Nora

Colegio de México
Seminario de Tesis
Reporte de Avance.
"Un Modelo de Crecimiento"
Roberto García Benavides.

TRABAJO DE INVESTIGACION ELABORADO POR
ROBERTO GARCIA BENAVIDES PARA OPTAR AL
GRADO DE MAESTRO EN ECONOMIA DEL CEED
DE EL COLEGIO DE MEXICO

INTRODUCCION.

"Encontramos que hay unas cuantas industrias con un alto grado de capitalización, como por ejemplo la minería o la energía eléctrica, junto a las técnicas más primitivas; unas cuantas tiendas de lujo junto a una gran masa de comerciantes a la vieja usanza; unas cuantas plantaciones con un alto grado de capitalización, junto a un mar de pobreza. Pero también encontramos los mismos contrastes fuera de la vida económica. Existen una o dos ciudades modernas, con la mejor arquitectura, abastecimiento de agua, comunicaciones, etc., a las que llegan gentes de otros pueblos que casi podrían pertenecer a otro planeta. Existe el mismo contraste incluso entre la gente; unos cuantos nativos occidentalizados, vestidos con pantalones, educados en universidades occidentales, hablando idiomas occidentales y deleitándose con Beethoven, Mill, Marx o Einstein, y una gran masa de sus compatriotas que viven en mundos enteramente diferentes."(1)

Decidí empezar este ensayo con un párrafo magnífico de Lewis porque creo que capta con un alto grado de precisión una de las preocupaciones fundamentales que tengo. Siento que esta cita apunta directamente a la justificación de este trabajo. Los países subdesarrollados suelen intentar su crecimiento por la vía de un sistema dual. Explicar el por qué del subdesarrollo, el por qué de las economías duales es tarea que escapa a este intento de concretar un modelo y a mis ha-

1) W. Arthur Lewis, Economic Development with Unlimited Supplies of Labor, artículo en The Economics of Underdevelopment, Oxford University Press, p. 408.

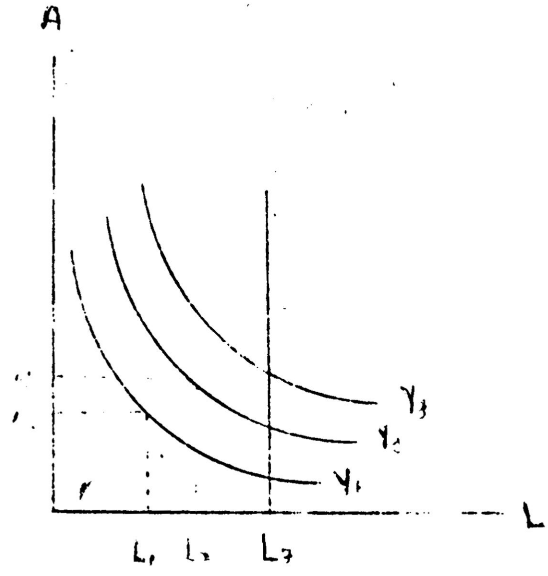
bilidades. El modelo de economía dual que trataré de desarrollar no es de ninguna manera aplicable a un país o sistema -- real, éste como cualquier otro modelo puede aspirar a lo más a ser una caricatura de ese mundo extraño y familiar que nos rodea. Más aún, la formulación del modelo sólo ayudará a una -- persona: a mi. Desde ahora declaro que el mundo, y en particular al Tercer Mundo, seguirá siendo tal cual es con mi modelo- o sin él. A fuerza de ser sincero, este ha sido un ejercicio- que, como todos los demás en la academia, me ha sido de gran - ayuda, dándome un poco de más destreza y cubriendo dudas que - habían quedado. Sin embargo, creo que la teoretización está - justificada en la medida que nadie puede plantear una estrategia para resolver un problema de la vida cotidiana sin cargar- un bagage teórico. En resumen, adiestrémonos o cuando menos - intentemos adiestrarnos en el quehacer teorético que será al - fín y al cabo lo que nos habilitará para responder preguntas.

I.- MODELOS AGRICOLA.

Inicialmente partiremos de una economía exclusivamente agrícola, posteriormente iremos complicando el panorama para dar paso a otro sector no agrícola.

Supondremos que existe una función producción que de alguna manera se ha podido agregar, la cual quedaría expresada por $Y = f(A,L)$. Esta función dice que el producto agrícola, Y, depende de dos insumos: A, fuerza de trabajo; y L, cantidad de tierra. Suponemos Asumimos que la función producción es derivable respec a sus dos argumentos. Siguiendo el espíritu Ricardiano, podemos suponer asumir con él que la función producción tiene rendimientos decrecientes a escala, cuya justificación está en el viejo argumento clásico que señala el hecho de que a medida que se ván incorporando nuevas tierras al cultivo, éstas son de inferior calidad y por lo mismo el producto es menor que en las áreas que inicialmente se empezó a cultivar.

Gráfico I-1



En la gráfica I-1 se está midiendo la fuerza de trabajo agrícola en el eje de las ordenadas y la cantidad de tierra en el eje de las abscisas, en tanto que el producto se está midiendo en un tercer eje. Así, en la medida que aumentamos en la misma proporción la cantidad de ambos insumos el producto aumentará pero lo hará en una proporción menor al registrado por los insumos. Si aumentamos en un 50% ambos insumos, como se observa en la gráfica I-1, al pasar de L_1 a L_2 y de A_1 a A_2, el producto pasará de Y_1 a Y_2, donde- el incremento de Y es menor de 50%. Supongamos que la función producción es de la siguiente forma:

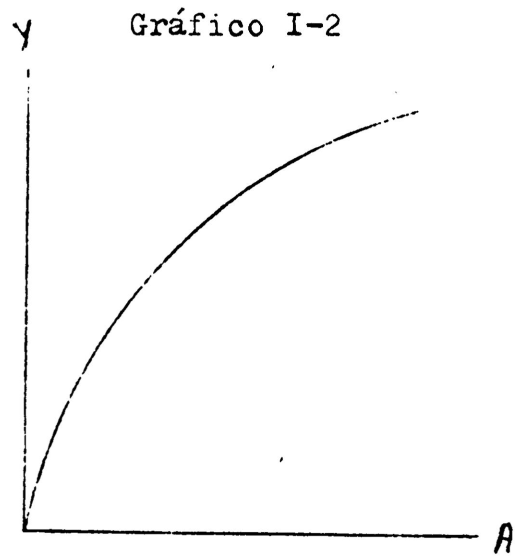
$$Y = A^{\rho} L^{\theta} \qquad \text{(I-1)}$$

donde $\rho + \theta < 1$, o sea es una función cuyos rendimientos a escala son decrecientes. Por otro lado, podemos suponer, por comodidad que toda la tierra está en explotación en cuyo caso la función producción queda expresada por:

$$Y = A^{\rho} \qquad \text{(I-2)}$$

Esto es, el volumen del producto ahora ya nada más depende de la cantidad de fuerza de trabajo. En la figura I-1 trazamos una perpendicular a las abscisas que nos indica la cantidad to-- tal de tierra, entonces sólo podremos alcanzar isocuantas más altas si au-- mentamos el trabajo. En la figura -- I-2 está expresada la función (I-2),

Gráfico I-2

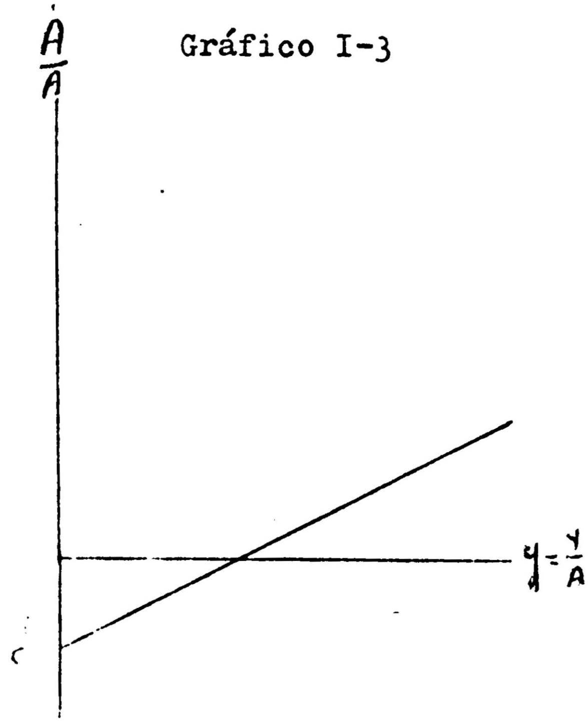


donde claramente se ve que a medida que vaya aumentando la población (fuerza de trabajo) aumenta el producto agrícola, pero en una proporción menor al aumento de la población. La función tiene rendimientos decrecientes a un factor.

Por lo que hace al insumo fuerza de trabajo recurramos otra vez a Ricardo. Supongamos que su crecimiento proporcional depende del ingreso per capita en forma positiva (2)

$$\frac{\dot{A}}{A} = \gamma y - \delta \qquad \text{(I-3)}$$

donde $\dot{A} = \left(\frac{dA}{dt}\right)$ es el crecimiento de la población respecto al tiempo; δ es la fuerza de mortalidad; y γ es el cociente que divide el incremento de la tasa bruta de reproducción (Nacimientos sobre la población total) de la población entre el incremento del ingreso per capita.



Esta función de la tasa de crecimiento de la población contiene dos elementos Ricardianos. a) suponer que la población crece con el ingreso; y b) suponer que existe un nivel mínimo de ingreso donde la tasa de crecimiento de la población es igual a cero. Ese nivel mínimo de ingreso per capita lo podemos interpretar como el nivel mínimo se subsistencia. La figura I-3 representa esta función y se observa que hay un ingreso de subsistencia cuando la función intersecta al eje de las abscisas.

Dividiendo la expresión (I-2) entre la población, A, obtendremos una función que nos dice el producto percapita

$$\frac{Y}{A} = y = A^{\rho - 1} \qquad \text{(I-4)}$$

Diferenciando respecto al tiempo y dividiendo entre "y" (3)

$$\frac{\dot{y}}{y} = (\rho - 1)\frac{\dot{A}}{A} \qquad \text{(I-5)}$$

2) Dale W. Jorgenson, The Development of a Dual Economy, The Economic Journal, Junio 1961.

Usando (I-3)

$$\frac{\dot{y}}{y} = (\rho-1)(\gamma y - \delta) \qquad \text{(I-6)}$$

multiplicando ambos miembros por y

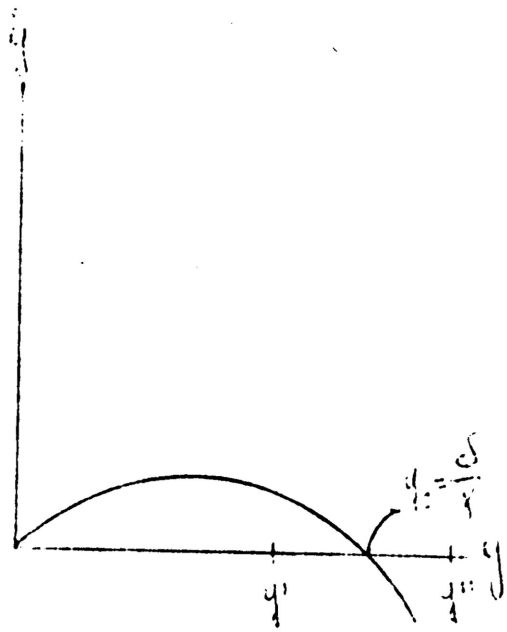
$$\dot{y} = (\rho-1)(\gamma y^2 - \delta y) \qquad \text{(I-7)}$$

Esta ecuación diferencial representa el crecimiento del producto per capita de este modelo agrícola. Del análisis de esta ecuación se desprende que hay dos soluciones (4) estacionarias ($\dot{y} = 0$), las cuales son $y_1 = 0$ y $y_2 = \frac{\delta}{\gamma}$ La primera solución no tiene relevancia alguna; simplemente, si --- $y = y_1 = 0$ entonces la tasa de reproducción de la población --expresión (I-3)- se hace negativa y la población empieza a - descender en una proporción igual a δ hasta que no hay pobla-- ción y en consecuencia no hay sistema alguno. Por lo que hace a la segunda solución estacionaria, $y_2 = \frac{\delta}{\gamma}$, ésta quiere decir que cuando el ingreso per capita es igual al valor que resulta de dividir la tasa de mortalidad entre la tasa bruta de reproducción de la población, entonces estamos en una situación estable donde el ingreso per capita no aumenta ni disminuye a lo largo del tiempo. Dicho de otro modo, la solución establese da cuando el crecimiento proporcional de la población es nulo ($\frac{\dot{A}}{A} = \gamma y - \delta = 0 \iff y = \frac{\delta}{\gamma} = y_2$) o sea cuando la proporción de los nacimientos respecto a la población es igual a la fuerza de mortalidad (decesos entre la población total).

3) $\frac{dy}{dt}$ [illegible] $(\rho-1)$ [illegible]

4) $\dot{y} = ($[illegible]$) = 0 \iff$ [illegible]

Gráfico I-4



En la gráfica I-4 se intenta una representación de la ecuación diferencial. En el eje de las abscisas se mide el ingreso per capita y en el eje de las ordenadas se mide la variación del ingreso per capita respecto al -- tiempo. Para un valor menor que y_2 -- por ejemplo y', $\dot{y}$ es mayor que cero lo cual dice que el ingreso per capita está creciendo, de modo que y se desplazará hacia la derecha. Para un valor mayor que y_2, y'' por ejemplo, entonces $\dot{y}$ es negativo y en consecuencia y está desplazándose hacia la izquierda; ésto es, el ingreso per capita está disminuyendo. Tal y como indican las flechitas en la figura, para cualquier valor de $y \neq 0$ siempre llegaremos a y_2 que es el nivel de ingreso per capita que mantiene al sistema estable y estacionario, tanto por lo que hace al nivel de producción e ingreso como por lo que se refiere a la población. Estamos frente a un sistema que, una vez alcanzado el punto de equilibrio estable, se repite una y otra vez para siempre.

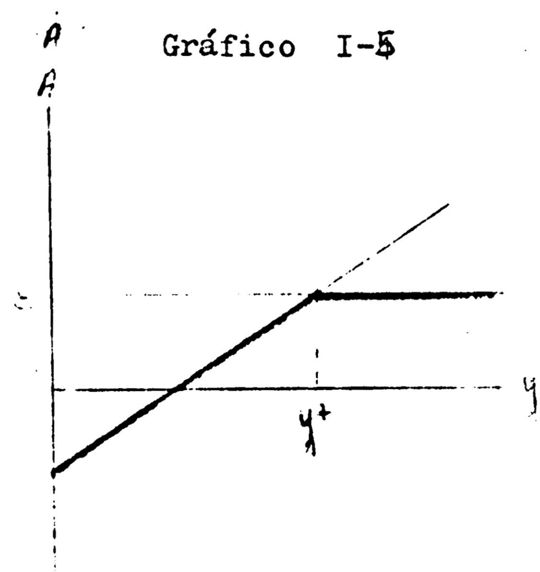
Metamos una restricción a la tasa de crecimiento de la población(5). Supongamos que hay un nivel mínimo de ingreso per capita y^*, llegado el cual la tasa de crecimiento llega a un límite máximo del cual no pasa pese a que el ingreso per

5) Véase Jorgenson, The development of. . . op. cit.

capita continúe creciendo. Introducemos esta restricción con el objeto de ver si podemos liberar fuerza de trabajo que se dedique a otras actividades, presumiblemente a la industria. Sin embargo, si bien el sistema se va a modificar un tanto, podemos adelantar desde ahora que la fundación de un sector industrial no va a ser posible. La tasa de crecimiento de la población queda expresada por:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \min \begin{cases} \gamma y - \delta \\ \varepsilon \end{cases} \quad ? \qquad \text{(I-8)}$$

Gráfico I-5



Cuya representación diagramática está dada por los segmentos de recta remarcados en la figura I-5. Esto es, para valores de y menores que y^+ la función los manda a los respectivos valores de la función (I-3); y para valores mayores de y^+ el crecimiento proporcional de la población es constante.

Sustituyendo en la ecuación (I-5) a $\frac{\dot{A}}{A}$ por la tasa de crecimiento de la población constante,

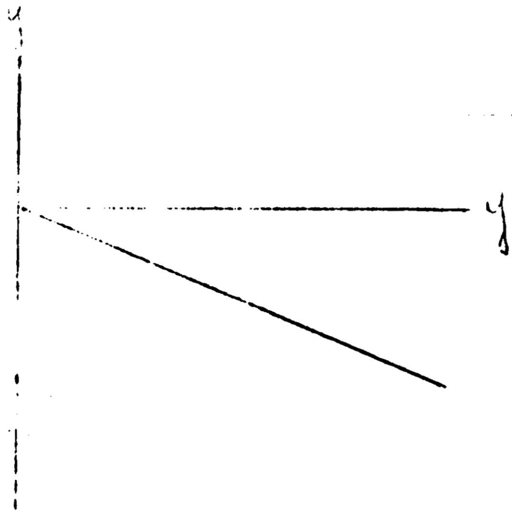
$$\frac{\dot{y}}{y} = (\rho - 1)\varepsilon$$

multiplicando ambos miembros por y

$$\dot{y} = (\rho - 1)\varepsilon y \qquad \text{(I-9)}$$

Esta es una ecuación diferencial cuya única solución estacionaria es y = 0, lo cual quiere decir que cualquiera que

Gráfico I-6



sea el valor de y del cual parte, ẏ siempre será negativa y en consecuencia y siempre estará disminuyendo hasta que el ingreso per capita llegue a cero. La pendiente de la función en la figura I-6 es negativa puesto que $\rho - 1 < 0$. La solución general a esta ecuación diferencial es: (6)

$$y(t) = y(0)\, e^{(\rho-1)\varepsilon t}$$

Por definición $\rho - 1 < 0$, entonces a medida que mayor sea el valor de t más pequeño será el valor del ingreso per capita.

El meollo del problema aquí está en saber qué pasa en las siguientes dos situaciones: a) $y^+ < y_2$; y b) $y_2 < y^+$

Analicemos la primera alternativa. Ya se había dicho que cuando el ingreso per capita alcanza su valor de estabilidad estacionaria entonces la tasa de crecimiento de la población es nula. Esto es, cuando $y = y_2 = \frac{\delta}{\gamma}$ entonces $\frac{\dot{A}}{A} = 0$; de manera que cuando el movimiento en el ingreso per capita y en la población es nulo los dos están coincidiendo en el valor de $y_2 = \frac{\delta}{\gamma}$

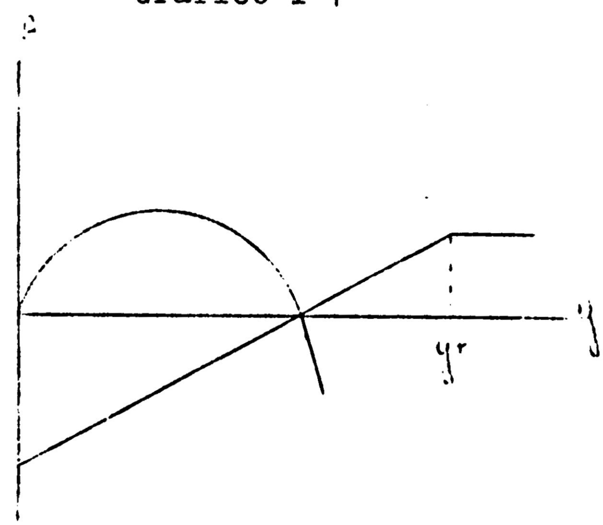
6)

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = (\rho - 1)\varepsilon = \frac{d(\log y)}{dt}$$

$$\int \frac{d(\log y)}{dt}\, dt$$

$$y = e^{(\rho-1)\varepsilon t} = y(0)\, e^{(\rho-1)\varepsilon t}$$

Gráfico I-7



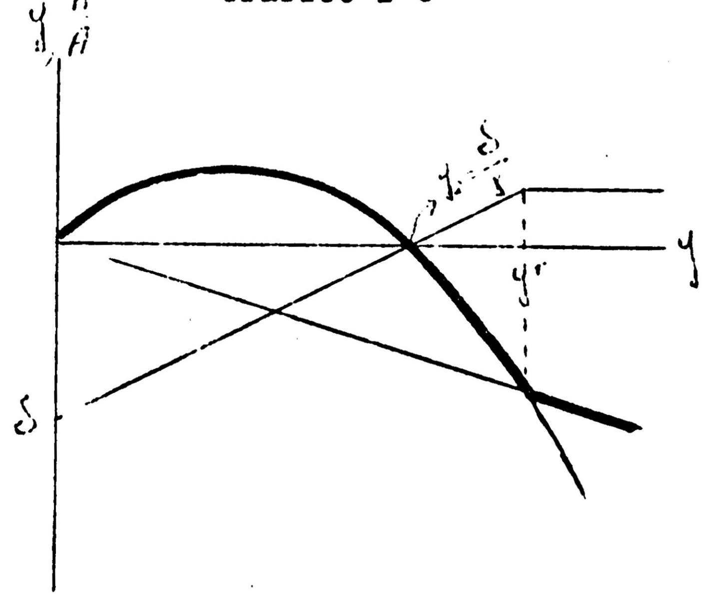
Sobreponiendo las figuras I-4 y I-5 en un solo diagrama, tal y como se hace en el gráfico I-7, podemos llegar a la conclusión de que no puede suceder que $y^+ < y_2$. Dicho con mayor rigor, $y_2 = \frac{\delta}{\gamma}$ y $y^+ = \frac{\varepsilon + \delta}{\gamma}$ (7) donde $\varepsilon > 0$, entonces $\frac{\delta}{\gamma} = y_2 < y^+ = \frac{\varepsilon + \delta}{\gamma}$ con lo cual queda probado que la primera alternativa no puede darse.

La explicación a esta imposibilidad está en que de hecho para que el ingreso medio esté subiendo es necesario que la tasa de crecimiento de la población sea negativa; en cuanto a esta tasa empieza a ser positiva el ingreso per capita comienza a disminuir de suerte que para que se dé el ingreso mínimo de crecimiento constante de la población era necesario que la población hubiera tenido un período de crecimiento positivo y en consecuencia, y, el ingreso medio hubiera estado bajando a lo largo del mismo período, todo lo cual hace inconsistente pretender alcanzar un ingreso per capita mínimo cuando precisamente, dado el crecimiento de la población, nos estamos alejando de ese mínimo.

Pasemos a la segunda alternativa. De hecho no es alternativa puesto que es la única situación posible. Si $y_2 < y^+$

7) $\frac{\dot{A}}{A} = \gamma y^+ - \delta = \varepsilon \Rightarrow y^+ = \frac{\varepsilon + \delta}{\gamma}$

Gráfico I-8



entonces no hay forma de alcanzar el ingreso mínimo de crecimiento constante de la población. Analicemos qué pasaría si arrancamos de diferentes niveles iniciales de ingreso per capita:

i) Si $y < y_2 < y^+$ entonces $\dot{y}$ es positivo lo cual hace que lleguemos al ingreso medio estacionario y_2.

ii) Si $y_2 < y < y^+$ entonces $\dot{y}$ es negativo y en consecuencia el ingreso per capita bajará hasta y_2. Aquí hay crecimiento de la población a lo largo del proceso de ajuste.

iii) Si $y_2 < y^+ < y$ entonces $\dot{y}$ será negativo y empujará al ingreso medio hacia abajo hasta que llegue al ingreso estacionario y_2. Esencialmente éste es el mismo caso que el anterior.

Sobreponiendo la figura I-6 en la gráfica I-7, se produce una nueva figura I-8, en la cual podemos distinguir dos secciones para la ecuación diferencial que queda expresada en los siguientes términos:

$$\dot{y} = \begin{cases} (\rho-1)(\lambda y^2 - \delta y) & \text{para } 0 < y \leq y^+ \\ (\rho-1)\varepsilon y & \text{para } y^+ < y \end{cases}$$

Continuamos comentando el proceso de ajuste del tercer caso. -- Aquí empezamos por tener a $\dot{y}$ negativa, pero su primera derivada es igual a una constante a lo largo de la sección donde opera el crecimiento constante de la población; no obstante que presumiblemente la tasa negativa de crecimiento del ingreso medio sería mayor en términos absolutos si la población estuviera creciendo en función del ingreso medio; de cualquier manera, esa tasa es negativa y en consecuencia el ingreso per cápita se está reduciendo continuamente hasta que el ingreso per cápita llega a ser igual a y^+. A partir de este ingreso medio mínimo empieza a operar la tasa negativa del ingreso medio cuya primera derivada es variable hasta que el ingreso toma el valor de y_2.

La conclusión que obtenemos es que este modelo no -- puede producir un nivel de ingreso medio que permita pensar en la liberalización de fuerza de trabajo que pueda dedicarse a - otro sector. Este es un sistema agrario que nunca podrá dejar de serlo y, además, es completamente estacionario en su nivel medio de ingreso y en su volumen de población. No importa que por designio divino amanezcan las personas un día con su ingreso duplicado, siempre regresarán a la situación estacionaria - para ya no salir de ella. Este modelo que se parece mucho al de Ricardo -cuando menos en dos de los supuestos fundamentales: los rendimientos decrecientes a escala y el crecimiento de la población en función del ingreso- no explica pues, el crecimiento.

Para terminar con este inciso diremos que la población en el punto de equilibrio estable y estacionario esta justo en una situación de subsistencia. Si reducimos el ingreso la población decrecerá.

CRECIMIENTO CON AHORRO.

Dadas las condiciones y supuestos formulados en el inciso anterior llegamos a un modelo donde la solución es una economía estancada. Modifiquemos ese modelo. Supongamos que los productores de tal sistema, al darse cuenta que su producto per capita se mantinene constante, deciden hacer un esfuerzo para salir del estado de estancamiento. Tal esfuerzo consiste en ahorrar una parte de su ingreso con el objeto de adquirir capital a cambio de ese ahorro, entonces el ahorro, S, será:

$$S = sY \qquad \text{(II-1)}$$

donde s es una proporción del ingreso total. Por otro lado, sabemos que $Y = C + S$ y $Y = C + I$ entonces $S = I$. Además, el cambio del capital respecto al tiempo, haciendo caso omiso de la depreciación, es igual a la inversión. Esto es $\frac{dK}{dt} = \dot{K} = I$. Efectuando las substituciones necesarias llegamos a:

$$\dot{K} = sY \qquad \text{(II-2)}$$

lo cual nos dice que el crecimiento del capital es una función del ingreso.

De hecho, desde el momento que no hemos considerado la existencia de un sector industrial, hemos abierto nuestro modelo. Es el sector externo el que le va a permitir a un sistema de esta naturaleza adquirir los bienes de capital. Con tal motivo supondremos asumiremos: a) que el sector externo está en equilibrio; o sea, las importaciones de capital son compensadas exactamente por las exportaciones de productos agrícolas; y b) que los términos de intercambio se mantienen constantes para cualquier volumen de bienes tranzados. Estamos ahora en posición de replan tear la función producción introduciendo en ella el capital.

$$Y = A^{\rho} L^{\sigma} K^{\beta} \qquad \text{(II-3)}$$

Donde Y, A y L tienen la misma connotación que en la -- función original; y K es la cantidad de capital que se emplea - en la producción agrícola. Si suponemos fija la cantidad de -- tierra laborable, entonces la función queda expresada como:

$$Y = A^{\rho} K^{\beta} \qquad \text{(II-[illegible])}$$

donde $\rho + \beta = 1$, si y sólo si $\rho = 1 - \beta$ entonces

$$Y = A^{1-\beta} K^{\beta} \qquad \text{(II-4)}$$

Esto es, estamos suponiendo que la función tiene rendimientos - constantes a escala. Si incrementamos ambos insumos en una proporción cualquiera, el producto crecerá justamente en esa pro-- porción. Dividiendo esta expresión por la población para obtener términos per capita, entonces

$$y = k^{\beta} \qquad \text{(II-5)}$$

Diferenciando respecto al tiempo y dividiendo ambos miembros -- por y, entonces(1)

$$\frac{\dot y}{y} = \beta \frac{\dot k}{k} \qquad \text{(II-6)}$$

Donde(2)

$$\frac{\dot k}{k} = \frac{\dot K}{K} - \frac{\dot A}{A} \qquad \text{(II-7)}$$

Si dividimos por K la ecuación (II-2) obtendremos la tasa de -- crecimiento del capital. $\frac{\dot K}{K} = s\frac{Y}{K}$ entonces

$$\frac{\dot K}{K} = sk^{\beta-1} \qquad \text{(II-8)}$$

1) $\frac{dy}{dt} = \dot y = \beta k^{\beta-1}\frac{dk}{dt} = \beta k^{\beta-1}\dot k$

$\Rightarrow \frac{\dot y}{y} = \beta \frac{k^{\beta-1}}{k^{\beta}}\dot k = \beta \frac{\dot k}{k}$

2) $\frac{dk}{dt} = \frac{d\left(\frac{K}{A}\right)}{dt} = \frac{A\frac{dK}{dt} - K\frac{dA}{dt}}{A^2}$

$\frac{\dot k}{k} = \frac{A\dot K - K\dot A}{A^2} \cdot \frac{A}{K} = \frac{A\dot K}{AK} - \frac{K\dot A}{AK}$

Seguiremos suponiendo que la tasa de crecimiento de la población está dada por la función (I-8). Si sustituimos (II-6) en (II-8), entonces

$$\frac{\dot{A}}{A} = \gamma k^{\beta} - \delta \qquad \text{(II-9)}$$

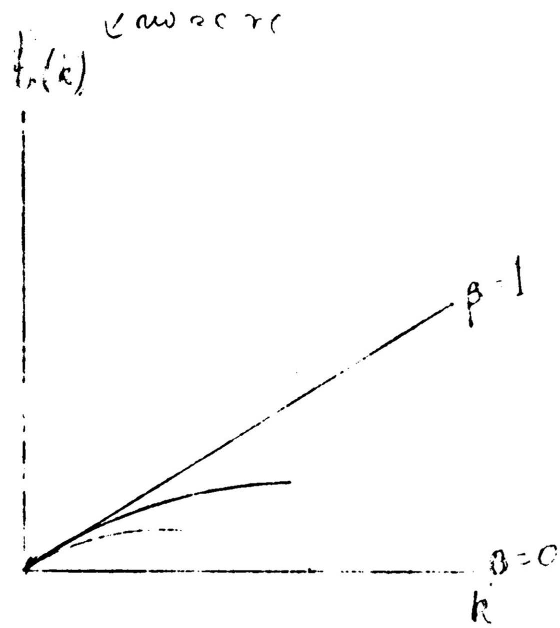
Ahora, sustituyendo a (II-8) y (II-9) en (II-7) y multiplicando ambos miembros por k, entonces

$$\dot{k} = sk^{\beta} - (\gamma k^{\beta+1} - \delta k) \qquad \text{(II-10)}$$

Esta ecuación nos dice cual es el crecimiento de la tasa de capital per capita. Desgraciadamente, dado que $0 \leq \beta \leq 1$ entonces los exponentes de la variable son números racionales y por lo mismo es difícil saber que valores asumirá la variable k cuando hacemos que la variación del capital por hombre sea igual a cero ($\dot{k} = 0$). Además, los valores que tome k en última instancia dependerán del valor de β. Intentaremos, sin embargo, hacer un análisis gráfico de esta ecuación, sabiendo que hay una solución trivial para la variable cuando $\dot{k} = 0$, que es k = 0.

Empecemos por el primer término. Hagamos $f_1(k) = sk^{\beta}$, entonces cuando β tiende a cero $f_1(k) = s$, lo cual nos dice que $f_1(k)$ es independiente del valor que tome k. La representación gráfica de $f_1(k) = s$ es una recta paralela al eje de las ordenadas, la cual es este caso coincide con ese eje. Cuando β tiende a uno entonces $f_1(k) = sk$ función ésta que también está dada por una recta que nace en el origen y cuya pendiente es s. Para cualquier otro valor de β la gráfica será una -

Gráfico II-1



curva concava hacia abajo que nace en el origen. La primera derivada de esta función es:

$$f_1'(k) = \beta\, s\, \frac{k^{\beta}}{k}$$

entonces cuando k crece el cociente $\frac{k^{\beta}}{k}$ se va empequeñeciendo -- puesto que $\beta < 1$, lo que hace que la pendiente decrezca siempre. - Además, haciendo esta derivada igual a cero, la única solución - que existe es $k = 0$. Entonces nace en el origen y es monótona - creciente. De hecho, esta es una propiedad de una función Cobb-Douglas.

Procedamos de igual manera para el segundo término, $\gamma k^{\beta+1}$ Entonces $f_2(k) = \gamma k^{\beta+1}$. Cuando β tiende a cero la función es -- $f_2(k) = \gamma k$ y su representación será una linea recta que nazca en el origen con pendiente γ. Cuando β tiende a uno entonces la función queda - como $f_2(k) = \gamma k^2$ dando lugar a una - curva cóncava hacia arriba como en - la figura II-2. La primera derivada de esta función es: $f_2'(k) = 2\gamma k$,; -- cuando k crece entonces todo el término $(2\gamma k)$ crece. Además, si igualamos la derivada a cero, entonces la única solución es $k = 0$, o sea la curva nace en el origen. Cuando β se empieza a alejar de uno la curva se va tornando más - recta. Dicho con mayor rigor, la pendiente de esta curva - se va haciendo menor para un valor cualquiera de k a medida que se aleje de uno y se acerque a cero, así hasta convertirse en una recta.

Gráfico II-2

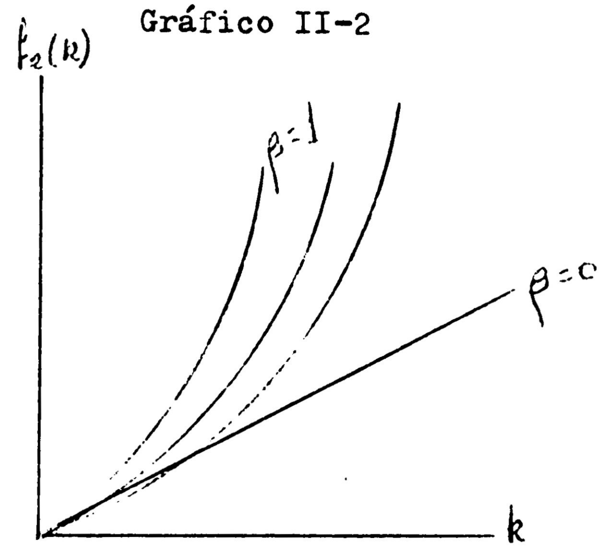
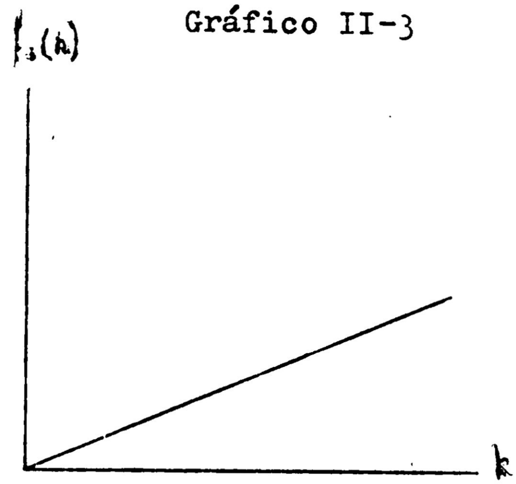


Gráfico II-3



Por último, el tercer término δk lo vaciamos en la figura II-3 donde observamos que se trata de una recta que partiendo del origen tiene una pendiente igual a δ.

Ahora, gráficamente deduzcamos el tercer término del segundo; para ello, vaciemos en una sola representación a ambas figuras. Escojamos, sin embargo, para ese propósito una β cualquiera que no sea ninguno de los extremos puesto que éstos no tienen sentido económico. (3)

3) La productividad marginal del capital es:

$$\frac{dY}{dK} = \beta L^{1-\beta} K^{\beta-1} \iff \frac{dY}{dK} = \beta L^{1-\beta} K^{\beta} K^{-1} \Rightarrow$$

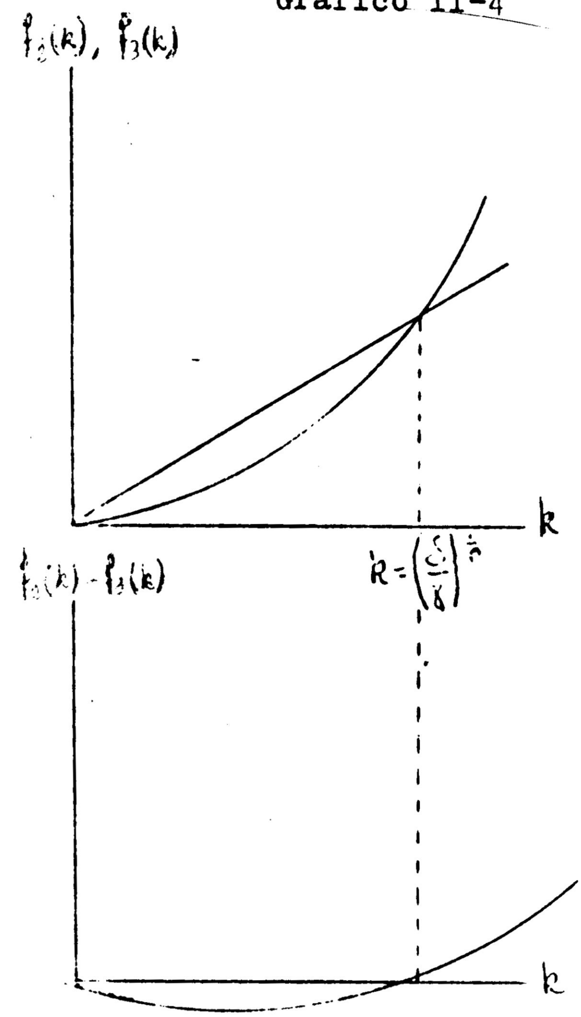
$$\frac{dY}{dK} = \beta \frac{Y}{K} \iff \beta = \frac{dY}{dK} \div \frac{Y}{K} = \frac{dY}{dK}\frac{K}{Y}$$

Por otro lado, la elasticidad del producto respecto al capital es: $e = \frac{dY}{Y} \div \frac{dK}{K} = \frac{dY}{dK}\frac{K}{Y} = \beta$

Decimos que ~~asumir~~ suponer que β toma los valores extremos no tiene sentido económico puesto que si $\beta = 0 = e$ entonces la elasticidad es igual a cero, lo cual dice que no importa la proporción en que se aumente el capital, el producto se mantendrá fijo y ésto implica que la elasticidad del producto respecto a la fuerza de trabajo es unitaria. En el otro extremo, si $\beta = 1 = e$ entonces el producto aumentará en la misma proporción en que haya aumentado el capital; en tanto que la elasticidad del producto respecto al trabajo será cero. Ambos extremos, pues, no tienen sentido económico.

En la parte superior del gráfico II-4 hemos sobrepuesto las figuras II-2 y II-3, donde observamos que hay una sección de la nueva función $f_2(k) - f_3(k)$, dibujada en la parte inferior de la figura, donde $0 < k \leq \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/\beta}$ para $f_2(k) < f_3(k)$. En tanto que para $\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/\beta} < k$ entonces $f_2(k) > f_3(k)$. De manera que deduciendo $f_3(k)$ a $f_2(k)$ obtenemos una parte negativa para $0 < k \leq \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/\beta}$ y otra parte positiva para $\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/\beta} < k$.

Gráfico II-4



El análisis gráfico que se intenta en el diagrama II-4 se refiere al segundo y tercer términos de la ecuación diferencial (II-10) -a los términos que están encerrados en el paréntesis- y éstos términos provienen de haber sustituido a la tasa de crecimiento de la población por ellos, de suerte que estos dos términos y sus respectivas gráficas están relacionados con la tasa de crecimiento demográfico, sólo que ahora están expresados en términos de la variable k. Es precisamente ésto lo que explica el comportamiento de la función en el sentido de que halla valores de k para los cuales $f_2(k) < f_3(k)$ y halla también valores de k donde $f_2(k) > f_3(k)$. En efecto, acordándonos de la función del crecimiento proporcional de k -función

(I-8), gráfico I-3- constataremos que hay un segmento donde la tasa de crecimiento de la población es negativa debido a que el ingreso per capita es muy pequeño y después, cuando el ingreso-medio crece, la tasa de crecimiento de la población se hace positiva. Cuando expresamos esa tasa de crecimiento en términos de k, podemos esperar que a valores pequeños de k, $f_2(k) - f_3(k)$ sea negativo; y para valores grandes de k, $f_2(k) - f_3(k)$ sea positivo.(4) Por lo que se ha dicho, podemos colegir que existe un valor de k para el cual $f_2(k) - f_3(k) = 0$. O sea: $\gamma k^{\beta+1} - \delta k = 0$

Las dos soluciones de esta ecuación son: (5) $k_1 = 0$ y $k_2 = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta}}$

La primera solución no es relevante. La segunda solución es - la que marca el valor de k donde $f_2(k) - f_3(k)$ toma el valor - cero a partir del cual esta función se hace positiva.

Para terminar este análisis gráfico nos falta deducirle al primer término de la ecuación (II-10) los términos --

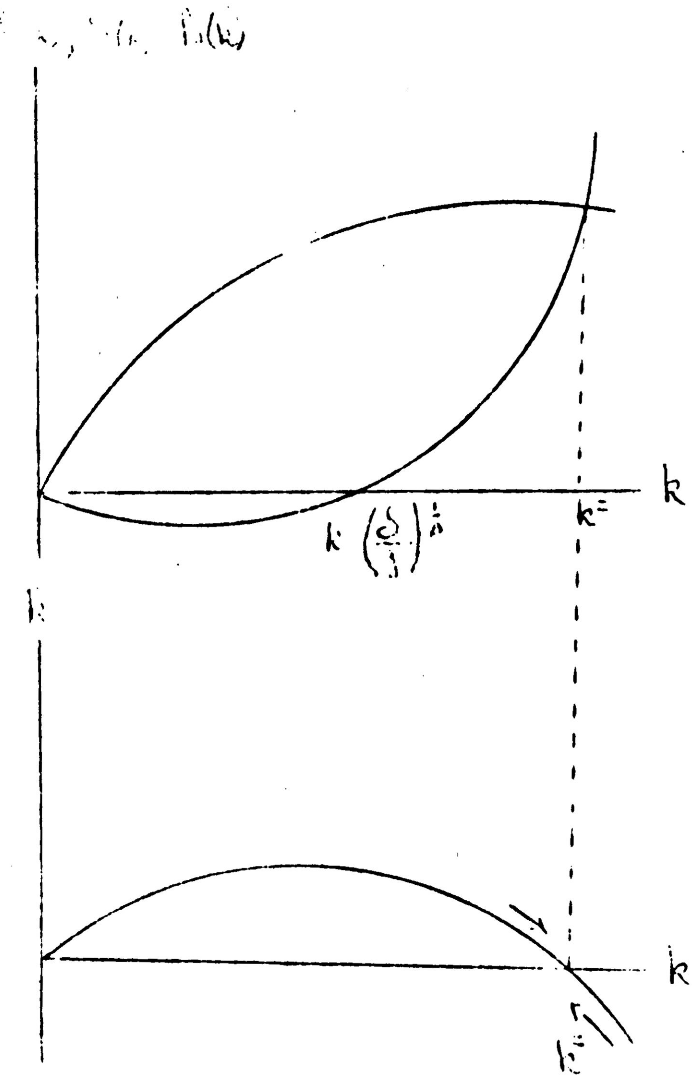
4) En realidad se trata de una tasa que multiplica el crecimiento porcentual de la población por el capital per capita puesto que $\frac{\dot{A}}{A} = \gamma y - \delta \Rightarrow \frac{\dot{A}}{A} = \gamma k^{\beta} - \delta$
multiplicando ambos miembros por k

$$\frac{\dot{A}}{A} k = \gamma k^{\beta+1} - \delta k$$

Es ésto, en realidad, lo que se está midiendo en el eje de las ordenadas en la figura II-4, parte inferior.

5) $$\gamma k^{\beta+1} - \delta k = 0 \iff k(\gamma k^{\beta} - \delta) = 0 \iff k = 0$$
$$\iff \gamma k^{\beta} = \delta$$
$$\iff k = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Gráfico II-5



que están dentro del paréntesis. En otras palabras, nos falta deducirle gráficamente a la figura II-1 la parte inferior de la figura II-4, cosa que se hace en la figura II-5, donde en su parte superior hemos metido las figuras mencionadas. Puesto que la función $f_1(k) = sk^\beta$ es monótona creciente y puesto que su pendiente siempre está decreciendo; en tanto que la función $f_2(k) - f_3(k)$ también es monótona creciente pero su pendiente siempre esta creciendo,(6) podemos asegurar que, tal y como se observa en la parte superior de la figura II-5, en algún punto a la derecha

6) La pendiente de $f_2'(k) - f_3'(k)$ es:

$$\frac{d[f_2(k) - f_3(k)]}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\lambda k^{\beta+1} - \delta k\right) = (\beta+1)\lambda k^{\beta} - \delta = 0 \iff k = \left[\frac{\delta}{\lambda(\beta+1)}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

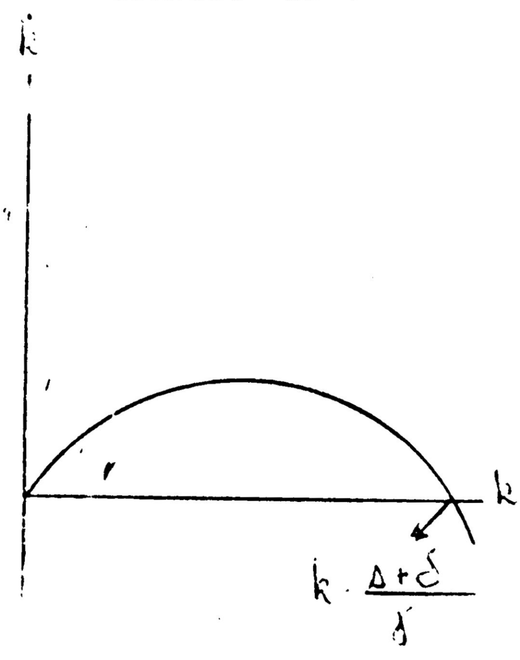
$$\frac{d^2[f_2(k) - f_3(k)]}{dk^2} = \beta(\beta+1)\lambda k^{\beta-1} > 0$$

Donde los parámetros δ y λ son positivos. Entonces la función $f_2(k) - f_3(k)$ tiene un mínimo para $k = \left[\frac{\delta}{\lambda(\beta+1)}\right]^{\frac{1}{\beta}}$. A partir de ese valor la pendiente se hace positiva y creciente. Esto es cuando crece la variable, el término k de la primera derivada siempre crece, lo cual hace que la pendiente, puesto que todos los términos son parámetros positivos, siempre crezca para β [illegible] de $k = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ las dos funciones en cuestión se intersectarán y será en ese punto donde la diferencia de ambas funciones se haga cero.

La parte inferior de la figura II-5 contiene la gráfica de la ecuación (II-10) Por las razones que se han dado existe un valor $k^{=}$ para el cual $\dot{k} = 0$; o sea, existe un punto donde el capital por hombre se mantine constante a lo largo del tiempo. Esa situación de estancamiento en el capital por hombre es estable puesto que para valores de k menores que $k^{=}$ $(k < k^{*})$ entonces $\dot{k}$ es positiva lo que nos dice que el capital por hombre está creciendo, empujando a k hacia la derecha. Para valores de k a la derecha de $k^{=}$ $(k^{=} < k)$ entonces $\dot{k}$ es negativa de manera que el capital per capita está reduciéndose, lo que hace que k se desplace a la izquierda. Entonces, el sistema es estable puesto que cualquiera que sea el valor de $k \neq 0$, éste tenderá a caer en $k^{=}$.

Veamos como mero auxilio analítico qué pasa cuando consideramos que el parámetro β en la ecuación (II-10) asume los valores extremos.

Gráfico II-6



a) Si $\beta = 1$ entonces $\dot{k} = k(s + \delta) - \gamma k^2$
Haciendo $\dot{k} = 0$, entonces tenemos dos soluciones: $k_1 = 0$ y $k_2 = \frac{s+\delta}{\gamma}$
La primera solución es irrelevante. La segunda solución nos dice que el valor de k es igual a la propensión al ahorro más la proporción de mortalidad entre la tasa de crecimiento --

bruto de la población. Esta solución necesariamente es positiva puesto que todos los parámetros lo son.

Sustituyendo este valor de k en la función de crecimiento de la población podremos encontrar la tasa a la que estará creciendo la población cuando el capital per capita se haya estabilizado.

$$\frac{\dot{A}}{A} = s \qquad \text{(II-11)}$$

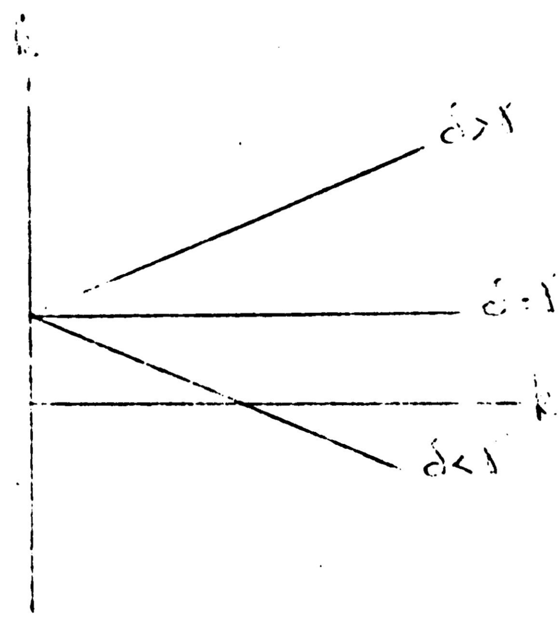
lo cual dice que la tasa de crecimiento de la población es una constante igual a la proporción que se ahorra del ingreso. En este caso el crecimiento del ingreso per capita es igual al expresado por la ecuación (II-10); o sea:

$$\dot{y} = \beta(sy - \gamma y^2 + \delta y) = [y(s + \delta) - \gamma y^2]\beta$$

cuyas soluciones estacionarias ($\dot{y} = 0$) son: $y_1 = 0$ y $y_2 = \frac{s+\delta}{\gamma}$ las cuales son las mismas que hemos obtenido para el capital por hombre.

b) Si $\beta = 0$ entonces $\dot{k} = (\delta - \gamma)k + s$.

El problema aquí está en saber qué signo tiene la pendiente $(\delta - \gamma)$ de la variable k. Caben tres alternativas: i) que la pendiente sea positiva en cuyo caso $\delta > \gamma$ y el valor de k tiende a crecer siempre. ii) que la pendiente sea igual a cero, entonces $\delta = \gamma$ y k está indeterminada. iii) en caso



7) $\frac{\dot{A}}{A} = \gamma y - \delta = \gamma k^{\beta} - \delta$
$= \gamma\left(\frac{s+\delta}{\gamma}\right)^{\beta} - \delta$
donde $\beta = 1$
$\frac{\dot{A}}{A} = \gamma\left(\frac{s+\delta}{\gamma}\right) - \delta = s$

8) $\frac{\dot{y}}{y} = \beta\frac{\dot{k}}{k} = \beta(sk^{\beta-1} - \gamma k^{\beta} + \delta)$ dado que $y = k^{\beta} \Rightarrow$
$\frac{\dot{y}}{y} = \beta(sy^{1-\frac{1}{\beta}} - \gamma y + \delta) \Rightarrow \dot{y} = \beta(sy^{2-\frac{1}{\beta}} - \gamma y^2 + \delta y)$
donde $\beta = 1 \Rightarrow \dot{y} = \beta(sy - \gamma y^2 + \delta y) = [(s+\delta)y - \gamma y^2]\beta$

de que la pendiente [illegible] negativa [illegible] y existe una solución para [illegible] donde k es un número positivo supuesto -- que [illegible]. En el primer caso la población decrece, en el segundo se mantiene constante y en el último crece. Sin embargo, -- puesto que estamos suponiendo a $\beta = 0$, parece ser que el proceso relevante es el segundo donde la pendiente es igual a cero; la población queda estable y el capital per capita tiende a infinito. Si $\beta = 0$ entonces no importa en que proporción aumentemos el capital (Véase el pie de pag. 3) el producto no crecerá y en consecuencia tampoco crecerá el ingreso per capita lo cual deja intacta a la población.

Ahora bien, después de haber ensayado un análisis gráfico de la ecuación (II-10) y de haberla resuelto para los valores extremos de β, estamos en posición de hacer una conclusión. Existe un valor $k^{=}$ estacionario y estable donde la tasa de crecimiento de la población es positiva, de suerte que el stock de capital del sistema está creciendo permanentemente, una vez alcanzado el valor $k^{=}$, a la tasa que está creciendo la población.

Nos queda por discutir qué pasa si la población alcanza el nivel mínimo de ingreso, y^{+}, donde la tasa de crecimiento de la población crece a una constante. Sustituyendo en (II-7) la tasa constante de crecimiento de la población, tenemos

$$\frac{\dot{k}}{k} = sk^{\beta-1} - \varepsilon$$

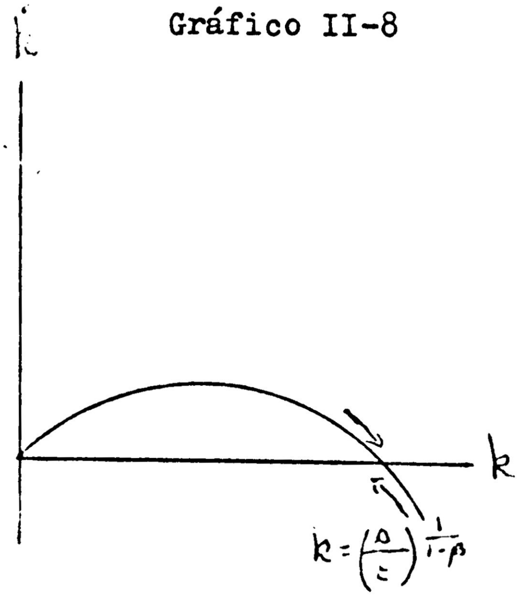
multiplicando ambos miembros por k, entonces

$$\dot{k} = sk^{\beta} - \varepsilon k \qquad \text{(II-12)}$$

Esta es una ecuación usada por Solow en su modelo de

9) R.M. Solow, Growth Economics, Amartya Sen, Model of Growth, artículo No. 7, p. 172.

Gráfico II-8



crecimiento, la cual tiene una solución trivial para $k_1 = 0$ y otra solución estacionaria en $k_2 = \left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$ Entonces, la solución estacionaria - para el modelo, considerando las dos secciones de la función del crecimiento de la población no puede ser menor que $k = \left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$. En efecto, si $k^{=} < k = \left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$ entonces ambas curvas se están intersectando a la izquierda de $k^{=}$ y a partir de ese punto empieza a función la ecuación (II-12) En realidad, la ecuación del crecimiento del capital per capita -- queda enmo:

$$\dot{k} = \max. \begin{cases} \Delta k^{\beta} - (\delta k^{\beta+1} - \delta k) \\ \Delta k^{\beta} - \varepsilon k \end{cases}$$