.975 α=0.36 δ=0.01 Γ=0.9

τ	σ					
	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01	0.02
0.7	15.16%	15.14%	15.20%	15.16%	15.16%	15.21%
0.72	15.17%	15.14%	15.19%	15.17%	15.16%	15.25%
0.74	15.16%	15.14%	15.19%	15.19%	15.17%	15.21%
0.76	15.18%	15.15%	15.20%	15.16%	15.18%	15.25%
0.78	15.16%	15.14%	15.19%	15.17%	15.15%	15.27%
0.8	15.16%	15.14%	15.18%	15.17%	15.14%	15.21%
0.82	15.16%	15.14%	15.20%	15.18%	15.18%	15.23%
0.84	15.16%	15.14%	15.20%	15.18%	15.17%	15.23%
0.86	15.16%	15.13%	15.21%	15.15%	15.17%	15.26%
0.88	15.16%	15.15%	15.20%	15.17%	15.17%	15.23%
0.9	15.16%	15.14%	15.19%	15.16%	15.16%	15.21%
0.92	15.16%	15.14%	15.19%	15.17%	15.16%	15.22%
0.94	15.16%	15.14%	15.19%	15.17%	15.17%	15.22%
0.96	15.16%	15.13%	15.19%	15.17%	15.17%	15.24%
0.98	15.16%	15.14%	15.19%	15.17%	15.18%	15.24%
1	15.16%	15.14%	15.19%	15.16%	15.16%	15.22%
1.02	15.16%	15.14%	15.20%	15.18%	15.17%	15.23%
1.04	15.16%	15.14%	15.20%	15.18%	15.16%	15.24%
1.06	15.16%	15.14%	15.20%	15.18%	15.14%	15.23%
1.08	15.16%	15.14%	15.20%	15.18%	15.15%	15.21%
1.1	15.16%	15.14%	15.21%	15.18%	15.17%	15.25%
1.12	15.16%	15.14%	15.19%	15.18%	15.17%	15.22%
1.14	15.16%	15.13%	15.20%	15.18%	15.17%	15.21%
1.16	15.16%	15.13%	15.21%	15.16%	15.17%	15.24%

TABLA VI

CRITERIO SSS

ρ=0.975 α=0.36 δ=0.02 Γ=0.9

Υ	σ				
	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01
0.70	1.7999	1.7456	1.7375	1.6408	1.7550
0.72	1.8336	1.6922	1.7472	1.6915	1.7865
0.74	1.7957	1.7249	1.7420	1.7370	1.8228
0.76	1.7822	1.7464	1.7574	1.6464	1.7820
0.78	1.8151	1.7337	1.7669	1.6454	1.7880
0.80	1.8034	1.7319	1.7305	1.6631	1.7727
0.82	1.7749	1.6912	1.7497	1.6844	1.8177
0.84	1.8050	1.7501	1.7865	1.6591	1.8030
0.86	1.8104	1.7531	1.7469	1.7372	1.7924
0.88	1.8251	1.7429	1.7687	1.6402	1.7813
0.90	1.7976	1.7034	1.7327	1.6335	1.8069
0.92	1.8159	1.7411	1.7527	1.6992	1.7830
0.94	1.8088	1.7183	1.7366	1.6890	1.7762
0.96	1.8442	1.7199	1.7143	1.6781	1.7871
0.98	1.8394	1.6962	1.7414	1.6505	1.8178
1.00	1.8208	1.6705	1.7401	1.6650	1.8000
1.02	1.8170	1.7439	1.7533	1.6534	1.7809
1.04	1.8095	1.7400	1.7024	1.7022	1.7951
1.06	1.7812	1.7037	1.7583	1.7416	1.7849
1.08	1.7781	1.7172	1.7370	1.6629	1.8017
1.10	1.7872	1.7624	1.7194	1.6878	1.8068
1.12	1.7632	1.7051	1.7445	1.7230	1.7406
1.14	1.7836	1.7179	1.7261	1.6845	1.7452
1.16	1.8127	1.7260	1.7439	1.7038	1.7521
1.18	1.8119	1.7458	1.6774	1.6793	1.8356

TABLA VII

CORR(Y, R)

β=0.975 α=0.36 δ=0.02 Γ=0.9

T	σ				
	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01
0.70	-0.1227	-0.1242	-0.1044	-0.0911	-0.1194
0.72	-0.1617	-0.1318	-0.1643	-0.1739	-0.1515
0.74	-0.1470	-0.1511	-0.1671	-0.1743	-0.1653
0.76	-0.1556	-0.1813	-0.1578	-0.1318	-0.1714
0.78	-0.1474	-0.1235	-0.1749	-0.1508	-0.1577
0.80	-0.1404	-0.1688	-0.1460	-0.1706	-0.1633
0.82	-0.1472	-0.1386	-0.1642	-0.1551	-0.1531
0.84	-0.1847	-0.1678	-0.1599	-0.1384	-0.1685
0.86	-0.1880	-0.1726	-0.1400	-0.2023	-0.1497
0.88	-0.1801	-0.1693	-0.1663	-0.1290	-0.1717
0.90	-0.1468	-0.1561	-0.1548	-0.1522	-0.1632
0.92	-0.1719	-0.1464	-0.1718	-0.1605	-0.1442
0.94	-0.1590	-0.1432	-0.1721	-0.1226	-0.1591
0.96	-0.1573	-0.1592	-0.1451	-0.1407	-0.1522
0.98	-0.1715	-0.1311	-0.1411	-0.1340	-0.1780
1.00	-0.1611	-0.1590	-0.1861	-0.1539	-0.1605
1.02	-0.1657	-0.1609	-0.1542	-0.1357	-0.1963
1.04	-0.1755	-0.1572	-0.1583	-0.1595	-0.1230
1.06	-0.1606	-0.1523	-0.1813	-0.1853	-0.1592
1.08	-0.1468	-0.1263	-0.1710	-0.1286	-0.1491
1.10	-0.1640	-0.1652	-0.1595	-0.1712	-0.1658
1.12	-0.1416	-0.1723	-0.1482	-0.1682	-0.1545
1.14	-0.1537	-0.1434	-0.1842	-0.1563	-0.1297
1.16	-0.1768	-0.1628	-0.1612	-0.1551	-0.1552
1.18	-0.1625	-0.1446	-0.1196	-0.1530	-0.1988

Conclusiones

La conclusión más importante que se deriva de los resultados de este trabajo es que un modelo de equilibrio no es incompatible con los ciclos observados en la economía mexicana. A pesar de que este planteamiento ya había sido comprobado para otras economías, no deja de ser importante tanto teórica como prácticamente el corroborarlo para el caso mexicano.

Desde el punto de vista práctico este resultado es importante porque permite contemplar la posibilidad de tener un modelo que permita evaluar los efectos de la política económica, donde el comportamiento de los agentes está representado por parámetros "profundos". Además es un modelo macroeconómico consistente con los principios de la microeconomía.

Si bien, los resultados obtenidos con el Modelo 2 no son los idóneos, particularmente la correlación entre el producto y la razón inversión producto, es sumamente notable que, aún con toda la simplicidad que conlleva, haya podido replicar de manera tan precisa varias de las características más importantes de las series económicas observadas, a saber: la desviación estándar de la razón Inversión/Producto R [0.028 vs 0.031 observado], la autocorrelación de primer orden del producto [0.862 vs 0.872] y la autocorrelación de segundo orden del logaritmo del producto [0.745 vs 0.705]. Por el contrario, sería por demás sorprendente que las hubiera replicado perfectamente. Esto es aún más relevante, porque el modelo no incluye factores tales como imperfecciones de mercado, externalidades, heterogeneidad de los agentes, políticas públicas y otros, que tuvieron un rol protagónico durante largo tiempo en los modelos que trataban de explicar las fluctuaciones económicas.

Vale la pena señalar que los hallazgos obtenidos indican que los resultados del modelo determinista, sin ser exactos, proporcionan elementos adecuados para el análisis del comportamiento de los agentes económicos y son consistentes con la hipótesis de Brock y Mirman (1972), citada en el primer capítulo.

Desde otra perspectiva, este trabajo era un ejercicio obligado por dos razones. La primera de ellas es que los modelos así de simplificados son el punto de partida y de referencia para la comprensión del comportamiento cualquier economía. La segunda razón es que permitirá determinar el poder explicativo y los efectos de la adición de nuevas variables al modelo, así como el relajar o incluir supuestos o usar datos con menores problemas de medición.

En este sentido algunas modificaciones aparentemente promisorias que podrían hacerse en trabajos posteriores al Modelo 2 para mejorar los resultados obtenidos son:

1) La búsqueda de información de carácter econométrico proveniente de estudios microeconómicos que permitiera la inclusión de variables adicionales o especificar alguna forma funcional que haya demostrado ser más consistente con la realidad de la economía mexicana que las consideradas.

2) Modificar el tiempo de maduración de la inversión así como su distribución en los períodos de construcción con base en una estimación confiable de estas características para los proyectos que se realizan en la economía mexicana.

3) La inclusión de choques estocásticos a las preferencias de los consumidores.

4) Incorporar un sector externo al modelo, pues los modelos estimados aquí representa una economía cerrada y, en la actualidad, son en realidad pocas las economías que pueden considerarse así.

5) Relajar el supuesto de la oferta de trabajo totalmente inelástica, e incluir el trabajo como otra variable de la función de producción.

6) Considerar funciones de utilidad y/o de producción que tengan otras propiedades importantes, como sería la función de utilidad de aversión absoluta al riesgo constante.

7) Incorporar inventarios y rigideces en salarios y precios.

8) Considerar otros tipos de procesos generadores de datos para los choques estocásticos que afectan a la economía.

9) Relajar el supuesto de separabilidad de la función de utilidad.

Además, si en el futuro, estudios econométricos sugieren que el o los procesos estocásticos motor de la economía inducen en las variables económicas tendencias estocásticas; deberán considerarse sus efectos, tanto en la forma de filtrar los datos como en la simulación del modelo.

Todo ello sin contar que la estrategia empírica más apropiada para esta clase de modelos sigue siendo un área abierta a la investigación.

Finalmente, es preciso señalar que los modelos de los ciclos reales tendrán que enfrentar y satisfacer pruebas empíricas más exigentes de las que han tenido que enfrentar a la fecha.

APENDICE I

Ecuación de Euler para un Modelo con Tiempo para Construir

El problema de maximización que enfrenta el planificador social es:

$$Max\ E_t\ [\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j U(C_{t+j})]$$

sujeto a:

$$C_t+I_t=f(k_t) \qquad (2.1)$$

$$k_{t+1}=(1-\delta)k_t+s_t^1 \qquad (2.2)$$

$$I_t = \sum_{j=1}^{4} \varphi_j s_t^j \qquad (2.3)$$

$$s_{t+1}^j = s_t^{j+1} \qquad (2.4)$$

Sustituyendo la ecuación (2.2) en (2.4) y adelantando, tenemos que:

$$\begin{aligned} s_t^1 &=k_{t+1}-(1-\delta)k_t \\ s_t^2 &=k_{t+2}-(1-\delta)k_{t+1} \\ s_t^3 &=k_{t+3}-(1-\delta)k_{t+2} \\ s_t^4 &=k_{t+4}-(1-\delta)k_{t=3} \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (2.3), el gasto de inversión queda como:

$$I_t=\varphi_1 k_{t+1}-\varphi_1\mu k_t+\varphi_2 k_{t+2}-\varphi_2\mu k_{t+1}+\varphi_3 k_{t+3}-\varphi_3\mu k_{t+2}+\varphi_4 k_{t+4}-\varphi_4\mu k_{t+3}$$

$$I_t=\varphi_4 k_{t+4}+(\varphi_3-\varphi_4\mu)k_{t+3}+(\varphi_2-\varphi_3\mu)k_{t+2}+(\varphi_1-\varphi_2\mu)k_{t+1}-\varphi_1\mu k_t \tag{2.3'}$$

Sustituyendo (2.3') en (2.1)

$$C_t=f(k_t)-\varphi_4 k_{t+4}-(\varphi_3-\varphi_4\mu)k_{t+3}-(\varphi_2-\varphi_3\mu)k_{t+2}-(\varphi_1-\varphi_2\mu)k_{t+1}+\varphi_1\mu k_t \tag{3}$$

Para resolver este problema empleando el principio de la programación dinámica debemos identificas las variables de estado y de control. Debido a la tecnología para construir la decisión de inversión que se tome en este período sólo afectará cuatro períodos después, por lo que el planificador toma como dados el capital presente y de los tres períodos siguientes. Las variables de estado son: k_t, K_{t+1}, K_{t+2}, K_{t+3}

La variable de control es: k_{t+4}

La funcion de valor puede escribirse de la siguiente forma:

$$V(k_t,k_{t+1},k_{t+2},k_{t+3})=\underset{K_{t+4}}{Max}\ [U(c_t)+\beta V(k_{t+1},k_{t+2},k_{t+3},k_{t+4})] \tag{4}$$

La condición de primer orden es:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial k_{t+4}}=0\right) \qquad E_t\{-\varphi_4 U'(C_t)+\beta\frac{\partial V(K_{t+1},k_{t+2},k_{t+3},k_{t+4})}{\partial k_{t+4}}\}=0$$

$$U'(C_t) = \left(\frac{\beta}{\varphi_4}\right) E_t\left\{\frac{\partial V(K_{t+1}, k_{t+2}, k_{t+3}, k_{t+4})}{\partial k_{t+4}}\right\} \qquad \text{(E)}$$

Sean las funciones:

$$A(k_t) = f(k_t) + \varphi_1 \mu k_t \qquad (5.1)$$

$$B(k_{t+1}) = (\varphi_2 \mu - \varphi_1) k_{t+1} \qquad (5.2)$$

$$D(k_{t+2}) = (\varphi_3 \mu - \varphi_2) k_{t+2} \qquad (5.3)$$

$$E(k_{t+3}) = (\varphi_4 \mu - \varphi_3) k_{t+3} \qquad (5.4)$$

$$G(k_{t+4}) = \varphi_4 k_{t+4} \qquad (5.5)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (3)

$$C_t = A(k_t) + B(k_{t+1}) + D(k_{t+2}) + E(k_{t+3}) - G(k_{t+4})$$

Reescribiendo la condición de primer orden, tenemos:

$$E_t\left\{\frac{dU}{dC}\left[-\frac{\partial G}{\partial k_{t+4}}\right]\right\} + E_t\left\{\beta \frac{\partial V(K_t+1, k_{t+2}, k_{t+3}, k_{t+4})}{\partial k_{t+4}}\right\} = 0 \qquad \text{(E')}$$

Derivando la función de valor con respecto a k_t

$$\frac{\partial V(k_t,k_{t+1},k_{t+2},k_{t+3})}{\partial k_t}=E_t\{\frac{dU}{dC_t}[\frac{dA}{dk_t}-\frac{dG}{dk_{t+4}}\frac{\partial h}{\partial k_t}]+\beta\frac{\partial V(K_t+1,k_{t+2},k_{t+3},k_{t+4})}{\partial k_{t+4}}\frac{\partial h}{\partial k_t}\}$$

Sustituyendo (E')

$$\frac{\partial V(K_{t+1},\ldots,k_{t+3})}{\partial k_t}=E_t\{\frac{dU}{dC_t}\frac{dA}{dk_t}\} \tag{6}$$

Derivando la función de valor con respecto a k_{t+1}

$$\frac{\partial V(k_t,\ldots,k_{t+3})}{\partial k_{t+1}}=E_t\{\frac{dU}{dC_t}[\frac{dB}{dk_{t+1}}-\frac{dG}{dk_{t+4}}\frac{\partial h}{\partial k_{t+1}}]+$$
$$+\beta\frac{\partial V(K_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+4}}\frac{\partial h}{\partial k_{t+1}}+\beta\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+1}}\}$$

Sustituyendo (E')

$$\frac{\partial V(k_t,\ldots,k_{t+3})}{\partial k_{t+1}}=E_t\{\frac{dU}{dC_t}[\frac{dB}{dk_{t+1}}]+\beta\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+1}}\} \tag{7}$$

Derivando la función de valor con respecto a k_{t+2}

$$\frac{\partial V(k_t,\ldots,k_{t+3})}{\partial k_{t+2}}=E_t\{\frac{dU}{dC_t}[\frac{dD}{dk_{t+2}}-\frac{dG}{dk_{t+4}}\frac{\partial h}{\partial k_{t+2}}]+\beta\frac{\partial V(K_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+4}}\frac{\partial h}{\partial k_{t+2}}+$$
$$+\beta\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+2}}\}$$

Sustituyendo (E')

$$\frac{\partial V(k_t,\ldots,k_{t+3})}{\partial k_{t+2}}=E_t\{\frac{dU}{dC_t}[\frac{dD}{dk_{t+2}}]+\beta\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+2}}\} \tag{8}$$

Derivando la función de valor con respecto a k_{t+3}

$$\frac{\partial V(k_t,\ldots,k_{t+3})}{\partial k_{t+3}}=E_t\{\frac{dU}{dC_t}[\frac{dE}{dk_{t+3}}-\frac{dG}{dk_{t+4}}\frac{\partial h}{\partial k_{t+3}}]+\beta\frac{\partial V(K_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+4}}\frac{\partial h}{\partial k_{t+3}}+$$
$$+\beta\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+3}}\}$$

Sustituyendo (E')

$$\frac{\partial V(k_t,\ldots,k_{t+3})}{\partial k_{t+3}}=E_t\{\frac{dU}{dC_t}[\frac{dE}{dk_{t+3}}]+\beta\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+3}}\}\quad(9)$$

Sustituyendo (5.1) en (6)

$$\frac{\partial V(k_t,\ldots,k_{t+3})}{\partial k_t}=E_t\{U'(C_t)\,[f'(k_t)+\varphi_1\mu]\}\quad(10)$$

Adelantando la ecuación (10) un período

$$\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+1}}=E_{t+1}\{U'(C_{t+1})\,[f'(k_{t+1})+\varphi_1\mu]\}$$

Tomando el valor esperado en t y aplicando la ley de las eperanzas iteradas

$$E_t\{\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+1}}\}=E_t\{U'(C_{t+1})\,[f'(k_{t+1})+\varphi_1\mu]\}\quad(11)$$

Sustituyendo (5.2) en (7)

$$\frac{\partial V(k_t,\ldots,k_{t+3})}{\partial k_{t+1}}=E_t\{(\varphi_2\mu-\varphi_1)\,U'(C_t)+\beta\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+1}}\}\quad(12)$$

Sustituyendo (11) en (12)

$$\frac{\partial V(k_t,\ldots,k_{t+3})}{\partial k_{t+1}}=E_t\{(\varphi_2\mu-\varphi_1)U'(C_t)+\beta U'(C_{t+1})[f'(k_{t+1})+\varphi_1\mu]\} \qquad (13)$$

Adelantando (13) un período

$$\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+2}}=E_{t+1}\{(\varphi_2\mu-\varphi_1)U'(C_{t+1})+\beta U'(C_{t+2})[f'(k_{t+2})+\varphi_1\mu]\}$$

Tomando el valor esperado en t y aplicando la ley de las eperanzas iteradas

$$E_t\{\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+2}}\}=E_t\{(\varphi_2\mu-\varphi_1)U'(C_{t+1})+\beta U'(C_{t+2})[f'(k_{t+2})+\varphi_1\mu]\} \qquad (14)$$

Sustituyendo (5.3) en (8)

$$\frac{\partial V(k_t,\ldots,k_{t+3})}{\partial k_{t+2}}=E_t\{(\varphi_3\mu-\varphi_2)U'(C_t)+\beta\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+2}}\} \qquad (15)$$

Sustituyendo (14) en (15)

$$\frac{\partial V(k_t,\ldots,k_{t+3})}{\partial k_{t+2}}=E_t\{(\varphi_3\mu-\varphi_2)U'(C_t)+\beta(\varphi_2\mu-\varphi_1)U'(C_{t+1})+ +\beta^2U'(C_{t+2})[f'(k_{t+2})+\varphi_1\mu]\} \qquad]16$$

Adelantando (16) un período

Tomando el valor esperado en t y aplicando la ley de las eperanzas iteradas

$$\frac{\partial V(k_{t+1},...,k_{t+4})}{\partial k_{t+3}}=E_{t+1}\{(\varphi_3\mu-\varphi_2)U'(C_{t+1})+\beta(\varphi_2\mu-\varphi_1)U'(C_{t+2})+\beta^2U'(C_{t+3})[f'(k_{t+3})+\varphi_1\mu]\}$$

$$E_t\{\frac{\partial V(k_{t+1},...,k_{t+4})}{\partial k_{t+3}}\}=E_t\{(\varphi_3\mu-\varphi_2)U'(C_{t+1})+\beta(\varphi_2\mu-\varphi_1)U'(C_{t+2})+\beta^2U'(C_{t+3})[f'(k_{t+3})+\varphi_1\mu]\} \quad (17)$$

Sustituyendo (5.4) en (9)

$$\frac{\partial V(k_t,...,k_{t+3})}{\partial k_{t+3}}=E_t\{(\varphi_4\mu-\varphi_3)U'(C_t)+\beta\frac{\partial V(k_{t+1},...,k_{t+4})}{\partial k_{t+3}}\} \quad (18)$$

Sustituyendo (17) en (18)

$$\frac{\partial V(k_t,...,k_{t+3})}{\partial k_{t+3}}=E_t\{(\varphi_4\mu-\varphi_3)U'(C_t)+\beta(\varphi_3\mu-\varphi_2)U'(C_{t+1})+\beta^2(\varphi_2\mu-\varphi_1)U'(C_{t+2})+\beta^3U'(C_{t+3})[f'(k_{t+3})+\varphi_1\mu]\}$$

(19)

Adelantando (19) un período

$$\frac{\partial V(k_{t+1},...,k_{t+4})}{\partial k_{t+4}}=E_{t+1}\{(\varphi_4\mu-\varphi_3)U'(C_{t+1})+\beta(\varphi_3\mu-\varphi_2)U'(C_{t+2})+\beta^2(\varphi_2\mu-\varphi_1)U'(C_{t+3})+\beta^3U'(C_{t+4})[f'(k_{t+4})+\varphi_1\mu]\}$$

Tomando el valor esperado en t y aplicando la ley de las eperanzas iteradas

$$E_t\{\frac{\partial V(k_{t+1},\ldots,k_{t+4})}{\partial k_{t+4}}\}=E_t\{(\varphi_4\mu-\varphi_3)U'(C_{t+1})+\beta(\varphi_3\mu-\varphi_2)U'(C_{t+2})$$

$$+\beta^2(\varphi_2\mu-\varphi_1)U'(C_{t+3})+\beta^3U'(C_{t+4})[f'(k_{t+4})+\varphi_1\mu]\}$$

(20)

Sustituyendo (20) en (E)

$$U'(C_t)=\frac{\beta}{\varphi_4}E_t\{(\varphi_4\mu-\varphi_3)U'(C_{t+1})+\beta(\varphi_3\mu-\varphi_2)U'(C_{t+2})$$

$$+\beta^2(\varphi_2\mu-\varphi_1)U'(C_{t+3})+\beta^3U'(C_{t+4})[f'(k_{t+4})+\varphi_1\mu]\}$$

(21)

Que es la ecuación de Euler del problema

Puede demostrarse que en general cuando el tiempo necesario para construcción es de n períodos la ecuación de Euler es:

$$U'(C_t)=\frac{1}{\varphi_n}\sum_{i=1}^{n}\beta^iU'(C_{t+i})(\varphi_{n+1-i}\mu-\varphi_{n-i}) + \beta^nU'(C_{t+n}f'(k_{t+n})$$

con:

$\varphi_0=0$

Esta misma ecuación la podemos utilizar para encontrar la ecuación de Euler cuando el tiempo de maduración de la inversión es de un período, simplemente sustituyendo en la ecuación anterior:

$$n=1; \quad \varphi_1=1$$

de esta manera la ecuación de Euler cuando el tiempo de maduración de la inversión es un período como:

$$U'(C_t)=\beta E_t\{U'(C_{t+1})\,(f'(k_{t+1})+(1-\delta))\}$$

Si se propone que la función de utilidad sea del tipo de elasticidad de sustitución constante,

$$U(C_t)=\frac{C_t^{1-\tau}}{1-\tau}$$

(23)

entonces la utilidad marginal del consumo es:

$$U'(C_t)=C_t^{-\tau}$$

(24)

Por otro lado se propone que la función de producción de la economía sea el tipo Cobb Douglas

$$f(k_t)=e^{z_t}k_t^{\alpha}$$

(25)

en consecuencia el producto marginal del capital es:

$$f'(k_t)=\alpha e^{z_t}k_t^{\alpha-1}$$

(26)

Sustituyendo las ecuaciones (24) y (26) en la ecuación (21), con los adelantos necesarios, tenemos que

$$C_t^{-\tau}=\frac{\beta}{\varphi_4}E_t\{(\varphi_4\mu-\varphi_3)C_{t+1}^{-\tau}+\beta(\varphi_3\mu-\varphi_2)C_{t+2}^{-\tau}+\beta^2(\varphi_2\mu-\varphi_1)C_{t+3}^{-\tau}$$

$$+\beta^3C_{t+4}^{-\tau}[f'(k_{t+4})+\varphi_1\mu]\}$$

APENDICE II

Programas tipo en RATS

Modelo 1

```
* Se asigna memoria para series de tiempo
* de hasta 5000 observaciones

all 5000

* Define la extension del periodo
compute [integer] N=3000
compute [integrer] It  = 1
compute [integrer] MIT = 50
compute [real] s = 0.5

** Caracteristicas a replicar
declare vect Car(9)
compute Car(1) = 0.03297
compute Car(2) = 0.03104
compute Car(3) = 0.87184
compute Car(4) = 0.70481
compute Car(5) = 0.50559
compute Car(6) = 0.75683
compute Car(7) = 0.92688
compute Car(8) = 0.83824
compute Car(9) = 0.71816

** Variables auxiliares
compute [real]   Cr=10
compute [real]  tol=0.01
declare  vect     h(4) f(4)

* tasa de depreciacion
compute [real]    d=0.002

do tt=1,18
{

compute [real] d = d + 0.002

compute [real] suma = 0.0

do ww=1,10

begin

compute [integrer] It = 1

* parametros del modelo:
* elasticidad capital del producto
```

```
compute [real]    a=0.47
* inverso de la elasticidad de sustitucion intertemporal
compute [real]  tau= 0.78
* parametros del proceso autoregresivo de z
compute [real]    p1=0.90
compute [real]    p0=0.00
* Parametros del proceso estocastico de Z
* variancia de z
compute [real]     v=0.0003
* factor de descuento
compute [real] b= 0.96

* Funcion consumo esperado, se utiliza un polinomio de orden
2.
nonlin b0 b1 b2 b3

compute b0 = -1.1
compute b1 =  0.42
compute b2 =  0.02
compute b3 =  1.0

* Valores iniciales de k y z
set  k 1 1 = 20
set  z 1 1 = 0.
* Se define la funcion Ec, el valor esperado del consumo
set Ec 1 1 = 0
frml f1 Ec = exp( b0 + b1*log(k(t-1)) + b2*z(t) + b3*z(t)**2 )

* Secuencia de valores de z
set z 2 N = p0 + p1*z(t-1)+ %ran(v)
set c 1 1 = 0

frml f2  c = (b*exp( b0+b1*log(k(t-1))+b2*z(t)+b3*z(t)**2
))**(-1/tau)
frml f3  k = exp(z(t))*k(t-1)**a + (1-d)*k(t-1) - c(t)

group CREC f2>>c f3>>k

while( (Cr >= tol).and.( It < Mit) )
begin

   compute h(1) = b0
   compute h(2) = b1
   compute h(3) = b2
   compute h(4) = b3

   * Se calcula la secuencia {c,k}
     forecast(model=crec) 2 N 2

    * Se evalua la serie de tiempo L = E(C(t))
      set L 2 N-1 = (c(t+1)**-tau)*(
a*exp(z(t+1))*k(t)**(a-1)+(1-d) )

      * Se estiman los parametros
      nlls(frml=f1,noprint) L 2 N-1 Resid
       * Se calcula el criterio de convergencia
```

```
        compute Cr = abs( %beta(1) - h(1) )
        do i =2,4
        if abs( %beta(i)-h(i) ) > Cr
        compute Cr = %beta(i) - h(i)
        end
        compute It = it + 1

        do i=1,4
        compute h(i) =(1-s)*h(i) +s*%beta(i)
        end

   *  Escribe Opcionalmente la secuencia de valores de los
parametros
   *  write H
 end
     If (It < MIT )
     * Se reporta la regresion final
     nlls(frml=f1,noprint) L 2 N-1 Resid
     else
     write " El algoritmo no converge en " It " Iteraciones "
end

SET Q  2 N-1 = EXP(Z(t-1))*K(t-1)**a
set In 2 N-1 = k(t)-(1-d)*k(t-1)
set iq 2 n-1 = in(t)/q(t)
set lq 2 n-1 = log(q(t))

stat(noprint) lq 100 n-1
compute Stdlq = %variance**.5
stat(noprint) iq 100 n-1
compute Stdiq = %variance**.5
correlate(noprint,number=4) lq 100 n-1 Rhoq
correlate(noprint,number=4) iq 100 n-1 Rhoiq
cross(noprint) lq iq 100 n-1 0 0 Giqq
compute ssq = ( (Car(1)-stdlq)**2+ (Car(2)-stdiq)**2 $
+ (Car(3)-Rhoq(2))**2 + (Car(4)-Rhoq(3))**2 +
(Car(5)-Rhoq(4))**2 $
+ (Car(6)-Giqq(1))**2 + (Car(7)-Rhoiq(2))**2 +
(Car(8)-Rhoiq(3))**2 $
+ (Car(9)-Rhoiq(4))**2 )**.5
 compute suma = suma + ssq
end
end
 compute [real] prom = suma/10
 write prom
}
end
```

Modelo 2

```
* Se asigna memoria para series de tiempo
* de hasta 5000 observaciones

all 5000

* Define la extension del periodo
compute [integer] N=3000
compute [integer] IT  = 1
compute [integer] MIT = 50
compute [real] s = 0.5

* Variables auxiliares
compute [real]   Cr=10
compute [real]  tol=0.00001
declare  vect     h(7) f(7)

*Caracteristicas a replicar
declare vector Car(9)
compute Car(1) = 0.03297
compute Car(2) = 0.03104
compute Car(3) = 0.87184
compute Car(4) = 0.70481
compute Car(5) = 0.50559
compute Car(6) = 0.75683
compute Car(7) = 0.92688
compute Car(8) = 0.83824
compute Car(9) = 0.71816

* elasticidad capital del producto
compute [real]    a=0.54


do tt=1,20

{
compute a = a + 0.01
compute [real] suma = 0.0

do ww=1,10

compute [integer] It =1

* parametros del modelo:
* factor de descuento
compute [real] b= 0.975
* inverso de la elasticidad de sustitucion intertemporal
compute [real]  tau=0.85
* tasa de depreciacion
compute [real]    d=0.005
compute [real] j1= 0.25
compute [real] j2= 0.25
compute [real] j3= 0.25
```

```
computr [real] j4= 0.25
* Parametros del proceso estocastico de Z
* variancia de z
compute [real]     v=0.005
* parametros del proceso autoregresivo de z
compute [real]    p1=0.90
compute [real]    p0=0.00

* Funcion consumo esperado, se utiliza un polinomio de orden
2.
nonlin b0 b1 b2 b3 b4 b5 b6
compute b0 =  1.5
compute b1 = -0.2210812
compute b2 =  0.1
compute b3 =  0.01
compute b4 = -0.1658109
compute b5 = -0.1105406
compute b6 = -0.0552703

* Valores iniciales de k y z
set  k 1 4 = 20
set  z 1 1 = 0.
* Se define la funcion Ec, el valor esperado del consumo
set Ec 1 1 = 0
frml f1 Ec =
exp(b0+b1*log(k(t-1))+b2*z(t-1)+b3*z(t-1)**2+b4*log(k(t-2)) $

+b5*log(k(t-3))+b6*log(k(t-4)) )

* Secuencia de valores de z
set z 2 N = p0 + p1*z(t-1)+ %ran(v)
set c 1 1 = 5.63
set in 1 4 = 0.4

frml f2 c=(b*exp( b0+b1*log(k(t-1))+b2*z(t-4)+b3*z(t-4)**2 $
      +b4*log(k(t-2)) + b5*log(k(t-3)) +b6*log(k(t-4))
))**(-1/tau)
frml f3
in=(exp(z(t-4))*k(t-4)**a-c(t)-j1*in(t-3)-j2*in(t-2)-j3*in(t-1
) )/j4
frml f4  k = (1-d)*k(t-1) + in(t-3)

group CREC f2>>c f3>>in f4>> k


while( (Cr >= tol).and.( It < Mit) )
begin

   compute h(1) = b0
   compute h(2) = b1
   compute h(3) = b2
   compute h(4) = b3
   compute h(5) = b4
   compute h(6) = b5
   compute h(7) = b6
```

```
   * Se calcula la secuencia {c,k}
     forecast(model=crec) 3 N-4 5

   * Se evalua la serie de tiempo L = E(C(t))
 set L 5 N-4 = (1/j4)*(
(j4*(1-d)-j3)*c(t+1)**-tau+b*(j3*(1-d)-j2)*c(t+2)**-tau    $
 + b*b*(j2*(1-d)-j1)*c(t+3)**-tau + b*b*b*(c(t+4)**-tau)  $
 *(a*exp(z(t+4))*k(t+4)**(a-1)+j1*(1-d)) )

      * Se estiman los parametros
      nlls(frml=f1,noprint) L 5 N-4 Resid

       * Se calcula el criterio de convergencia

        compute Cr = abs( %beta(1) - h(1) )
        do i=2,7
        if abs( %beta(i)-h(i) ) > Cr
        compute Cr = %beta(i) - h(i)
        end
        compute It = it + 1

        do i=1,7
        compute h(i) =(1-s)*h(i) +s*%beta(i)
        end

   *  Escribe Opcionalmente la secuencia de valores de los
parametros
*   write H

 end
     If (It < MIT )
     * Se reporta la regresion final
        nlls(frml=f1) L 5 N-4 Resid
     else
     write " El algoritmo no converge en " It " Iteraciones "

end

set q 5 n-4 = exp(z(t))*k(t)**a
set gin 5 n-4 = j1*in(t-3) + j2*in(t-2) +j3*in(t-1) + j4*in(t)
set lq 5 n-4 = log(q(t))
set iq 5 n-4 = gin(t)/q(t)

stat(noprint) lq 500 n-4
compute Stdlq = %variance**.5
stat(noprint) iq 500 n-4
compute Stdiq = %variance**.5
correlate(noprint,number=4) lq 500 n-4 Rhoq
correlate(noprint,number=4) iq 500 n-4 Rhoiq
cross(noprint) lq iq 500 n-4 0 0 Giqq
compute sss = ( Abs(Car(1)-Stdlq) + Abs(Car(2)-Stdiq) +
Abs(Car(3)-Rhoq(2)) $
+ Abs(Car(4)-Rhoq(3)) + Abs(Car(5)-Rhoq(4)) +
Abs(Car(6)-Giqq(1)) $
+ Abs(Car(7)-Rhoiq(2)) + Abs(Car(8)-Rhoiq(3)) +
Abs(Car(9)-Rhoiq(4)) )
```

```
compute suma = suma + sss

end
compute [real] prom = suma/10
write prom
}
end
grparm keylabeling 8
labels q c gin
# 'Producto' 'Consumo' 'Inversion'
graph(header='Figura 8',subheader='Patron dinamico tipico para
el Modelo 2',key=upleft) 3
# q
# c
# gin
```

APENDICE III

Filtrado de Datos

Como ya se mencionó en el capítulo I, en general, salvo casos especiales, los modelos de ciclos reales derivados del modelo de crecimiento neoclásico estocástico no poseen una tendencia, esto es, poseen un estado estacionario, alrededor del cual, una vez que ha sido alcanzado, se dan las fluctuaciones económicas. Esto ha suscitado una serie de debates en cuanto a la forma de quitar la tendencia a los datos o filtrado, así como consideraciones realcionadas a la estacionalidad de los datos. En esta línea encontramos la discusión de si las componentes de tendencia y la cíclica se deben a las mismas causas o a diferentes, si dichas causas tienen un carácter determinista o estocástico. Estudios como los de Lucas (1985) y King, Plosser, Stock y Watson sugieren que las componentes secular y cíclica de la series de tiempo económicas están ligadas inextricablemente.

Algunas consecuencias de estas observaciones para los estudios econométricos son explorados en el contexto de un ejemplo motivado por el análisis de Kydland y Prescott (1982). En particular se argumenta que el remover las componentes estacional y secular no deterministas, en general, sesgará las estimaciones de los parámetros que determinan las propiedades dinámicas de los modelos. Más aún prefiltrar los datos puede conducir a la violación de las restricciones de momentos implicadas por la teoría. Específicamente, representaciones de las horas trabajadas y salarios reales en un vector bivariado autorregresivo (VAR), usando datos ajustados por estacionalidad, no ajustados y datos filtrados usando el procedimiento para quitar tendencia de Kydland y Prescott (1982) indican que el filtrado tiene importantes efectos sobre las interrelaciones dinámicas entre estas series.

Para ilustrar las implicaciones que puede tener la forma en que se hace el filtrado de los datos, considérese un consumidor representativo que elige consumo C_t y ocio l_t para maximizar la utilidad esperada:

$$E_0\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\{C_t^{\delta}(\alpha l_t+(1-\alpha)l_{t-1})^{1-\delta}\}^{\gamma}-1]/\gamma \tag{1}$$

La ecuación de Euler puede expresarse en la relación econométrica:

$$\frac{\delta}{1-\delta}\frac{w_t l_t}{C_t}-\alpha-\beta(1-\alpha)[C_{t+1}/C_t]^{\delta\gamma}[l_{t+1}/l_t]^{(1-\delta)\gamma-1}\equiv u_{t+1}$$

$$con: \qquad E_t\{u_{t+1}\}=0 \tag{2}$$

y si además los consumidores pueden comerciar un activo financiero riesgoso con retorno r_{t+1} entre las fechas t y t+1, tenemos además la siguiente relación econométrica:

$$\beta[C_{t+1}/C_t]^{\delta\gamma-1}[l_{t+1}/l_t]^{(1-\delta)\gamma}\, r_{t+1}-1\equiv v_{t+1}$$

$$con: \qquad E_t\{v_{t+1}\}=0 \tag{3}$$

Las relaciones económetricas anteriores imponen restricciones a las componentes secular, cíclica y estacional de

C_t w_t l_t y r_t. Como punto de partida supóngase que las componentes seculares son tendencias deterministas y las componentes estacionales pueden ser representadas en términos de variables binarias (dummy) estacionales. La independencia de u_{t+1} y de v_{t+1} de las variables en el conjunto de información de los agentes en la fecha t implica que las secuencias u_t y v_t son procesos puramente estocásticos. Consecuentemente, cualquier componente determinista de las secuencias w_t, C_t, r_t y l_t debe ser removida de los lados izquierdos de las ecuaciones (2) y (3).

Es claro que las componentes deterministas en general no se cancelarán de estas reacciones si son adoptadas descomposiciones aditivas de las series de tiempo en componentes de tendencia, cíclicas y estacionales. Por lo tanto, dichas descomposiciones estadísticas aditivas son inconsistentes con el ambiente económico que determina las ecuaciones (2) y (3). En este caso, es admisible una descomposición aditiva de los logaritmos de las variables. En general no se especifica un tendencia para el ocio, puesto que las horas dedicadas al ocio per cápita está acotada superiormente por la restricción de tiempo. También, consistente con muchos modelos de crecimiento y la evidencia estadística se supone que los retornos reales no presentan tendencias.

Cuando hay un crecimiento geométrico y las relaciones econométricas involucran razones de las variables como las de las ecuaciones (2) y (3) no es necesario estimar los coeficientes de tendencia. Relaciones como (2) y (3) son funciones de variables estacionarias solamente. Más generalmente uno típicamente puede remover las tendencias deterministas y luego proceder con la estimación usando los datos sin tendencia sin afectar la consistencia de la estimación de los modelos de ciclos económicos de equilibrio. Las componentes estacionales deterministas pueden ser tratadas de manera análoga[1].

En la práctica, las restricciones entre las componentes deterministas impuestas por la teoría pueden ser demasiado simples pueden ser demasiado simples para capturar las interrelaciones entre las componentes deterministas de los datos. En este caso, los investigadores comúnmente proceden a estudiar los datos sin tendencia y desestacionalizados. Esto supone que las componentes deterministas son determinadas por factores diferentes a los que causan los ciclos económicos ó que estas componentes no distorsionan seriamente las ligas cíclicas.

Por estacionalidad no determinista se entiende un proceso con una función de densidad espectral que es diferente de cero en casi cualquier frecuencia y que tiene picos espectrales pronunciados en las frecuencias estacionales. De manera semejante la componente secular es un proceso con la mayor parte de su densidad concentrada en frecuencias menores a las frecuencias cíclicas, el valor límite entre estos dos rangos de frecuencias sugerido por Kydland y Prescott es $\pi/16$. Su presencia per se no viola las condiciones de momentos $E_{t-1}\{u_t\}=0=E_{t-1}\{v_t\}$ para el modelo descrito antes. Sin embargo, los movimientos seculares o estacionales no deterministas de las variables que determinan u_t y v_t deben satisfacer deben satisfacer las restricciones de autocorrelación por estas restricciones de media condicional. Para modelos que incluyen cambios estacionales en las

[1]K. J. Singleton(1988).

preferencias como el tratado por Miron (1986) este enfoque equivale a desestacionalizar ciertas funciones de las variables del modelo en lugar de desestacionalizar cada serie individualmente.

En la práctica los filtros usados para ajustar por estacionalidad las series de tiempo son filtros de dos lados. El filtro Census X-11 que es el filtro oficial de ajuste estacional es no lineal. Sin embargo es bien aproximado por un filtro lineal.

El trabajar con datos ajustados por estacionalidad atenúa la retroalimentación de los salarios a las horas trabajadas y puede conducir a los investigadores a sobreenfatizar la substitución intertemporal u otros mecanismos de amplificación de la respuesta de las horas a los salarios.

El ajuste estacional atenúa el poder a las frecuencias estacionales. Si el mayor poder de las series que se ajustan es a bajas frecuencias el ajuste puede no tener un efecto importante en las propiedades de las series. Por otro lado, el filtro (1-L), es decir la primera diferencia, amplifica el poder de las altas frecuencias y atenual el poder de las bajas frecuencias, y precisamente, las altas frecuencias muestran la más pronunciada diferencia entre las series ajustadas y no ajustadas. De aquí se sigue que el ajuste estacional distorsionará las tasas de crecimiento de varias series de tiempo económicas mucho más que los niveles estimados.

Singleton (1988) indica que para los datos usados por Kydland y Prescott (1982) los resultados para los datos filtrados con el filtro por ellos propuesto sin ajuste estacional son similares a los obtenidos con los datos no ajustados estacionalmente de las tasas de crecimiento de las horas trabajadas y los salarios. Esto es, filtrando con el filtro de Kydland y Prescott tiene efectos similares a diferenciar los datos. La razón es que ambos, dan esencialmente un peso de cero a las frecuencias muy bajas mientras que amplifican el poder en las frecuencias altas.

Visto desde de otro punto de vista, los hechos estilizados que se pretenden replicar con los modelos de ciclos reales pueden haber sido distorsionados por los procedimientos de filtrado.

Prefiltrar los datos en general conducirá a estimaciones inconsistentes de los parámetros de los modelos de equilibrio de ciclos económicos. Esta inconsistencia puede ser encontrada en la violación de las restricciones de la media condicional impuestas por los problemas de optimización intertemporal de los agentes. En este sentido resulta apropiado el enfoque de información limitada para la estimación y la inferencia.

Los efectos de confusión entre lo que es componente secular y cíclica es una consecuencia de que los choques son transmitidos a los resultados visibles de los procesos de decisión de los agentes por medio de mecanismos dinámicos, tales como el costo de ajuste y tiempo para construir. Más aún patrones cíclicos y de crecimiento pueden ser inducidos endógenamente como una consecuencia de una toma de decisión óptima. Si es así el supuesto de que estos componentes son debidos a distintos fenómenos económicos.

En general podemos pensar que si los choques a la economía presentan alguna tendencia en general se reflejará en las variables endógenas del modelo. Sin embargo, no siempre sucede así, Eichembaum, Hansen y Singleton (1987) muestran las condiciones para las cuales las series de tiempo de consumo, empleo y salario real pueden mostrar tendencias estocásticas aun cuando los choques externos a la economía carezcan de ella. Una condición suficiente para ello es que las series de consumo y salario real estén cointegradas en el sentido de Granger y Engle (1987).

Más aún las implicación más importante de los modelos de crecimiento endógeno es que los agentes pueden inducir tendencias estocásticas en las variables de decisión.

En resumen existen razones para estudiar las componentes cíclicas y seculares de las series económicas simultáneamente. La más importante de ellas es que ambas componentes provienen de las misma decisión de los agentes y en consecuencia las componentes de tendencia de las series de tiempo pueden poseer información valiosa acerca de la estructura subyacente de la economía.

BIBIOGRAFIA

Baxter M. et al, (1990): "Solving the stochastic growth model by a discrete-state-space, euler-equation approach", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 19-21.

Blanchard O. and Fisher S. (1989), Lectures on Macroeconomics, MIT Press.

Brock, William A. and Mirman, Leonard J. (1972): "Optimal economic growth and uncertainty: the discounted case", *Journal of Economic Theory*, 4, 479-513.

Christiano, Lawrence J. (1990): "Solving the stochastic growth model by linear-quadratic approximation and by value-function iteration", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 23-26.

Christiano, Lawrence J. and Eichenbaum, Martin (1992): "Current real-business-cycle theories and aggregate labor market fluctuations", *The American Economic Review*, 82, 430-450.

Coleman, Wilbur J. II (1990): "Solving the stochastic growth model by policy function iteration", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 27-29.

Den Haan, Wouter and Marcet Albert (1990): "Solving the stochastic growth model by parameterizing expectations", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 31-34.

Diebold, Francis X. and Rudebusch, Glenn D. (1994): "Measuring business cycles: a modern perspective", *NBER Working Papers*, No. 4643.

Fisher Ingram, Beth (1990): "Solving the stochastic growth model by backsolving with an expanded shock space", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 37-38.

Gagnon, Joseph E. (1990): "Solving the stochastic growth model by deterministic extended path", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 35-36.

Eichenbaum, M.S. et al (1988): " A time series analysis of representative agent models of consumption and leisure choice under uncertainty", *The Quarterly Journal of Economics*, February, 51-78.

Eichenbaum Martin and Hansen Lars P. (1990): "Estimating models with intertemporal substitution using aggregate time series data", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 53-69.

Eichembaum, Martin (1991): "Real business-cycle theory. Wisdom or whimsy?", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, 607-626.

King, Robert, Plosser, Charles and Rebelo, Sergio T. (1988):

"Production, growth and business cycles: I. The basic neoclassical model", *Journal of Monetary Economics*, 21, 195-232.

King, Robert, Plosser, Charles and Rebelo, Sergio T. (1988): "Production, growth and business cycles: II. New Directions", *Journal of Monetary Economics*, 21, 309-342.

King, Robert G. and Rebelo, Sergio T. (1993): "Low frecuency filtering and real business cycles", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17, 207-231.

Kydland, Finn E. and Prescott, Edward C. (1982): "Time to build and aggregate fluctuations", *Econometrica*, 50, 1345-1370.

Labadie, Pamela (1990) Solving the stochastic growth model by using a recursive mapping based on least squares projection", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 39-40.

Lucas Robert E. (1988), Modelos de Ciclos Económicos, Alianza Universidad.

McGrattan, Ellen R. (1990): "Solving the stochastic growth model by linear quadratic approximation", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 41-44.

Mendoza, Enrique G. (1991): "Real Business Cycles in a Small Open Economy", *The American Economic Review*, 81, 797-818.

Plosser, Charles I. (1989): "Understanding Real Business Cycles", *Journal of Economic Perspectives*, 3, 51-77.

Prescott, Edward C. (1986): "Theory ahead of business cycle measurement", *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, Fall, 9-22.

Quiroz, Jorge A. et al, (1991): "Modelos y realidad: enseñando macroeconomía en los noventa", *Revista de Analisis Económico*, 6, 79-103.

Rotemberg, Julio J. and Woodford, Michael (1994): "Is the business cycle a necessary consequence of stochastic growth?", *NBER Working Papers*, No. 4650.

Ryder, H. E. and Heal G.M. (1973): "Optimal growth with intertemporally dependent preferences", *Review of Economic Studies*, 40, 1-31.

Sala-i-Martin, Xavier "Lecture notes on economic growth (I): Introdcution to the literature and neoclassical models", *NBER Working Papers*, No. 3563.

Sims, Christopher A. (1990) "Solving the stochastic growth model by backsolving with a particular nonlinear form for decision rule", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 45-47.

Singleton, Kenneth J. (1988) "Econometric issues in the analysis of equilibrium business cycle models", *Journal of Monetary Economics*, 21, 361-386.

Stokey, Nancy and Lucas Robert (1989), Recursive Methods in Economics Dynamics, Harvard University Press.

Tauchen, George (1990): "Solving the stochastic growth model by using quadrature methods and value function interations", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 49-51.

Taylor, John B. and Uhlig, Harald (1990): "Solving nonlinear stochastic growth models: a comparison of alternative solution methods", *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 1-17.

Watson, Mark W. (1993): "Measures of fit for calibrated models", *Journal of Political Economy*, 101, 1011-1041.