



**EL COLEGIO DE MÉXICO**  
**CENTRO DE ESTUDIOS ECONÓMICOS**

## **MAESTRÍA EN ECONOMÍA**

**TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PARA OBTENER EL GRADO  
DE MAESTRO EN ECONOMÍA**

**ANÁLISIS DE LA INFLACIÓN EN  
MÉXICO MEDIANTE EL ENFOQUE  
DEL DOMINIO DE LAS FRECUENCIAS**

**MAGDIEL URBINA SOLALINDE**

**PROMOCIÓN 2010-2012**

**ASESOR:**

**DR. JOSÉ MIGUEL TORRES GONZÁLEZ**

**JULIO 2012**

*A mis padres:  
Josefina Solalinde Montalván  
y Rubén Urbina Gómez,  
a quienes les debo todo.*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Contexto histórico del análisis espectral en series de tiempo</b>	<b>5</b>
<b>2. Justificación del uso del análisis espectral en series de tiempo</b>	<b>7</b>
0.1. Teorema de Wiener-Kintchine . . . . .	7
0.2. Ruido y señal . . . . .	13
<b>3. Espectro de series de tiempo de muestras finitas</b>	<b>17</b>
0.2.1. Propiedades del espectro . . . . .	18
0.2.2. Espectro paramétrico de una serie de tiempo . . . . .	19
0.2.3. Espectro no paramétrico de una serie de tiempo . . . . .	20
<b>4. Aplicación empírica</b>	<b>25</b>
0.3. Estimación paramétrica del espectro de la inflación . . . . .	26
0.3.1. Inflación subyacente . . . . .	27
0.3.2. Inflación no subyacente . . . . .	29
0.4. Estimación no paramétrica del espectro de la inflación . . . . .	32
0.4.1. Inflación subyacente . . . . .	32
0.4.2. Inflación no subyacente . . . . .	33
<b>5. Conclusiones</b>	<b>35</b>



# Introducción

El enfoque más utilizado para estudiar las series de tiempo económicas es el denominado “enfoque del dominio del tiempo”, debido a que por medio de éste es posible descomponer las series de tiempo con tendencia determinista en 4 componentes: la tendencia, un componente de largo plazo; el ciclo, un componente regular entorno a la tendencia; la estacionalidad es una variación cíclica predecible; y, por último, el componente irregular que es aleatorio (Pindyk y Rubinfeld, 1998).

Asimismo, cuando las series económicas son generadas por un proceso estocástico, además de ser estacionarias en covarianza, podemos utilizar la metodología Box-Jenkins para analizar su estructura de correlación. Para ello, se estima un modelo denominado Proceso Autoregresivo Integrado de Media Móvil (ARIMA) que está basado en ecuaciones en diferencias con el cual se busca capturar la dinámica de la serie. De ser correcta su formulación, el modelo se valida para poder hacer pronósticos<sup>1</sup>.

El “enfoque del dominio de la frecuencia” ha sido igualmente útil para analizar las series de tiempo. El uso de este enfoque surgió en los años 50 y 60 debido al creciente interés por parte de los economistas en estudiar el ciclo económico<sup>2</sup> (C. Granger, 1997). Mediante el análisis de Fourier, el “enfoque del dominio de la frecuencia” permite descomponer una señal periódica en un número finito o infinito de frecuencias, al igual que la descomposición de un haz de luz blanca en los colores de su espectro cuando ésta atraviesa un prisma.

En economía se puede hacer un símil con el fenómeno físico de la descomposición de la luz como, por ejemplo, la posibilidad de descomponer la inflación medida por el Índice General de Precios al Consumidor (INPC) en sus dos componentes básicos, la inflación

---

<sup>1</sup>Para mayor detalle sobre la estimación de modelos ARIMA(p,d,q) mediante la metodología Box-Jenkins (ver Enders, 2004) y (Hamilton, 1994).

<sup>2</sup>Burns y Mitchel (1946) lo definen como un ciclo que consiste de expansiones que tienen lugar aproximadamente a la vez en muchas actividades económicas, seguidas por recesiones, contracciones y recuperaciones igualmente generales que confluyen en la fase de expansión del ciclo siguiente.

subyacente y la no subyacente. Para poder utilizar este “nuevo” enfoque en economía es necesario sustentar la relación entre la función de autocorrelación de una serie de tiempo con la densidad espectral<sup>3</sup>.

El teorema que sustenta esto es el Teorema de Wiener-Kintchine, en el cual se utiliza la transformada inversa de Fourier. En la literatura revisada sobre el análisis de series de tiempo económicas a través de la utilización de este enfoque no se presenta la demostración de este teorema (Brillinger, 1981), (Brockwell y Davis, 1987), (Harvey, 1993) y (Hamilton, 1994), con excepción de Prietsley (1981) que si lo hace.

Norbert Wiener (1961) discute 3 enfoques para estudiar las series de tiempo: mediante la teoría estadística, el enfoque de la teoría de la información y el enfoque de ingeniería eléctrica. En este trabajo se probará el teorema de Wiener-Kintchine utilizando elementos de la teoría de la información y la ingeniería eléctrica<sup>4</sup>.

Priestley (1981) sigue el trabajo realizado por Bartlett (1955), quien usa conjuntos aleatorios cerrados y estima covarianzas vía el espacio de frecuencias (ver también Koch, Ohster y Schladitz, 2002). Creemos que nuestra prueba si bien sacrifica formalismo, es superior en intuición.

También se realizará una aplicación empírica de este teorema para poder encontrar las frecuencias asociadas a la inflación subyacente y a la no subyacente en México, mediante el análisis del espectro y el periodograma muestral inherentes a dichas series<sup>5</sup>. Trabajo que, hasta donde sabemos, no se ha realizado para este país.

De igual forma, en otros países es posible encontrar trabajos similares al que nos proponemos realizar: Barrón y Villegas (2008) calculan, entre otras cosas, el periodograma muestral para “diferenciar entre el componente tendencial y ciclo”, separando las frecuencias bajas y altas, respectivamente, para la serie de la inflación mensual anual en Bolivia para el periodo que va de enero de 1993 a diciembre de 2006; Araújo y Fiorencio (2005) estiman el espectro de dos mediciones de la inflación subyacente, para luego estudiar la relación entre ellas, obtenidas del Índice de Precios al Consumidor Extendido (Extended Consumer Price Index, IPCA) en Brasil para el periodo que va de agosto de 1994 a junio de 2002; D’Amanto, Garegnani y Sotes (2008) estudian la persistencia de la inflación en Argentina usando el análisis en el dominio del tiempo y el de la frecuencia para el periodo que va de 1980 a 2007 y Ruch y Bester (2011) construyen varias mediciones de la

---

<sup>3</sup>La densidad espectral es una función que nos da la distribución de una serie de tiempo sobre las distintas frecuencias de la que está formada.

<sup>4</sup>Se desarrollará esta prueba siguiendo muy de cerca a Huang (2001).

<sup>5</sup>Bajo este enfoque, es posible extraer las frecuencias bajas y altas de las series utilizando filtros, (ver Hodrick y Prescott, 1997) y (Baxter y King, 1999).

inflación subyacente anual trimestral usando análisis espectral en el periodo comprendido entre 1946 y 2001 para Sudáfrica.

Para alcanzar los objetivos propuestos, la presente tesis está organizada de la siguiente manera: en la sección 1, se da una breve semblanza sobre cómo surgió este enfoque; en la sección 2, se presenta una prueba del Teorema de Wiener-Kintchine, además de obtener el espectro asociado con una serie de tiempo que se comporta como ruido blanco y el espectro de una serie de tiempo con componente periodico; en la sección 3, se muestran las propiedades del espectro, así como la formulación de dicho espectro en forma paramétrica y no paramétrica; los desarrollos que se obtienen en las secciones 2 y 3 se utilizan para encontrar las frecuencias asociadas a la inflación subyacente y no subyacente en México, esto se presenta en la sección 4; por último, en la sección 5 se desarrollan las conclusiones.

Las principales contribuciones de este trabajo han sido introducir a la literatura económica una prueba de Teorema de Wiener-Kintchine usando elementos de teoría de la información y de ingeniería eléctrica, prueba que es muy conocida en la literatura de mecánica estadística. En la parte empírica *encontramos* que en México a la inflación subyacente la podemos asociar con componentes cíclicos de baja frecuencia, mientras que a la inflación no subyacente la podemos asociar con componentes cíclicos de alta frecuencia<sup>6</sup>. Si se logra identificar de qué componentes proviene algún choque sobre los precios, es posible que el Banco Central pueda saber cómo responder ante esos choques (Torres, 2003).

---

<sup>6</sup>Dados los componentes de los que está compuesta cada una, sus definiciones se presentarán en la parte empírica.





# 1. Contexto histórico del análisis espectral en series de tiempo

En 1827, el botánico inglés Robert Brown observó que las partículas de polen suspendidas en un fluido siguen movimientos aleatorios, conocido como movimiento browniano. La causa del por qué sucede esto es debido a que las moléculas microscópicas están sometidas a choques estocásticos independientes. Desde 1905 el movimiento browniano se ha tratado estadísticamente en la obras de Einstein y Smoluchowsky<sup>7</sup>.

Principalmente a partir de los trabajos de Kintchine y Kolmogorov, el concepto de trayectoria ha evolucionado a una función aleatoria dependiente de una variable estocástica. Para llegar a ello, Kintchine se apoyó en la representación espectral de la función de correlación.

Sir Arthur Shuster<sup>8</sup> dedujo un método que resuelve cómo encontrar el periodo asociado a series físicas observadas, método que denominó *periodograma*<sup>9</sup> (Urbelz, 1978) con el cual estimó el periodo asociado al ciclo solar.

Basados en el descubrimiento de Newton de que la luz al incidir sobre un prisma se descomponía en el espectro de colores, visibles e invisibles, surgieron ideas importantes. Una de ellas fue que ciertos hechos experimentales pueden descomponerse por medio de oscilaciones propias. Estos fenómenos se estudiaron por medio de desarrollos en series de Fourier.

En 1911 Herglotz<sup>10</sup> dedujo la representación de los coeficientes de correlaciones y,

---

<sup>7</sup>Einstein estudió el movimiento browniano en su artículo “On the Motion of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid, as Required by the Molecular Kinetic Theory of Heat” publicado en 1905, mientras que Smoluchowsky lo estudió en su artículo “The Kinetic Theory of Brownian Molecular Motion and Suspensions” publicado en 1906.

<sup>8</sup>Físico alemán-británico que trabajó en espectroscopía, radiografía, óptica y por su aplicación del análisis armónico a la física.

<sup>9</sup>El periodograma es un método de análisis que tiene por finalidad descubrir componentes periódicos de las series de tiempo.

<sup>10</sup>Matemático alemán que trabajó en teoría de la relatividad y sismología.

en consecuencia, la función de covarianza cuando las series son discretas. Después, en 1930 Kolmogorov y Wiener empezaron a estudiar la predicción y el filtraje de procesos estocásticos mediante el uso de funciones de densidades espectrales y de covarianzas. En 1934 Kintchine define la estacionariedad de segundo orden demostrando sus propiedades, con ella pudo encontrar la representación espectral para la función de covarianza de un proceso estocástico estacionario de parámetro  $t$  continuo.

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega) \quad (1)$$

Donde:  $B(t)$  es la función de covarianza de un proceso estocástico y  $F(\omega)$  es una función monótona no decreciente denominada distribución espectral. Ambas funciones se relacionan mediante la transformada inversa de Fourier, razón por la cual a la relación descrita por la Ecuación (1) se le conoce como el Teorema de Wiener-Kintchine.

Los avances técnicos en los años 50 del siglo XX, particularmente en telecomunicaciones, mejoraron el cálculo de las señales de radar mediante la transformada de Fourier discreta, la cual permitió transformar o procesar de una forma más sencilla las señales digitales (ver Oppenheim y Schafer, 1975).

A partir del estudio de la distribución espectral se inicia una nueva metodología para el estudio de las series de tiempo físicas, es decir, se empieza a estudiar las partes fundamentales del espectro que más influyen en el comportamiento de dichas series. Asimismo, se empieza a difundir la estimación del espectro en problemas físicos como la dinámica de los aviones, en ingeniería en comunicaciones, además de presentarse desarrollos teóricos mediante simposios impulsados principalmente por John W. Tukey<sup>11</sup>.

Mientras Tukey hacia desarrollos teóricos en el análisis espectral en series físicas, sus ayudantes C. Granger y M. Hatanaka empezaron a usar el análisis de Fourier en series económicas.

En 1963 Granger escribió el artículo *The Typical Spectral Shape of an Economic Variable*, el cual apareció en *Econometrica* en 1966. En 1964, junto con Hatanaka, publicó el libro "Spectral Analysis of Economic Time Series". Estas publicaciones resultaron influyentes en la adopción de los nuevos métodos en economía.

---

<sup>11</sup> Estadístico estadounidense 1915-2000 que, entre otras cosas, desarrolló el algoritmo Cooley-Tukey para el cálculo de la transformada rápida de Fourier.

## 2. Justificación del uso del análisis espectral en series de tiempo

### 0.1. Teorema de Wiener-Kintchine

Una serie de tiempo es una variable estocástica  $\nu(t)$  que depende del tiempo<sup>12</sup>. Podemos pensar a  $\nu(t)$  como la velocidad de una partícula Browniana de la cual no tenemos un comportamiento definido, pero si podemos tener un ensamble de trayectorias de dicho proceso. Figura (1)

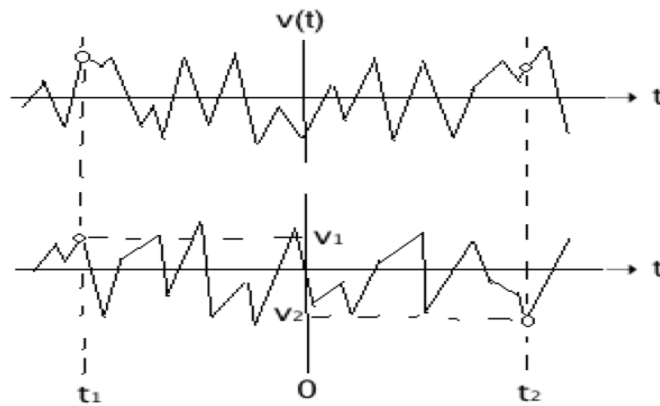


Figura 1: Un ensamble de trayectorias estocásticas.

Los diversos registros de  $\nu(t)$  describen la evolución en el tiempo de sistemas idénticamente constituidos bajo la acción de fuerzas aleatorias en el ambiente. Podemos ver que hay una distribución de los valores de  $\nu$  en cada momento, sin embargo, esto no describe a la serie por completo. Necesitamos especificar las correlaciones en el tiempo especificando

<sup>12</sup>Para la definición de una serie de tiempo y el concepto de ensamble estacionario, se siguió muy de cerca a Huang (2001: 252-273).

una jerarquía en las distribuciones de probabilidad. Por ejemplo,  $W_1(1)$  con  $1=[\nu_1, t_1]$  es la probabilidad de que  $\nu$  tenga un valor entre  $\nu_1$  y  $\nu_1 + d\nu_1$  en  $t_1$ .

Sea  $W_k(1, 2, \dots, k)d\nu_1 d\nu_2 \dots d\nu_k$  la probabilidad conjunta de que  $\nu$  tenga un valor entre  $\nu_1$  y  $\nu_1 + d\nu_1$  en  $t_1$ , entre  $\nu_2$  y  $\nu_2 + d\nu_2$  en  $t_2, \dots$ , y entre  $\nu_k$  y  $\nu_k + d\nu_k$  en  $t_k$ <sup>13</sup>.

La n-ésima probabilidad conjunta debe implicar que para la menor  $W_k$  con  $k < n$ :

$$W_k(1, 2, \dots, k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_{k+1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_n(1, 2, \dots, n) d\nu_n \quad (2)$$

En principio podemos medir estas distribuciones a partir de registros como los de la Figura (1) si nos dan una muestra suficientemente grande. Por ejemplo, para encontrar  $W_2(1, 2)$  seguimos las líneas punteadas en  $t_1$  y  $t_2$  en la Figura (1) y encontramos la fracción de los registros para los cuales  $\nu(t_1) = \nu_1$  y  $\nu(t_2) = \nu_2$ .

Restringiremos nuestra atención a ensambles estacionarios para los cuales las distribuciones de probabilidad son invariantes bajo traslaciones temporales. Lo cual significa que  $W_1(1)$  es independiente de  $t_1$ , y  $W_2$  depende solamente de  $t_1 - t_2$ .

Para un ensamble estacionario, el promedio a lo largo del tiempo es equivalente al promedio de los ensambles<sup>14</sup>. Figura (2)

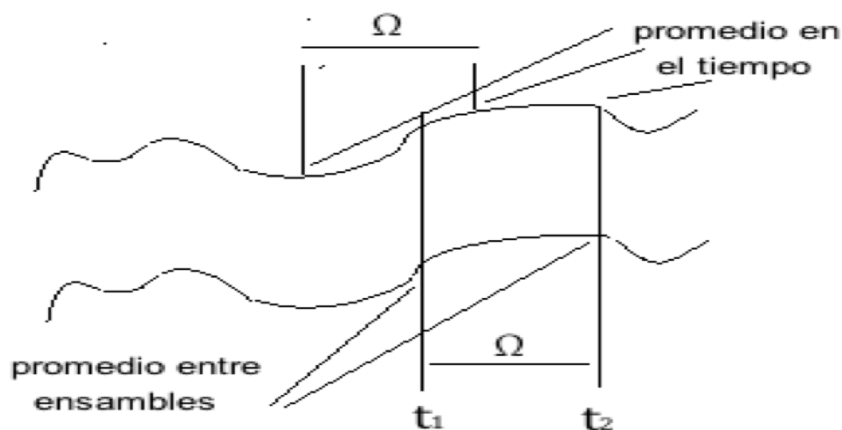


Figura 2: El promedio en el tiempo, que es la cantidad promediada de un solo sistema durante un intervalo de tiempo, es equivalente al promedio de ensambles que es la cantidad promediada de muchos sistemas idénticos en un momento determinado para un ensamble estacionario.

Hay una relación intuitiva entre espectro y la correlación entre dos puntos: “cuando se interpone un prisma en la trayectoria de un haz de luz blanca éste descompone, en

<sup>13</sup>  $W_k$  debe ser positiva y simétrica bajo el intercambio de  $[\nu_i, t_i]$  y  $[t_j, \nu_j]$ .

<sup>14</sup> Se excluyen casos de medida cero, ya que no nos son útiles los casos en que la equivalencia sea entre casos con probabilidad cero.

un punto, la variación temporal de la intensidad eléctrica en sus componentes armónicos y los separa en su espectro. Dado que la velocidad de la luz es la misma para todas las longitudes de onda, el análisis de variación temporal es exactamente equivalente a un análisis armónico de la variación espacial de la intensidad eléctrica a lo largo del haz” (Taylor, 1938: 476).

Esta idea puede ser llevada a conceptos económicos, ya que podríamos pensar al haz de luz blanca como la inflación general obtenida del Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), la cual puede ser descompuesta a través del análisis de Fourier en la inflación subyacente y la no subyacente, a las cuales se les asociarían ciertas frecuencias. En particular, se pensaría que la inflación subyacente estaría “cargada” de frecuencias bajas, mientras que la inflación no subyacente estaría “cargada” de frecuencias altas.

En el estudio de la economía de largo y corto plazo<sup>15</sup>, es decir, en el estudio de la teoría del crecimiento económico y la teoría de los ciclos económicos, si a la serie del PIB le extraemos sus componentes de baja frecuencia los podemos asociar con su comportamiento de largo plazo, y si le extraemos sus componentes de alta frecuencia los podemos asociar con su comportamiento cíclico.

A continuación se ilustra gráficamente la idea tomada de Taylor (1938):

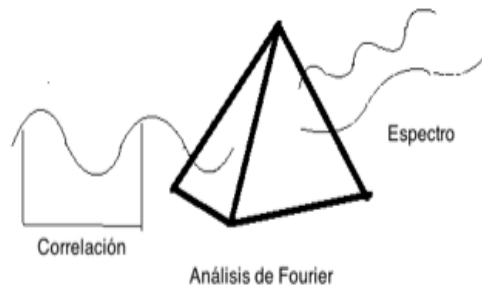


Figura 3: El análisis espectral de un flujo de eventos puede revelar las correlaciones a lo largo del flujo. Para un proceso estacionario, la correlación en dos diferentes lugares en el mismo tiempo es equivalente a la correlación del mismo lugar en tiempos diferentes.

En 1930 Wiener encontró que la función de correlación y el espectro estaban relacionados a través de la transformada inversa de Fourier, relación que fue redescubierta por Kintchine en 1934. Razón por la cual esta relación es conocida como el *Teorema de Wiener – Kintchine* el cual se enuncia a continuación:

**Teorema:** Para que  $\gamma(\nu(t), \nu(0))$  sea la función de correlación de algún proceso estocástico estacionario,  $\nu_t$ , debe existir una función  $S(\omega)$ , con las propiedades de una función de distribución sobre  $(-\infty, \infty)$ , tal que, para todo  $t$ ,  $\gamma(\nu(t), \nu(0))$  pueda expresarse

<sup>15</sup>Como lo expone G. Mankiw en su famoso libro de Macroeconomía.

de la siguiente forma:

$$\gamma(\nu(t), \nu(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

**Prueba:**<sup>16</sup>

Ilustremos matemáticamente la idea de la descomposición de la luz<sup>17</sup> en su espectro. Podemos empezar con la expansión de Fourier<sup>18</sup> siguiente:

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nu_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega \quad (3)$$

Con su transformada inversa:

$$\nu_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \nu(t) e^{i\omega t} dt \quad (4)$$

Como  $\nu(t)$  es real, se debe cumplir que  $\nu_{-\omega} = \bar{\nu}_{\omega}$ <sup>19</sup>.

Lo cual se deduce de:

$$\begin{aligned} & (\nu_{-\omega} e^{i\omega t} + \nu_{\omega} e^{-i\omega t}) = \\ & = \cos(\omega t) [\nu_{-\omega}^R + \nu_{\omega}^R] + i \sin(\omega t) [i\nu_{-\omega}^I - i\nu_{\omega}^I] + \cos(\omega t) [i\nu_{-\omega}^I + i\nu_{\omega}^I] + i \sin(\omega t) [\nu_{-\omega}^R - \nu_{\omega}^R] \\ & = \cos(\omega t) [\nu_{-\omega}^R + \nu_{\omega}^R] + \sin(\omega t) [-\nu_{-\omega}^I + \nu_{\omega}^I] + \cos(\omega t) [i\nu_{-\omega}^I + i\nu_{\omega}^I] + i \sin(\omega t) [\nu_{-\omega}^R - \nu_{\omega}^R] \end{aligned}$$

Y como queremos la parte real entonces:

$$\cos(\omega t) [i\nu_{-\omega}^I + i\nu_{\omega}^I] + i \sin(\omega t) [\nu_{-\omega}^R - \nu_{\omega}^R] = 0$$

Lo cual se cumple cuando:

$$\begin{aligned} \nu_{-\omega}^R &= \nu_{\omega}^R \text{ y} \\ i\nu_{-\omega}^I &= -i\nu_{\omega}^I \end{aligned}$$

Si reescribimos lo anterior tenemos que:

$$\nu_{-\omega}^R + i\nu_{-\omega}^I = \nu_{\omega}^R - i\nu_{\omega}^I$$

Y obtenemos que:

$$\nu_{-\omega} = \bar{\nu}_{\omega}$$

Veamos qué significa que la función de correlación  $\gamma(\nu(t_1), \nu(t_2))$  solo dependa de  $t_1 - t_2$  para un ensamble estacionario.

<sup>16</sup>Esta prueba seguirá muy de cerca el desarrollo que se presenta en Huang (2001: 252-273).

<sup>17</sup>O de cualquier serie económica estacionaria o que pueda hacerse estacionaria.

<sup>18</sup>Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos. Las series de Fourier son una herramienta matemática que permite analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones senoidales más simples.

<sup>19</sup>Con esto aseguramos trabajar solo con partes reales dado que la función de correlación es real.

$$\gamma(\nu(t_1), \nu(t_2)) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1 t_1 - i\omega_2 t_2} d\omega_1 d\omega_2 \quad (5)$$

Si  $t_1 = T + \frac{\tau}{2}$  y  $t_2 = T - \frac{\tau}{2}$  tenemos que:

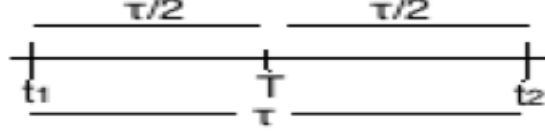


Figura 4:  $\tau$  es la separación temporal entre dos puntos en el tiempo con lo cual podemos medir el grado de correlación entre dos puntos en la serie temporal,  $\tau$  puede variar con lo cual podríamos caracterizar a la serie de tiempo.

$$\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 = \omega_1 (T + \frac{\tau}{2}) + \omega_2 (T - \frac{\tau}{2}) = \omega_1 T + \omega_1 \frac{\tau}{2} + \omega_2 T - \omega_2 \frac{\tau}{2}$$

Y reordenando se tiene que:

$$\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 = (\omega_1 + \omega_2) T + (\omega_1 - \omega_2) \frac{\tau}{2}$$

Y sustituyendo en la Ecuación (5) obtenemos que:

$$\gamma(\nu(t_1), \nu(t_2)) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2) T - (\omega_1 - \omega_2) \frac{\tau}{2}} d\omega_1 d\omega_2 \quad (6)$$

El lado derecho de la Ecuación (6) debe ser independiente de T para lo cual se debe de cumplir que  $\gamma(\omega_1, \omega_2) = 0$  o que  $\omega_1 + \omega_2 = 0$ . Cuando  $\gamma(\omega_1, \omega_2) = 0$  entonces  $\gamma(\nu(t_1), \nu(t_2)) = 0$ , resultado que no nos sirve para nuestro propósito.

Cuando  $\omega_1 = -\omega_2$ , la distribución de densidad en la ecuación (6) es una masa unidad concentrada en el punto  $\omega_1 + \omega_2 = 0$  tenemos que:

$$\gamma(\omega_1, \omega_2) = 2\pi S(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2)$$

Donde  $\delta(\omega_1 + \omega_2)$  es la Delta de Dirac, la cual es una función generalizada<sup>20</sup> definida como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$$

Y en particular para  $a = \omega_1 + \omega_2 = 0$  tenemos que:

---

<sup>20</sup>En teoría de distribuciones se demuestra que pueden definirse un tipo de funciones generalizadas o distribuciones tales que permiten tratar rigurosamente problemas en que aparece una derivada discontinua o en funciones para las cuales nos es posible encontrar la primitiva de una integral por ser discontinua como la delta de Dirac. Para mayor información sobre funciones generalizadas y su aplicación al análisis armónico ver Gelfand y Shilov (1964) y Gelfand y Vilenkin (1964), respectivamente.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Por lo cual tenemos que:

$$\gamma(\omega_1, \omega_2) = 2\pi S(\omega_1)$$

Y  $S(\omega)$  es el espectro, el cual se supone real con la propiedad de que  $S(\omega) = S(-\omega)$ <sup>21</sup>.

Ahora, reescribiendo la Ecuación (5) dado que  $\omega_1 = -\omega_2 = \omega$  obtenemos que:

$$\gamma(\nu(t_1), \nu(t_2)) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi S(\omega) e^{-i\omega t_1 - i(-\omega)t_2} d\omega$$

y

$$\gamma(\nu(t_1), \nu(t_2)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega(t_1 - t_2)} d\omega$$

Si  $t_1 = t$  y  $t_2 = 0$  la función de correlación es:

$$\gamma(\nu(t), \nu(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \blacksquare \quad (7)$$

La ecuación 7 también puede ser representada como:

$$\gamma(\nu(t), \nu(0)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$

A partir del resultado obtenido en 7, para el caso particular en que  $t_1 = t_2 = 0$  obtenemos la varianza:

$$\gamma(\nu(0), \nu(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (8)$$

Éste es un resultado importante en la teoría espectral, ya que la ecuación (8) no dice cuanto pesan las frecuencias en la varianza.

Utilizando la transformada inversa de Fourier tenemos que el espectro será:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\nu(t), \nu(0)) e^{i\omega t} dt$$

Así, el espectro y la función de correlación son transformadas de Fourier entre si.

---

<sup>21</sup>Esta propiedad nos permite trabajar también con frecuencias negativas.

## 0.2. Ruido y señal

Dentro de las series de tiempo hay casos sobresalientes que se comportan de forma especial. Por ejemplo, algunas series se comportan como ruido y hay otras que pueden ser descritas mediante componentes cíclicos. Dado las particularidades de estas series es relevante estudiarlas<sup>22</sup>.

### Ruido

Decimos que una serie es ruido cuando todos sus componentes de Fourier son variables estocásticas con media cero.

Si  $\nu(t)$  no contiene componentes periodicos entonces la función de correlación tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Como ejemplo, supongamos que la función de correlación  $G(t)$  decae exponencialmente de la siguiente forma:

$$G(t) = \gamma(\nu(t), \nu(0)) = Ce^{-\gamma|t|}$$

Y su espectro será:

$$S(\omega) = 2C \int_0^{\infty} e^{-\gamma|t|} \cos(\omega t) dt =$$

Integrando por partes:

$$S(\omega) = 2C \int_0^{\infty} e^{-\gamma|t|} \cos(\omega t) dt = \frac{2C}{\omega} \int_0^{\infty} e^{-\gamma|t|} \sin(\omega t) dt$$

Nuevamente integrando por partes tenemos que:

$$\frac{2C}{\omega} \int_0^{\infty} e^{-\gamma|t|} \sin(\omega t) dt = \frac{2C\gamma}{\omega^2} - \frac{2C\gamma^2}{\omega^2} \int_0^{\infty} e^{-\gamma|t|} \cos(\omega t) dt$$

Y

$$2C \int_0^{\infty} e^{-\gamma|t|} \cos(\omega t) dt = \frac{2C\gamma}{\omega^2} - \frac{2C\gamma^2}{\omega^2} \int_0^{\infty} e^{-\gamma|t|} \cos(\omega t) dt$$

---

<sup>22</sup>Las definiciones de ruido y señal fueron tomados de Huang (2001: 252-273). Los ejercicios para encontrar el espectro para una serie que es ruido blanco y de otra serie que tiene un componente periodico también están propuestos en Huang (2001: 252-273) y fueron desarrollados por cuenta propia.

Así, el espectro de una serie que presenta una función de correlación que decae exponencialmente será:

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma|t|} \cos(\omega t) dt = \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (9)$$

Y cuando  $\gamma \rightarrow \infty$  el espectro se aproxima a un ruido blanco.

### Señal

Definimos a una señal como una serie de tiempo  $\nu(t)$  que tiene un componente periódico definido.

Supongamos que  $\nu(t)$  tiene un componente periódico de la siguiente forma:

$$\nu(t) = u(t) + A \text{sen}(\omega_0 t)$$

Donde  $u(t)$  es un componente no periódico.

Suponiendo que:

$$\gamma(u(t), u(0)) = C e^{-\gamma|t|}$$

Tenemos que la función de autocorrelación es:

$$G(t) = C e^{-\gamma|t|} + A^2 \text{sen}(\omega_0 t)$$

Y su espectro será:

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma|t|} \cos(\omega t) dt + A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(\omega_0) e^{i\omega t} dt$$

Ya calculamos la primera parte del lado derecho, falta la segunda parte que se obtiene aplicando la delta de Dirac:

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(\omega_0) e^{i\omega t} dt = 2\pi \frac{A^2}{2} i \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega + \omega_0)t} dt \right]$$

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(\omega_0) e^{i\omega t} dt = \pi A^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Como:  $\delta(\omega + \omega_0) = -\delta(\omega - \omega_0)$

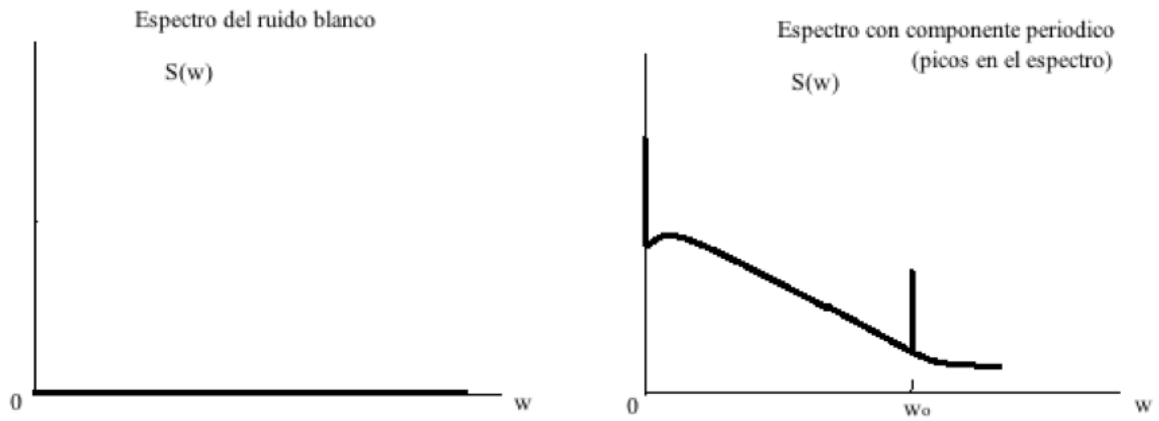
Obtenemos que:

$$A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(\omega_0) e^{i\omega t} dt = 2\pi A^2 \delta(\omega - \omega_0)$$

Por lo que el espectro de la función de correlación con componente periódico representada por  $G(t) = C e^{-\gamma|t|} + A^2 \text{sen}(\omega_0 t)$  es el siguiente:

$$S(\omega) = \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} + 2\pi A^2 \delta(\omega - \omega_0) \quad (10)$$

A continuación se representan el espectro de un proceso ruido blanco (9) y de un proceso con componente periodico (10).





### 3. Espectro de series de tiempo de muestras finitas

Dado que modelamos series económicas finitas, vamos a obtener la varianza a través del espectro de las series para poder analizar la contribución de las frecuencias a dicha varianza. También se van a presentar las propiedades del espectro<sup>23</sup>, las cuales serán útiles para llevar a cabo la estimación paramétrica y no paramétrica del espectro de las series de tiempo<sup>24</sup>.

El espectro de  $y_t$  se define como:

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j} = \frac{1}{2\pi} \gamma C e^{-i\omega} \quad , i = \sqrt{-1}$$

Utilizando la transformada de Fourier tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} S_y(\omega) e^{i\omega k} d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j} e^{i\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(k-j)} d\omega \right] \end{aligned}$$

$$\text{Donde } \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(k-j)} d\omega \right] = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k - j \neq 0, \text{ entero} \end{cases}$$

---

<sup>23</sup>Para obtener la varianza a través del espectro de las series de tiempo así como las propiedades del espectro se siguieron los apuntes del profesor James Stock del curso impartido en la Universidad de Harvard en el otoño de 2003.

<sup>24</sup>Para un desarrollo completo de la representación paramétrica y no paramétrica del espectro ver Hamilton (1994).

Por lo que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_y(\omega) e^{i\omega k} d\omega = \gamma_k \quad (11)$$

La Ecuación (11) significa que a partir del espectro podemos encontrar las covarianzas que describen una serie de tiempo. Sin embargo, el resultado más importante que se deduce de la Ecuación (11) es que si  $k=0$  obtenemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_y d\omega = \gamma_0$$

Donde  $\gamma_0$  es la varianza de la serie de tiempo, lo cual implica que si encontramos su espectro, que depende de las frecuencias, podemos encontrar la frecuencia que más contribuye a la varianza. Y a partir de esta frecuencia podemos encontrar el periodo que caracteriza a la serie de tiempo analizada.

### 0.2.1. Propiedades del espectro

El espectro de  $Y_t$  tiene las siguientes propiedades:

**Propiedad 1:** Si  $Y_t = b(L)X_t$  entonces  $S_y(\omega) = \|b(e^{-i\omega})\|^2 \Delta x(\omega)$

**Prueba:**

Sea  $X_t$  un proceso estocástico estacionario de segundo orden.

Si  $X_t = C(L)\varepsilon_t$

entonces  $Y_t = b(L)C(L)\varepsilon_t$

$$\Delta Y(\omega) = \|b(e^{i\omega})C(e^{i\omega})\|^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$$

$$\Delta Y(\omega) = \|b(e^{i\omega})\|^2 \|C(e^{i\omega})\|^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$$

Por lo que:

$$\Delta Y(\omega) = \|b(e^{i\omega})\|^2 \Delta x(\omega) \blacksquare$$

**Propiedad 2**

Si  $Y_t = X_t + Z_t$ ,  $cov(X_t, Z_t) = 0$ ,  $\forall t, k$  entonces  $\Delta Y(\omega) = \Delta X(\omega) + \Delta Z(\omega)$

**Prueba:**

$$\Delta Y(\omega) = cov(Y, Y_{t-j}) = cov(X_t + Z_t, X_{t-j} + Z_{t-j}) = cov(X_t, X_{t-j}) + cov(Z_t + Z_{t-j})$$

Por lo que

$$\Delta Y(\omega) = \Delta X(\omega) + \Delta Z(\omega) \blacksquare$$

### Propiedad 3

Dado que:

$\cos(\omega) = \cos(-\omega)$  entonces

$\Delta Y(\omega) = \Delta Y(-\omega)$ , para  $0 \leq \omega \leq \pi$

$\Delta Y(\omega + 2\pi) = \Delta Y(\omega)$ , para  $0 \leq \omega \leq \pi$

Entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j} e^{-i2\omega\pi j}$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \Delta Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j} = \frac{1}{2\pi} [\gamma_0 + \gamma_1 e^{-i\omega} + \gamma_{-1} e^{i\omega} + \gamma_2 e^{-2i\omega} + \gamma_{-2} e^{2i\omega} + \dots] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \gamma_0 + 2\gamma_1 \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} + 2\gamma_2 \frac{e^{2i\omega} + e^{-2i\omega}}{2} + \dots \right] = \frac{1}{2\pi} [\gamma_0 + 2\gamma_1 \cos(\omega) + 2\gamma_2 \cos(2\omega) + \dots] \end{aligned}$$

y

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i(\omega+2\pi)j} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-i\omega j} e^{-i2\omega\pi j} \blacksquare$$

### 0.2.2. Espectro paramétrico de una serie de tiempo

En general para un proceso ARMA(p,q),  $Y_t$  puede escribirse como:

$$\phi(L)Y_t = \theta(L)$$

y si  $Y_t$  es estacionario, su espectro estará dado por:

$$S_y(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1 e^{-i\omega} + \theta_2 e^{-2i\omega} + \dots + \theta_q e^{-iq\omega})(1 + \theta_1 e^{i\omega} + \theta_2 e^{2i\omega} + \dots + \theta_q e^{iq\omega})}{2\pi (1 - \phi_1 e^{-i\omega} - \phi_2 e^{-2i\omega} - \dots - \phi_p e^{-ip\omega})(1 - \phi_1 e^{i\omega} - \phi_2 e^{2i\omega} - \dots - \phi_p e^{ip\omega})} \quad (12)$$



Con este podemos encontrar la densidad espectral de la serie  $Y_t$ , y con ello conocer cómo se distribuyen las frecuencias y el peso de éstas en la varianza de la serie.

Como se mencionó, para encontrar el espectro de las series de tiempo hay que encontrar un modelo que nos describa el comportamiento de dichas series. Para ello, lo más estándar es utilizar la metodología Box-Jenkins, que consiste básicamente en la identificación del modelo, su estimación, su diagnóstico y, por último, hacer pronósticos<sup>25</sup>.

Usualmente se encuentran problemas en cada etapa de esta metodología<sup>26</sup>, debido a ello al estimar el espectro de las series de tiempo éste no nos proporcionaría las frecuencias que describirían de la mejor manera a dichas series. Para evitar dichos problemas, a continuación se presenta una estimación no paramétrica del espectro de las series de tiempo denominado **periodograma muestral**.

### 0.2.3. Espectro no paramétrico de una serie de tiempo

Existe un resultado general conocido como **teorema de representación espectral** que establece lo siguiente:

Para cualquier frecuencia fija  $\omega \in [0, \pi]$  se definen variables aleatorias  $\alpha(\omega)$  y  $\delta(\omega)$ , con las cuales es posible escribir un proceso estacionario,  $Y_t$ , con covarianzas absolutamente sumables como:

$$Y_t = \mu + \int_0^\pi [\alpha(\omega) \cdot \cos(\omega t) + \delta(\omega) \cdot \sin(\omega t)] d\omega$$

Y los procesos aleatorios representados por  $\alpha(\cdot)$  y  $\delta(\cdot)$  tienen media cero, además de la característica de que para cualquier frecuencia  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \pi$ , la variable  $\int_{\omega_1}^{\omega_2} \alpha(\omega) d\omega$  no está correlacionada con  $\int_{\omega_3}^{\omega_4} \alpha(\omega) d\omega$  y la variable  $\int_{\omega_1}^{\omega_2} \delta(\omega) d\omega$  no está correlacionada con  $\int_{\omega_3}^{\omega_4} \delta(\omega) d\omega$ , mientras que para  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$  y  $0 < \omega_3 < \omega_4 < \pi$  la variable  $\int_{\omega_1}^{\omega_2} \alpha(\omega) d\omega$  no está correlacionada con  $\int_{\omega_3}^{\omega_4} \delta(\omega) d\omega$ .

Así, a cualquier proceso estacionario se le puede calcular la porción de la varianza de  $Y_t$ , que se debe a ciclos con frecuencia menor o igual a algún valor específico de  $\omega$ , cuya magnitud estaría dada por:

$$2 \int_0^{\omega_1} S_Y(\omega) d\omega = \gamma_0 \quad (13)$$

<sup>25</sup>En el presente trabajo se necesita pronosticar.

<sup>26</sup>Es posible encontrar problemas en la etapa de la validación de los modelos identificados y estimados mediante la metodología Box-Jenkins. También es posible seguir teniendo problemas a pesar de encontrar un buen modelo, ya que dicho modelo podría no ser el modelo “verdadero”.

A continuación se presenta la versión finita del **Teorema de representación espectral**<sup>27</sup> en este encontraremos el análogo a la Ecuación (13) que da la varianza muestral de una serie observada que puede ser atribuida a ciclos con frecuencias menores o iguales a  $\omega_1$ .

Considere una regresión mediante MCO del valor de  $y_t$  sobre una constante y sobre varios términos de cosenos y senos:

$$y_t = \mu + \sum_{j=1}^M \alpha_j \cdot \cos[\omega_j(t-1)] + \delta_j \cdot \text{sen}[\omega_j(t-1)] + u_t^{28}$$

**Proposición 1:** Sea T un entero impar y sea  $M=(T-1)/2$ <sup>29</sup>. Sea  $\omega_j = 2\pi j/T$  para  $j=1,2,\dots,M$ , y sea  $\mathbf{x}_t$  el vector  $(T \times 1)$  entonces:

$$\sum_{t=1}^T \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' = \begin{pmatrix} T_{(1 \times 1)} & \mathbf{0}'_{1 \times (T-1)} \\ \mathbf{0}_{(T-1) \times 1} & \frac{T}{2} \mathbf{I}_{(T-1) \times (T-1)} \end{pmatrix}$$

Además, sea  $\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$  cualesquiera T números. Entonces, es cierto que:

1. El valor de  $y_t$  puede ser expresado como:

$$y_t = \hat{\mu} + \sum_{j=1}^M \hat{\alpha}_j \cdot \cos[\omega_j(t-1)] + \hat{\delta}_j \cdot \text{sen}[\omega_j(t-1)]$$

con  $\hat{\mu} = \bar{y}$ , la media muestral y

$$\hat{\alpha}_j = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T y_t \cdot \cos[\omega_j(t-1)] \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, M$$

$$\hat{\delta}_j = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T y_t \cdot \text{sen}[\omega_j(t-1)] \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, M$$

2. La varianza muestral de  $y_t$  puede ser expresada como:

<sup>27</sup>Para ver la prueba de este teorema véase Hamilton (1994), cap. 6.

<sup>28</sup>Esta puede ser vista como una regresión estándar de la forma:  $\mathbf{y}_t = \beta' \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t$  con  $\mathbf{x}_t = [1 \ \cos[\omega_1(t-1)] \ \text{sen}[\omega_1(t-1)] \ \cos[\omega_2(t-1)] \ \text{sen}[\omega_2(t-1)] \ \dots \ \cos[\omega_M(t-1)] \ \text{sen}[\omega_M(t-1)]]'$  y  $\beta' = [\mu \ \alpha_1 \ \delta_1 \ \alpha_2 \ \delta_2 \ \dots \ \alpha_M \ \delta_M]$ .

<sup>29</sup>Para T entero par tomamos a  $M=T/2$ .

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M (\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\delta}_j^2)$$

y la porción de la varianza muestral de  $y$  que puede ser atribuida a ciclos de frecuencia  $\omega_j$  está dada por  $\frac{1}{2}(\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\delta}_j^2)$ .

3. La porción de la varianza muestral de  $y$  que puede ser atribuida a ciclos de frecuencia  $\omega_j$  también puede expresarse como:

$$\frac{1}{2}(\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\delta}_j^2) = \frac{4\pi}{T} \hat{S}_y(\omega_j)$$

donde  $\hat{S}_y(\omega_j)$  es el **periodograma muestral** en la frecuencia  $\omega_j$

Una vez definido esto, veamos cómo podemos hacer la estimación no paramétrica del espectro para una serie de tiempo.

Sea  $\hat{S}_Y$  una estimación de  $S_Y$  y sea  $\omega_j = \frac{2\pi j}{T}$ , se sugiere tomar:

$$\hat{S}_Y(\omega_j) = \sum_{m=-h}^h \kappa(\omega_{j+m}, \omega_j) \cdot \hat{S}_y(\omega_{j+m})$$

Y  $h$  es el parámetro *ancho de banda* que indica cuántas frecuencias diferentes  $\{\omega_{j\pm 1}, \omega_{j\pm 2}, \dots, \omega_{j\pm h}\}$  son vistas como una estimación útil para  $S_Y(\omega_j)$ . El kernel<sup>30</sup>  $\kappa(\omega_{j+m}, \omega_j)$  indica la ponderación que se le da a cada frecuencia.

La suma de la ponderación del kernel es la unidad:

$$\sum_{m=-h}^h \kappa(\omega_{j+m}, \omega_j) = 1$$

Una aproximación es tomar  $\kappa(\omega_{j+m}, \omega_j)$  como una proporción  $\frac{h+1-|m|}{h+1}$  que se puede mostrar como:

---

<sup>30</sup>Dada la muestra de  $n$  observaciones reales  $X_1, \dots, X_n$  se define la estimación tipo Kernel de función núcleo  $K$  como:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

donde  $K(x)$  es una función, denominada función *kernel*, núcleo o peso; que generalmente es una función de densidad simétrica como la distribución normal, Epanechnikov, Gaus, entre otras y  $\{h_n\}$  es una secuencia de constantes positivas conocidas como ancho de ventana, parámetro de suavización o *bandwidth*.

$$\sum_{m=-h}^h [h+1-|m|] = \sum_{m=-h}^h (h+1) - \sum_{m=-h}^h |m| = (h+1) \sum_{m=-h}^h 1 - 2 \sum_{s=0}^h s$$

$$\sum_{m=-h}^h [h+1-|m|] = (2h+1)(h+1) - \frac{2h(h+1)}{2}$$

Por lo que:

$$\sum_{m=-h}^h [h+1-|m|] = (h+1)^2$$

Para satisfacer la propiedad de que la suma de las ponderaciones sea la unidad, el kernel propuesto será:

$$\kappa(\omega_{j+m}, \omega_j) = \frac{h+1-|m|}{(h+1)^2}$$

y

$$\hat{S}_Y(\omega_j) = \left[ \frac{h+1-|m|}{(h+1)^2} \right] \hat{S}_y(\omega_{j+m})$$

Por ejemplo, si  $h=2$  entonces:

$$\hat{S}_Y(\omega_j) = \frac{1}{9} \hat{S}_Y(\omega_{j-2}) + \frac{2}{9} \hat{S}_Y(\omega_{j-1}) + \frac{3}{9} \hat{S}_Y(\omega_j) + \frac{2}{9} \hat{S}_Y(\omega_{j+1}) + \frac{1}{9} \hat{S}_Y(\omega_{j+2})$$

Dado que el kernel estima promedios sobre un número diferente de frecuencias nos debería dar una mejor estimación que la que nos proporciona el periodograma.



## 4. Aplicación empírica

Ahora vamos a encontrar el espectro de la inflación mensual anual subyacente y no subyacente para México en forma paramétrica y no paramétrica con el fin de conocer sus componentes periódicos y/o su tendencia, si es que los tienen. Es importante mencionar que lo que se propone realizar en esta sección no se ha hecho para el caso de México. Como se mencionó anteriormente, se han realizado ejercicios parecidos para el caso de Bolivia, Brasil, Argentina y Sudáfrica.

Se define a la inflación como el aumento sostenido y generalizado de los precios. Las variaciones en los precios que se originan en factores relacionados con la oferta agregada, como las innovaciones tecnológicas o los cambios climáticos, tienen una influencia de una sola vez sobre el nivel de precios y, por ello, su efecto sobre la inflación es temporal<sup>31</sup>. Por el contrario, cuando las variaciones en los precios se deben a cambios en la demanda agregada es posible que el efecto sobre la inflación perdure más de un periodo. Así, el concepto de inflación, en macroeconomía, se refiere a los cambios en los precios como resultado de excesos de demanda (Torres, 2003).

La inflación subyacente<sup>32</sup> se obtiene al quitar del INPC el precio de los bienes y servicios de tres subíndices: El Agropecuario (productos pecuarios y agrícolas), el de los Administrados y Concertados (la tenencia y la gasolina) y el de la Educación (colegiaturas)<sup>33</sup>. Estos tres subíndices se excluyen porque dichos precios han presentado una volatilidad mayor que la de otros precios.

Dados los componentes de la inflación subyacente podemos esperar que esté “cargada” de frecuencias altas<sup>34</sup> (i.e. periodicidad corta) y que la inflación subyacente esté “cargada” de frecuencias bajas (i.e. periodicidad larga).

Es importante el estudio y el seguimiento de la inflación subyacente por que los Bancos Centrales la utilizan por dos razones principales: primero, porque logra aproximar de gran

---

<sup>31</sup>Este tipo de variaciones en los precios es conocido como cambios en precios relativos.

<sup>32</sup>Según la definición del Banco de México.

<sup>33</sup>Los componentes de la inflación no subyacente.

<sup>34</sup>Que no sea ruido solamente.

manera el comportamiento de la tendencia de mediano plazo de la inflación del INPC; y segundo, porque con ella es posible anticipar el comportamiento futuro de la inflación del INPC.

En la medida en que la inflación subyacente no sea afectada por cambios en precios relativos se puede esperar que ésta sea una muy buena aproximación al comportamiento del nivel general de precios.

Torres (2003) corroboró, mediante un análisis estadístico, la relación estrecha que en los últimos años han tenido la inflación del INPC y la inflación subyacente en México. Argumenta que dicho análisis es importante porque “cuando las presiones en la inflación provienen del lado de la oferta, generalmente efectos de una sola vez, éstas se reflejan en una separación entre la inflación del INPC y la inflación subyacente” (27). Con lo que la respuesta de la autoridad monetaria sería evitar que dichos efectos temporales sobre la inflación del INPC se conviertan en aumentos subsecuentes en los precios.

### **0.3. Estimación paramétrica del espectro de la inflación**

Para encontrar el espectro tanto de la inflación subyacente como de la no subyacente se identifica un modelo ARIMA(p,d,q) de las series utilizando la metodología Box-Jenkins. Para identificar los modelos se tomaron los datos de la inflación mensual anualizada de enero de 2001 a diciembre de 2011 (132 observaciones)<sup>35</sup>

Se escogió este periodo de tiempo porque en éste las series de la inflación parecen ser estacionarias, lo cual nos permitirá identificar con más facilidad los modelos para dichas series. Cuando se adoptó un régimen de objetivos de inflación se encontró que “la inflación en México parece haber cambiado de un proceso no estacionario a uno estacionario alrededor del final del año 2000 o el principio de 2001” (Chiquiar, Noriega y Ramos-Francia, 2007: 12). Para evitar posibles inconsistencias en la metodología del cálculo de la inflación, decidí tomar el periodo hasta diciembre de 2011 porque fue el último año en que el Banco de México realizó el cálculo de la inflación. Actualmente este cálculo lo realiza el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI).

---

<sup>35</sup>La información utilizada fue tomada de las estadísticas del Banco de México, ubicadas en su sitio web: [www.banxico.org.mx](http://www.banxico.org.mx).

### 0.3.1. Inflación subyacente

En la Figura (5) se presenta la gráfica de la inflación subyacente para el periodo mencionado.

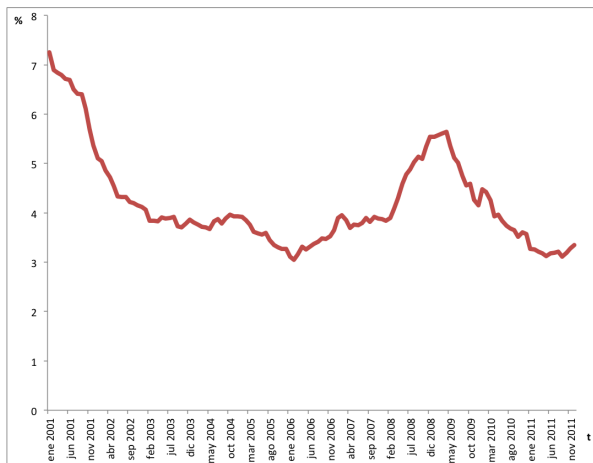


Figura 5: Inflación Subyacente

Con las siguientes estadísticas descriptivas:

#### Cuadro1. Estadísticas descriptivas

media	4.201
varianza	0.905
desviación estándar	0.951

Para identificar el modelo ARIMA(p,d,q) correspondiente a la inflación subyacente hacemos una prueba de raíz unitaria. Obtenemos que es  $I(0)$  utilizando la prueba Dickey-Fuller Aumentada con constante y que rechazamos la hipótesis nula de que la serie tiene raíz unitaria a un nivel de confianza de 90% (Cuadro 2).

Una vez que aceptamos que la serie es estacionaria, procedemos a identificar el orden de la parte autoregresiva y de promedios móviles, y encontramos que el mejor modelo identificado<sup>36</sup> para modelar la inflación subyacente es el modelo ARIMA(2,0,1)<sup>37</sup> que se presenta a continuación:

$$\Pi^s = \phi_1 \Pi_{t-1}^s + \phi_2 \Pi_{t-2}^s + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

<sup>36</sup>Se discriminó entre modelos con base en el criterio de información BIC.

<sup>37</sup>Los parámetros estimados del modelo son significativos, además, del cuadro 2, no hay indicios de correlación serial de primer orden, sin embargo, el modelo presenta el problema de que los residuales no se distribuyen normal (no son homocedásticos), las pruebas de hipótesis se hicieron al 95% de confianza.



con:

$$\phi_1 = 1.865621306 \quad (0.0759)$$

$$\phi_2 = -0.8666960514 \quad (0.0753)$$

$$\theta_1 = -0.6355828455 \quad (0.120148)$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = 0.01328994$$

Cuadro 2. Pruebas para la identificación y validación del modelo

Prueba/Estadístico	Prob
Prueba ADF (12 rezagos)	0.0820
Jarque Bera	0.01079
Heterocedasticidad ARCH (12 rezagos)	0.007852
Durbin-Watson	1.7673
$R^2$ Aj.	0.9829

A partir de la Ecuación (12) obtenemos su espectro:

$$S_y(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1 + 2\theta_1 \cos(\omega) + \theta_1^2}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1(1 - \phi_2)\cos(\omega) - 2\phi_2\cos(2\omega)}$$

En la gráfica de la izquierda de la Figura (6) se muestra el espectro de la inflación subyacente y vemos que está cargada hacia frecuencias bajas.

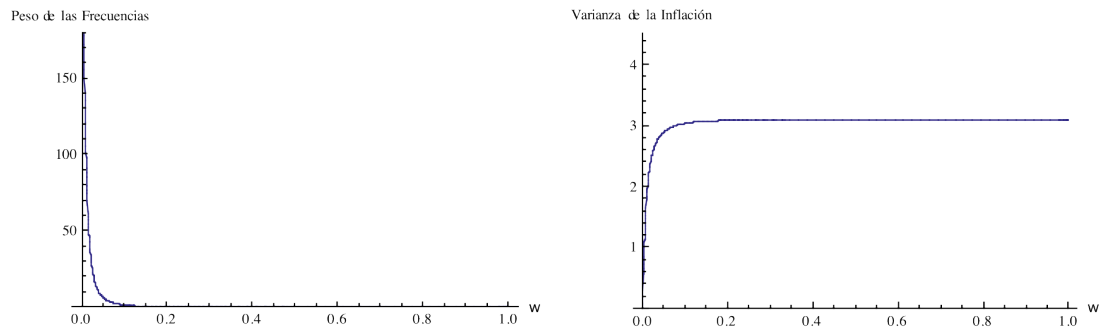


Figura 6: En la figura de la izquierda se representa el espectro de la inflación subyacente, mientras que en la de la derecha se muestra cómo se van acumulando las frecuencias.

Como sabemos, si integramos el espectro obtenemos la varianza<sup>38</sup> de la serie que puede ser atribuida a ciclos con frecuencias menores o iguales a  $\omega$ . La gráfica de la derecha de la Figura (6) nos da la función que representa la varianza de la serie.

<sup>38</sup>Se obtuvo una varianza de 3.1 que es mayor a la varianza de la serie la cual fue de 0.905, esto sucedió porque el mejor modelo identificado presenta el problema de que los residuales no se distribuyen normal.

Para determinar el valor de la frecuencia  $\omega$  necesitamos determinar la periodicidad (P) del ciclo mediante la siguiente relación:

$$P = \frac{2\pi}{\omega}$$

Para determinar el valor de (P) hemos seguido a Burns y Mitchell (1946), quienes definen la duración del ciclo en, por lo menos, 18 meses.

De la relación anterior obtenemos que la frecuencia asociada al ciclo de 18 meses es  $\omega=0.111$ . El siguiente cuadro nos muestra la contribución de la  $\omega$  menor o igual a 0.111 en la varianza total.

Contribución de las frecuencias en la varianza total	
	(%)
$\omega \leq 0.111$	98.3
$\omega > 0.111$	1.7

Con lo cual podemos corroborar que la inflación subyacente está cargada de frecuencias bajas (ciclos de 18 o más meses) ya que éstas aportan el 98.3 % de las frecuencias relevantes asociadas a la inflación subyacente.

### 0.3.2. Inflación no subyacente

En la Figura (7) se presenta la gráfica de la inflación no subyacente para el periodo mencionado.

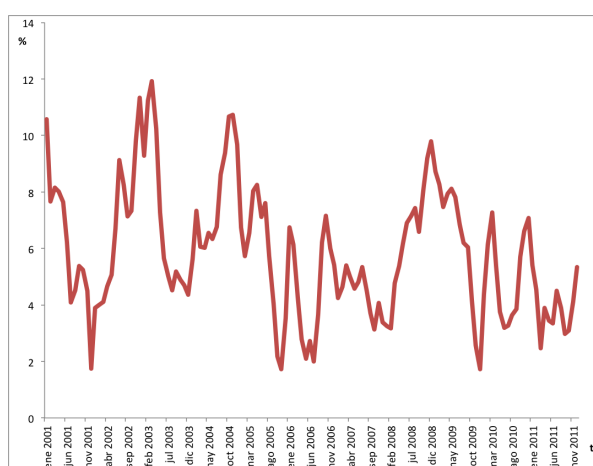


Figura 7: Inflación No Subyacente

A la cual le corresponden las siguientes estadísticas descriptivas:

Cuadro3. Estadísticas descriptivas

media	5.829
varianza	5.160
desviación estándar	2.272

Vemos que tiene mayor varianza que la serie de la inflación subyacente.

Para poder identificar el modelo ARIMA(p,d,q) que le correspondería a la inflación no subyacente hacemos una prueba de raíz unitaria. Obtenemos que es I(0) utilizando la prueba Phillips-Perron con constante y tendencia, ya que rechazamos la hipótesis nula de que la serie tiene raíz unitaria a un nivel del 95 % de confianza (Cuadro 4)<sup>39</sup>.

Una vez que aceptamos que es estacionaria, procedemos a identificar el orden de la parte autoregresiva y de promedios móviles, y encontramos que el mejor modelo identificado<sup>40</sup> para modelar la inflación subyacente es el modelo ARIMA(2,0,3)<sup>41</sup> que se presenta a continuación:

$$\Pi^{ns} = \phi_1 \Pi_{t-1}^{ns} + \phi_2 \Pi_{t-2}^{ns} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3}$$

con:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 1.569173 \quad (0.1062) \\ \phi_2 &= -0.570382 \quad (0.1059) \\ \theta_1 &= -0.365259 \quad (0.1175) \\ \theta_2 &= -0.309278 \quad (0.0865) \\ \theta_3 &= -0.316746 \quad (0.1085) \\ \sigma_\varepsilon^2 &= 1.084553 \end{aligned}$$

Cuadro 4. Pruebas para la identificación y validación del modelo

Prueba/Estadístico	Prob
Prueba PP (12 rezagos)	0.0169
Jarque Bera	0.4842
Heterocedasticidad ARCH (12 rezagos)	0.171560
Durbin-Watson	1.978668
$R^2$ Aj.	0.768236

<sup>39</sup>Ya que según la prueba Dickey-Fuller Aumentada la inflación no subyacente es I(1).

<sup>40</sup>Se discriminó entre modelos con base en el criterio de información BIC.

<sup>41</sup>Los parámetros estimados del modelo son significativos, además del cuadro 4, no hay indicios de correlación serial de primer orden, los residuales se distribuyen normal (son homocedásticos). Las pruebas de hipótesis se hicieron al 95 % de confianza, si embargo, el  $R^2$  Aj. es un poco bajo y pareciera ser que el modelo tiene un problema de no estacionariedad, ya que sus raíces están muy cercanas a 1.

A partir de la Ecuación (12) obtenemos su espectro:

$$S_y(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + 2[\theta_1(1 + \theta_2) + \theta_2\theta_3]\cos(\omega) + 2[\theta_2 + \theta_1\theta_3]\cos(2\omega) + 2\theta_3\cos(3\omega)}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1(1 - \phi_2)\cos(\omega) - 2\phi_2\cos(2\omega)}$$

En la gráfica de la izquierda de la Figura (8) se muestra el espectro de la inflación no subyacente, es posible observar que está cargada de frecuencias bajas y altas.

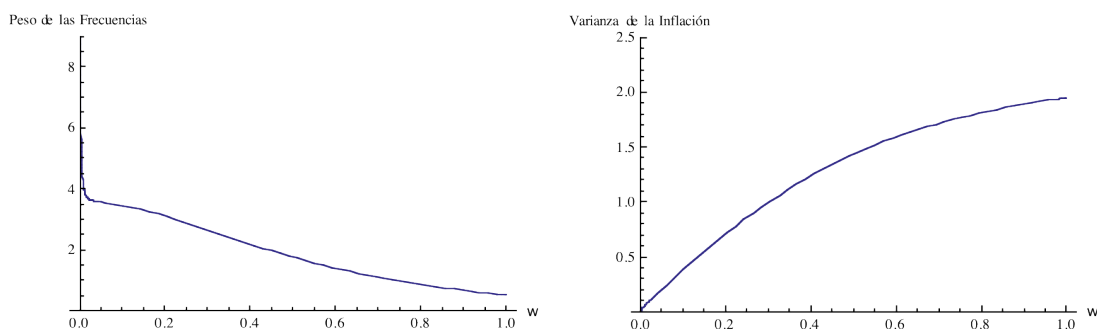


Figura 8: En la figura de la izquierda se representa el espectro de la inflación no subyacente, mientras que en la de la derecha se muestra cómo se van acumulando las frecuencias.

Para poder ver qué tanto está cargada de frecuencias altas integramos su espectro (representado en la gráfica de la derecha de la Figura (8) ) para obtener la varianza<sup>42</sup> de la serie que puede ser atribuida a ciclos con frecuencias menores o iguales a  $\omega = 0.111$ .

El siguiente cuadro nos muestra la contribución de la  $\omega$  menor a 0.111 en la varianza total.

Contribución de las frecuencias en la varianza total	
	(%)
$\omega \leq 0.111$	21.3
$\omega > 0.111$	78.7

Podemos corroborar que la inflación no subyacente está más cargada de frecuencias altas (ciclos menores a 18 meses), que aportan el 78.7% a la varianza, que de frecuencias bajas (ciclos de 18 meses o más), las cuales solo aportan el 21.3% a la varianza.

<sup>42</sup>Se obtuvo una varianza de 1.95 que es menor a la varianza de la serie la cual es de 5.160, esto sucedió porque el mejor modelo identificado, como ya se mencionó, también presenta algunos problemas como que la  $R^2$  Aj. es baja y, principalmente, pareciera que el modelo tiene un problema de no estacionariedad ya que sus raíces están muy cercanas a 1.

## 0.4. Estimación no paramétrica del espectro de la inflación

Para encontrar el periodograma muestral de las series de la inflación subyacente y de la no subyacente se utilizó el teorema de representación espectral visto en la sección 3, subsección 0.2.3. Se hizo esta estimación porque en la estimación paramétrica se presentaron algunos problemas a la hora de identificar y validar los modelos. Esta estimación está libre de esos problemas.

### 0.4.1. Inflación subyacente

De la Figura (9), la gráfica de la izquierda representa la serie de la inflación subyacente. Vemos que la serie estimada está bastante bien representada por combinaciones lineales de senos y cosenos dadas las frecuencias posibles en las cuales puede ser descompuesta la serie.

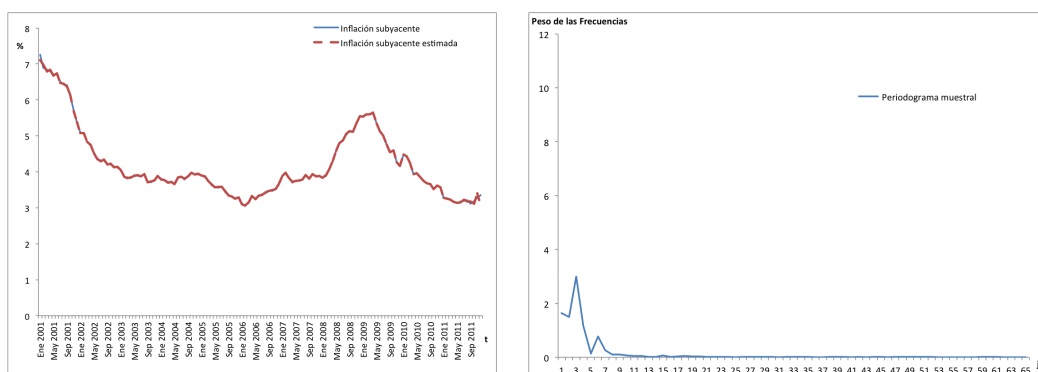


Figura 9: La gráfica de la izquierda es la serie de la inflación subyacente y la misma serie estimada. La gráfica de la derecha es su periodograma muestral.

Si observamos la gráfica de la derecha de la Figura (9) podemos ver que el periodograma muestral está cargado de frecuencias bajas. Mismo resultado que en la estimación paramétrica.

Pero, ¿cómo interpretar el periodograma muestral? Vemos que el último pico del periodograma muestral se encuentra en  $j=6$ , con el que podemos encontrar la periodicidad del ciclo que es inherente a esta serie económica mediante la siguiente expresión:

$$\frac{2\pi}{\omega_j} = \frac{T}{j}$$

Como  $T=132$  entonces obtenemos que el ciclo asociado a esta serie es de 22 meses ( $132/6$ ), resultado consistente con lo obtenido en la estimación paramétrica (ciclo de por lo menos 18 meses).

### 0.4.2. Inflación no subyacente

En la Figura (10) la gráfica de la izquierda representa la serie de la inflación no subyacente.

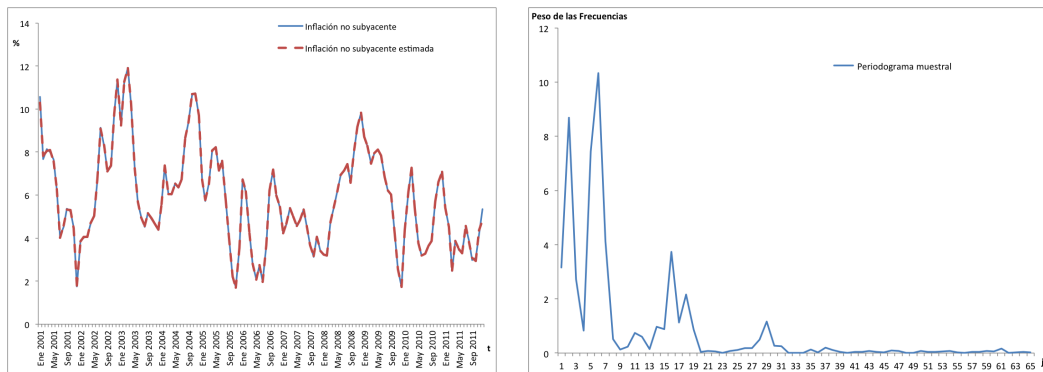


Figura 10: La figura de la izquierda es la serie de la inflación no subyacente, la de la derecha es su periodograma muestral.

Al igual que la serie de la inflación subyacente, podemos ver que la serie estimada también está bastante bien representada por combinaciones lineales de senos y cosenos dadas las frecuencias posibles en las cuales puede ser descompuesta la serie.

Si nos fijamos la gráfica de la derecha de la Figura (10) podemos observar que, si bien, el periodograma muestral contiene frecuencias bajas y frecuencias altas. Como hay picos para  $j=16$ ,  $18$  y  $29$  encontramos que a la inflación no subyacente la podemos asociar a ciclos de 8.3, 7.3 y 4.6 meses, lo cual es un resultado consistente con la estimación paramétrica en la que la inflación no subyacente está cargada de frecuencias asociadas a ciclos menores a 18 meses.



## 5. Conclusiones

Con el fin de cumplir con el objetivo principal de esta tesis, hemos dado una prueba del Teorema de Wiener-Kintchine que sustenta el uso del enfoque del dominio de las frecuencias en el análisis de series de tiempo en economía.

Asimismo, se realizó una aplicación empírica a partir de la utilización de este “nuevo” enfoque para analizar la inflación subyacente y no subyacente. Se encontró que la inflación subyacente tiene componentes de baja frecuencia. Esto nos indica que este tipo de inflación está asociada a variaciones en los precios, que obedecen a cambios en la demanda agregada. Esto quiere decir que cambios en sus componentes podría llevar a que la inflación perdure en el tiempo. Mientras que la inflación no subyacente, que tiene componentes de alta frecuencia, nos indicaría la posibilidad de que las variaciones en los precios se originen desde la oferta agregada, por tal motivo se ejercería una influencia de una sola vez en los precios. Lo que significa que los movimientos en sus componentes llevarían solamente a cambios temporales.

Si el Banco Central logra identificar de dónde provienen los cambios en los precios entonces podría saber cómo responder a los choques en los precios, es decir, si logra identificar que los cambios provienen de factores de oferta, la respuesta de la política monetaria se centraría, en general, en evitar que el aumento de los precios contamine las expectativas de inflación y que no se generen incrementos subsecuentes de los precios. Por otro lado, si se identifica que el alza en los precios tiene su origen en factores de demanda la respuesta de la autoridad monetaria usualmente sería combatir de forma inmediata dichos incrementos a través de la restricción de la política monetaria (Torres, 2003).

Con el fin de seguir trabajando con este enfoque se podría analizar la serie del Producto Interno Bruto<sup>43</sup>; estudiar la sincronización del ciclo económico entre países a través del comercio internacional (Chiquiar y Ramos-Francia, 2004); contrastar las frecuencias asociadas a la inflación subyacente con las frecuencias asociadas a la inflación del INPC

---

<sup>43</sup>Serie que, según C. Granger (1997), fue el estudio del ciclo económico, el cual impulsó el desarrollo del análisis espectral en economía.



general para corroborar su estrecha relación para el caso de México<sup>44</sup>, o, explorar los avances recientes en teoría electromagnética para la actualización de filtros *Band – Pass* como se hace en Baxter y King (1999).

---

<sup>44</sup>Como lo hace Torres (2003) mediante un análisis estadístico.

# Bibliografía

- [1] ARAÚJO, E. Y A. FIORENCIO, «Frequency Domain Analysis of Core Inflation Measures for Brazil», *Est. Econ. Sao Paulo*, vol. 35, núm. 1, Janeiro-Marco, 2005, p. 5-36.
- [2] BARTLETT, M. S., *An Introduction to Stochastic Processes*, 1955.
- [3] BARRÓN SALINAS, C. E. Y M. A. VILLEGAS GUTIÉRREZ , «Una Medida Alternativa para la Inflación Subyacente», Banco Central de Bolivia, 2008.
- [4] BAXTER, M. Y R. KING, «Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series», *The Review Economics and Statistics*, noviembre 1999, vol. 81, núm. 4, pp. 575-593.
- [5] BRILLINGER, D. R., *Time Series Data Analysis and Theory*, Second Edition, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1981.
- [6] BROCKWELL, P. J. Y R. A. DAVIS, *Time Series: Theory and Methods*, New York: Springer-Verlag, 1987.
- [7] BURNS, A. M. Y W. C. MITCHELL, «Measuring Business Cycles» New York, NBER, 1946.
- [8] CHIQUIAR, D., A. E. NORIEGA Y M. RAMOS-FRANCIA, «Un Enfoque de Series de Tiempo para Probar un Cambio en Persistencia de la Inflación: La Experiencia de México», Working Paper 2007-01, Banco de México.
- [9] CHIQUIAR, D. Y M. RAMOS-FRANCIA, «Bilateral Trade and Business Cycle Synchronization: Evidence from Mexico and United States Manufacturing Industries», Working Paper 2004-05, Banco de México.
- [10] COCHRANE, J. H., *Time Series for Macroeconomics and Finance*, University of Chicago, 2005.
- [11] D'AMATO, L., L. GAREGNANI Y J. M. SOTES, «Dinámica inflacionaria y persistencia: Implicancias para la política monetaria», Banco Central de la República Argentina, 2007.

- [12] EINSTEIN, A., «On the Motion of Small Particles Suspended in a Stationary Liquid, as Required by the Molecular Kinetic Theory of Heat», *Annalen der Physik*, vol. 17, 1905, pp. 549-560.
- [13] ENDERS, W., *Applied Econometric Time Series*, Second Edition, Wiley, 2004.
- [14] MANKIW, G., *Macroeconomía*, Antoni Bosch, 4ta. Edición, 2000.
- [15] GELFAND, I. M. Y G. E. SHILOV, *Generalized Functions. Vol 1: Properties and Operations*, Boston MA, Academic Press, 1964.
- [16] GELFAND, I. M. Y N. Y. VILENKIN, *Generalized Functions. Vol 4: Applications of Harmonic Analysis*, Boston MA, Academic Press, 1964.
- [17] GRANGER, C. «The Et Interview: Professor Clive Granger», *Econometric Theory*, Cambridge University Press, vol. 13, núm. 2, 1997, pp. 253-303.
- [18] ————, «The Typical Spectral Shape of an Economic Variable», *Econometrica*, vol. 34, núm. 1, enero, 1966, pp. 150-161.
- [19] GRANGER, C. Y M. HATANAKA, *Spectral Analysis of Economic Time Series*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1964.
- [20] HAMILTON, J. D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 1994.
- [21] HARVEY, A. C., *Time Series Models*, Second Edition, Cambridge: MIT Press, 1993.
- [22] HODRICK, R. J. Y E.C. PRESCOTT, «Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation», *JMCB*, vol. 29, núm. 1, 1997.
- [23] HUANG, K., *Introduction to Statistical Physics*, MIT, 2001.
- [24] KOCH K., J. OHSER Y K. SCHLADITZ, «Spectral Theory for Random Closed Sets and Estimating the Covariance via Frequency Space», *Institut Techno und Wirtschaftsmathematik*, núm. 37, 2002.
- [25] OPPENHEIM, A. V. Y R. W. SCHAFFER, *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1975.
- [26] PINDYCK, R. S. Y D. L. RUBINFELD, *Econometric Models and Economic Forecasts*, 4ta Edición Mc-Graw Hill, 1998.
- [27] PRIESTLEY, M. B., *Spectral Analysis and Time Series*, vols. 1 y 2, London: Academic Press, 1981.

- [28] RUCH, F. Y D. BESTER, «Towards a Measure of Core Inflation using Singular Spectrum Analysis», JEL, 2011.
- [29] SMOLUCHOWSKI, M., «The Kinetic Theory of Brownian Molecular Motion and Suspensions», *Annalen der Physik*, vol. 21, núm.14, 1906, pp. 756-780.
- [30] STEIN, E. Y R. SHAKARKI, *Introduction to Statistical Physics*, MIT, 2001.
- [31] STOCK J. *Time Series Analysis: Lectures Notes Harvard University*, Universidad de Harvard, otoño, 2003.
- [32] TAYLOR, G.I., «The Spectrum of Turbulence» *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1938, pp. 476-490.
- [33] TORRES, A., «Un Análisis Estadístico de la Relación entre la Inflación General y la Inflación Subyacente», Documento de Investigación 2003-05, Banco de México.
- [34] URBELZ, F. J., *Introducción a la teoría de los procesos estocásticos*, Anales del Instituto de Actuarios, 1978.
- [35] WIENER, N., *Cybernetics*, Cambridge: The MIT Press, 1961.
- [36] —————, «Generalized Harmonic Analysis» Cambridge, Mass, 1930, pp. 199–260.